21世纪数学系列教材

工科数学分析(上)

(第二版)

李大华　林　益　汤燕斌　王德荣

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析(上)(第二版)/李大华　等
武汉:华中科技大学出版社， 2004年5月
ISBN　7-5609-2027-6

Ⅰ. 工…
Ⅱ. ①李…　②林…　③汤…　④王…
Ⅲ.
Ⅳ.

工科数学分析(上)(第二版)　　李大华　等

责任编辑:周芬娜　　封面设计:
责任校对:封春英　　责任监印:

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87545012

录　排:华大图文设计室
印　刷:

开本: ×　1/16　　印张:　　字数:
版次:2003年　月第1版　　印次:2003年　月第1次印刷　　印数:1—5 000
ISBN　7-5609-2027-6/O17　　定价: 28.00　元

内容提要

本书是第二版,是针对我国各重点院校对数学教学的要求及教学实际予以修订的.上册内容为一元函数微积分和微分方程,下册内容为空间解析几何、多元函数微积分及无穷级数,每节末附有习题答案与提示.

本书与一般工科《高等数学》教材相比,适当地补充了实数基本定理、一致连续性、一致收敛和含参量积分等内容,加强了微积分的理论基础;注重无穷小分析等数学思想的讲解和应用;在数学逻辑性、严谨性及抽象性方面也有相应要求和训练;引进现代数学语言、术语和符号,为读者进一步学习现代数学理论和方法提供了帮助;同时注重学生的工程应用意识的训练,培养学生应用数学解决实际问题的能力.

本书结构严谨、条理清晰、通俗易懂、例题典范、习题分层、可读性强,便于使用.适用于理工科(非数学)专业中对数学要求较高的专业使用,若略去部分内容也完全适合一般工科专业使用.

前　言

随着科学技术的飞速发展,数学的科学地位发生了巨大的变化.高技术本质上是数学技术的观念已日益为人们所共识.计算机和信息技术的迅速发展正在改变着人们对数学知识的需求,冲击着传统的观念和方法.面临着培养21世纪人才的挑战性任务,许多高等院校理工科(非数学)专业和管理、经济类专业对数学基础课程提出了新的更高的要求.数学基础课程不再仅仅是学到某些知识,为专业课程提供数学工具,更重要的是提高学生的数学素质和数学修养水平.

本书正是在这种形势下应运而生的.本书的宗旨是,在传授知识的同时,加强和拓宽基础,加强应用;注意传授数学思想,培养学生的创造性思维;着重提高学生的数学素养和能力.本书与传统的高等数学教材的主要区别是,本书加强了微积分的理论基础,注重无穷小分析的思想的运用.在数学的逻辑性、严谨性及抽象性方面也有相应的要求和训练.但本书又与数学专业用的数学分析教材不同,在内容的深度和广度上没有数学分析教材要求那么高.我们注意了对学生的工程意识的培养,即通过典型例题的介绍及相应习题的训练,培养学生运用数学知识解决实际问题的能力.基于上述理由,我们将本书定名为《工科数学分析》.

本书有以下特点.

1. 引进一些近代数学的术语、符号和概念.如集合、映射、度量性等,这将有助于学生进一步阅读使用数学工具较多的现代科技文献.

2. 拓宽和加强数学基础.本书加强了极限理论,从确界定理出发,介绍并证明了实数理论的几个基本定理;证明了有界闭区间上连续函数的基本性质;简要介绍了欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中关于点集的某些基本概念,并在此基础上引进多元函数的极限与连续性概念;增加了理科数学分析中的一些重要内容,如一致连续、一致收敛、向量值函数的导数、含参变量的积分等.这些知识不仅有实用价值,而且对学生的逻辑思维训练是十分有益的.

3. 突出数学建模,培养学生把实际问题转化为数学问题并加以解决的能力.本书除介绍微积分应用的经典例子(如物理、力学、几何等方面的例子)外,还介绍了若干工程、经济、人口、生态等领域中的例子,在习题中设置了许多实际应用的问题,这些问题在提高学生对数学应用的兴趣及能力方面有较大的作用.

4. 重视数学思想方法的训练.本书注意突出无穷小分析的思想,将逼近的思想贯穿始终.尽可能将演绎与归纳的方法有机地结合起来,通过“问题(包括背景)—观察与思考—归纳总结—给出解答”这种模式来组织若干教学内容(如最优化问题—极

值与条件极值等),以利于培养学生的创造能力.

5. 在习题的配置上,本书把每节的习题分成(A)、(B)两类.(A)类为基本要求题,用于巩固基础知识和基本技能;(B)类为提高题,用于扩大视野和熟练技巧,提高学生的综合能力.另外,每章还配有总习题,供学生作综合练习或复习使用.

本书适用于理工科(非数学)专业和管理、经济类专业中对数学要求较高的专业.但如果略去理论性较强的部分及"*"号部分,一般工科及经济、管理类专业也可使用本书.

在本书的编写过程中,得到华中科技大学教务处的大力支持.本书的第一版曾得到李楚霖教授,李静瑶、何瑞、杨林锡和乔维佳等4位副教授的支持和具体的帮助.华中科技大学出版社的有力支持,以及责任编辑龙纯曼老师和周芬娜老师的辛勤劳动,使得本书能顺利出版并再版.在此我们一并表示衷心的感谢!

对于书中的不足和错误,恳请专家、同行及热心的读者批评指正.

编　者

2004年3月于华中科技大学

目　录

第 1 章　集合与函数

集合论的概念和方法是数学的一种语言,函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象. 在高等数学中,我们主要研究事物的运动规律和现象的变化规律,因此,函数是高等数学中的主要研究对象. 本章在介绍集合与映射的基本概念后,着重讨论一元函数这个特殊的映射.

1.1　集合与实数集

1.1.1　集合及其运算

什么叫集合? 所谓集合,就是指具有某种共同属性的事物的全体. 而那些“事物”就称为集合的**元素**或**元**. 通常,用大写字母表示集合,用小写字母表示集合的元素. 若 A 是一个集合,则 $x \in A$ 表示 x 是 A 的一个元素. 而 $x \notin A$ 表示 x 不是 A 的元素.

集合的表示方法有两种,一种是**列举法**,就是把集合中的所有元素列举出来. 例如 $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ 表示全体自然数所组成的集合. $A = \{a, b, c, d\}$ 表示由 a, b, c, d 四个元素组成的集合. 另一种是**特性表示法**,就是把集合中元素的特性表示出来. 例如 $E = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$ 表示 E 是具有性质 $x^2 - 1 = 0$ 的那些元素 x 所组成的集合. 又如全体自然数的集合可以表为 $\mathbb{N} = \{n \mid n$ 是自然数$\}$. 今后,我们用 $\mathbb{N}$ 表示自然数集, $\mathbb{Z}$ 表示整数集, $\mathbb{Q}$ 表示有理数集, $\mathbb{R}$ 表示实数集.

设 A, B 是两个集合,若集合 A 的每一个元素也是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的一个**子集**,记作 $A \subset B$. 这时我们说 A 含于 B 中,或 B 包含 A. $A \subset B$ 也可记作 $B \supset A$.

集合的包含关系有两个简单的性质:

① $A \subset A$;

② 若 $A \subset B$, $B \subset C$, 则 $A \subset C$.

如果 $A \subset B$, 同时 $B \subset A$, 即 A 和 B 含有完全相同的元素,则称 A 与 B **相等**,记作 $A = B$. 如果 $A \subset B$, 但 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的一个**真子集**. 不含有任何一个元素的集合叫做**空集**,记作 $\varnothing$. 例如 $\{x \mid x^2 + 1 = 0$ 且 x 是实数$\} = \varnothing$.

每一个非空集合 A, 至少含有两个明显的子集: A 及 $\varnothing$. 如果 A 仅有这样两个子集,则 A 必为单元素集,即只含有一个元素的集合. 一个集合所含有的元素为有限多个,则称此集合为**有限集**. 不是有限集的集合称为**无限集**.

下面给出集合运算的定义.

定义 1.1.1(集合的并与交)　设 A, B 为两个给定的集合. 称集合 $\{x \mid x \in A$ 或 $x \in$

$B\}$为A与B的**并集**(简称**并**),记作$A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\};$$

称集合$\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$为$A$与$B$的**交集**(简称**交**),记作$A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

显然,$A\cap B\subset A\subset A\cup B$. 如果$A\cap B=\varnothing$,则称$A$与$B$**不相交**.

定 义 1.1.2(**差集和余集**)　设A,B为两个给定的集合,称集合$\{x\mid x\in A\text{ 但 }x\notin B\}$为$A$与$B$的**差集**(简称**差**),记作$A-B$,即

$$A-B=\{x\mid x\in A\text{ 但 }x\notin B\}.$$

在讨论某个具体问题时,如果所考虑的一切集都是某集合X的子集,则称X为**基本集**. 设X是一个非空的基本集,$A\subset X$,则定义$X-A$为集合A关于基本集X的**余集**(简称**余**),记作A^{C}.

图1.1可以帮助我们理解集合的并、交、差和余等概念.

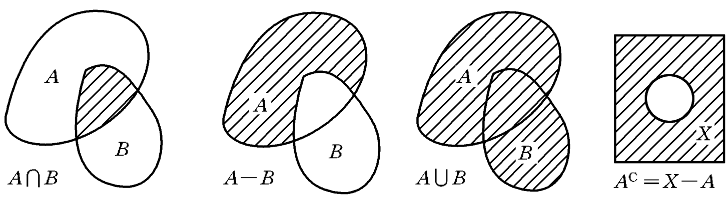


图1.1

集合的运算具有下述重要规律.

定理 1.1.1　设A,B,C为给定的集合,则有

(1)(**交换律**)　$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$;

(2)(**结合律**)　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(3)(**分配律**)　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(4)(**幂等律**)　$A\cup A=A$,$A\cap A=A$;

(5)(**吸收律**)　$A\cup\varnothing=A$,$A\cap\varnothing=\varnothing$.

给定两个集合A和B,设$x\in A$,$y\in B$,则可以作成一个有序对(x,y). 所谓有序是指(x,y)与(y,x)是不同的. 两个有序对(x_1,y_1),(x_2,y_2)相同当且仅当$x_1=x_2$,$y_1=y_2$.

定义 1.1.3(**乘积集合**)　设A,B为给定的集合,称一切有序对构成的集合$\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$为$A$与$B$的**笛卡儿乘积**(Cartesian Product),记作$A\times B$,即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}.$$

例如,A为区间$[0,1]$,B为区间$[1,2]$,则$A\times B$是一个单位正方形(见图1.2)

$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 1\leqslant y\leqslant 2\}$.

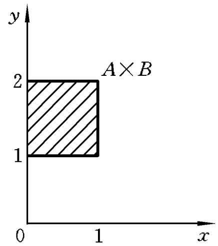


图1.2

推而广之,若有 n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, $a_i\in A_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$,则可以作成一个 n **元有序组** $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 两个 n 元有序组相等,是指它们含有相同的元素,且这些元素有相同的排序. 例如 $(1,3,5)\neq(3,1,5)$.

定义 1.1.4　集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**笛卡儿乘积** $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 是所有 n 元有序组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 构成的集合,其中 $a_i\in A_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

例 1.1.1　设 $A=\{1,2\}$, $B=\{-3,2,4\}$,则

$$A\times B=\{(1,-3),(1,2),(1,4),(2,-3),(2,2),(2,4)\},$$

而

$$B\times A=\{(-3,1),(-3,2),(2,1),(2,2),(4,1),(4,2)\}.$$

显然, $A\times B\neq B\times A$. □

一个集合自身也可构成笛卡儿乘积,例如 $A^n=A\times A\times\cdots\times A$,其中有 n 个因子 A.

例 1.1.2　设 $A=\{1,2\}$,则 $A^2=A\times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$. □

由于 $\mathbf{R}$ 表示数轴上全体点所成之集(即实数集),则 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 就是实平面 $\mathbf{R}^2$,即

$$\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}.$$

今后我们记

$$\mathbf{R}^3=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y,z)\mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}, z\in\mathbf{R}\}.$$

$$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1\in\mathbf{R}, x_2\in\mathbf{R},\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}.$$

为今后方便起见,引进一些常用的逻辑符号.

设 P、Q 表示两个命题(或条件).

符号"$P\Rightarrow Q$"表示如果 P 成立,则 Q 也成立.

符号"$P\Leftrightarrow Q$"表示命题 P 与 Q 等价,亦即"$P\Rightarrow Q$ 且 $Q\Rightarrow P$".

符号"$\forall$"表示"任给",例如"$\forall x, f(x)\geqslant 0$"的意思是,对任给的 x,不等式 $f(x)\geqslant 0$ 都成立.

符号"$\exists$"表示"存在",例如"$\exists x$ 使得 $|x-a|<1$"的意思是,存在实数 x,使得不等式 $|x-a|<1$ 成立.

1.1.2　实数的性质

在中学数学课程中,我们知道实数由有理数和无理数两部分组成. 每一个有理数都可以表示成分数 $\frac{p}{q}$ (p、q 为整数, $q>0$),也可以用有限十进制小数或无限十进制循环小数表示. 而无限十进制不循环小数则表示一个无理数.

实数有以下的主要性质.

① 实数对加、减、乘、除(除数不为0)四则运算是封闭的. 即对任何两个实数在施

行四则运算中的任何一个运算之后,所得的和、差、积、商仍然是实数.

② 实数是有顺序的,即任意两个实数 a 和 b,必满足下列三个关系之一:

$$a<b,\quad a=b,\quad a>b.$$

③ 实数集具有稠密性,即任意两个不相等的实数之间必有另一个实数(而且既有有理数,又有无理数).

④ 如果在一直线(通常画成水平直线)上选定一点 O 作为原点,指定一个方向为正向(通常把指向右方的方向规定为正向),并规定一个单位长度,则称此直线为**数轴**. 我们知道,全体实数与整个数轴上的点有一一对应的关系,即任一实数都对应数轴上唯一的一点;反过来,数轴上每一点也都唯一地代表一个实数. 因此,今后我们对"实数 a"与"数轴上的点 a"这两种说法不加区别.

下面我们介绍一些常用的不等式.

(1) **绝对值不等式**

实数 a 的绝对值定义为

$$|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

容易推得以下的不等式:

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|,\qquad ||a|-|b||\leqslant|a-b|.$$

利用数学归纳法,可以对 n 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 证明不等式

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

(2) **伯努利**(Bernoulli)**不等式**

设 $x>-1$,n 为自然数,则有

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx.$$

证明　用数学归纳法. $n=1$ 时,上式以等式的形式成立. 假设已证明了

$$(1+x)^{n-1}\geqslant 1+(n-1)x,\quad\forall x>-1.$$

则
$$\begin{aligned}(1+x)^n&=(1+x)^{n-1}(1+x)\geqslant(1+(n-1)x)(1+x)\\&=1+(n-1)x+x+(n-1)x^2\geqslant 1+nx,\quad\forall x>-1.\end{aligned}$$

这就证明了对一切自然数 n,对一切 $x>-1$,伯努利不等式成立. □

(3) **平均值不等式**

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 n 个正实数,则有

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

证明　用数学归纳法. $n=1$ 时,上式以等式的形式成立. 假设对任意 $n-1$ 个正实数,上述不等式成立. 考察 n 个正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 不妨设 x_n 是这 n 个数中的最大者,记

$$A=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1},$$

则有
$$x_n\geqslant A=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\geqslant\sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}.$$

于是
$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n=\left[\frac{(n-1)A+x_n}{n}\right]^n=\left(A+\frac{x_n-A}{n}\right)^n$$
$$=A^n+nA^{n-1}\left(\frac{x_n-A}{n}\right)+\cdots\geqslant A^n+nA^{n-1}\left(\frac{x_n-A}{n}\right)$$
$$=A^n+A^{n-1}(x_n-A)=A^{n-1}x_n\geqslant x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n,$$
即
$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$ □

1.1.3　区间与邻域

设a、$b\in\mathbf{R}$，且$a<b$. 定义

开区间　$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$;

闭区间　$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$;

半开半闭区间　$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$及$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$.

引进符号“∞”，读作“无穷大”，符号“$+\infty$”读作“正无穷大”，符号“$-\infty$”读作“负无穷大”. 我们可以给出以下无穷区间的记号及定义：
$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\},\qquad(-\infty,a]=\{x\mid x\leqslant a\},$$
$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\},\qquad(-\infty,a)=\{x\mid x<a\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}.$$
以后凡说到区间均泛指有限区间或无穷区间.

设$a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，称集合
$$O(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$
为**点a的δ邻域**，有时简记为$O(a)$. **点a的空心邻域**则是集合
$$O_0(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)-\{a\},$$
或简记为$O_0(a)$.

有时我们还用到下面几种邻域：
$$O^+(a,\delta)=\{x\mid 0<x-a<\delta\}\quad(\text{点}a\text{的}\delta\text{右邻域}),$$
$$O^-(a,\delta)=\{x\mid 0<a-x<\delta\}\quad(\text{点}a\text{的}\delta\text{左邻域}),$$
或简记为$O^+(a)$和$O^-(a)$. 此外，还称开区间$(a,+\infty)$为$+\infty$的邻域，$(-\infty,a)$为$-\infty$的邻域.

1.1.4　确界与确界原理

对于一个有限数集来说，它必有最大数和最小数. 比如集合$A=\{1,2,3\}$，则A的最大数为3，记作$\max A=3$；A的最小数为1，记作$\min A=1$[①]. 然而，无限数集就未必有

① max 和min 分别是英文单词maximum 和minimum 的缩写. $\max(a,b)$表示数a和b中的最大者，而$\min(a,b)$表示数a和b中的最小者.

最大数或最小数,如开区间(0,1)就没有最大数和最小数,而闭区间[0,1]有最大数1,最小数0.那么,0和1对于开区间(0,1)来说扮演着什么角色呢?为探讨这个问题,下面引进数集的确界概念.

定义 1.1.5(**上界与下界**)　设E为一非空数集,如果存在数M,使得$\forall x\in E$都有$x\leqslant M$,则称M为E的一个**上界**;如果存在数m,使得$\forall x\in E$都有$x\geqslant m$,则称m为E的一个**下界**.若E既有上界又有下界,则称E是一个**有界数集**.若E不是有界数集,则称它为**无界数集**.显然,若E有上界M,则任何大于M的数也都是E的上界;若E有下界m,则任何小于m的数也都是E的下界.

读者容易证明,任何有限区间都是有界数集,而任何无穷区间都是无界数集.

定义 1.1.6(**确界**)　设E为一非空数集,若数β是E的一个上界,且对E的任一上界β',都有$\beta\leqslant\beta'$,则称β为E的**上确界**(即**最小上界**),记作$\beta=\sup E$;若数α是E的一个下界,且对E的任一下界α',都有$\alpha\geqslant\alpha'$,则称α为E的**下确界**(即**最大下界**),记作$\alpha=\inf E$①.

显然,当数集E存在最大数M与最小数m时,M与m分别是E的上确界与下确界.

例 1.1.3　若$E=(0,1)$,则$\sup E=1$,$\inf E=0$;若$B=[0,1]$,则$\sup B=1=\max B$,$\inf B=0=\min B$.　□

在例1.1.3中我们可以看到,数集E虽然没有最大数和最小数,但E有最小上界(即上确界)和最大下界(即下确界).数集B的上、下确界都属于B,而E的上、下确界都不属于E.

若一个数集有上(下)确界,则这个上(下)确界是唯一的.请读者自己证明这个结论.

关于确界,下面给出几个定理.

定理 1.1.2(**确界原理**)　非空有上(下)界的数集必存在上(下)确界.

这个原理是本书的理论基础,它的严格证明可以由实数理论得出,本书将不加证明而承认下来.有兴趣的读者可参阅有关的参考书.

定理 1.1.3　设A是有上界的非空数集,$\beta=\sup A$.则$\forall\varepsilon>0$,$\exists x_0\in A$,使得$\beta-\varepsilon<x_0\leqslant\beta$.

证明　β显然是A的一个上界,从而$\forall x\in A$,有$x\leqslant\beta$.假设不存在这样的点$x_0\in A$满足不等式$\beta-\varepsilon<x_0$,则$\forall x\in A$都应有$x\leqslant\beta-\varepsilon$.于是$\beta-\varepsilon$也是$A$的一个上界.由于$\beta$是$A$的最小上界,故必须有$\beta\leqslant\beta-\varepsilon$,而$\varepsilon>0$,故产生矛盾,定理得证.　□

定理 1.1.4　若数集A包含了它的一个上界β,则$\beta=\sup A$.

证明　设β'是A的另一个上界,则因$\beta\in A$,故$\beta\leqslant\beta'$.这表明β是A的最小上界,所以β是A的上确界.　□

最后我们用一个例子结束本节.

① sup和inf分别是英文单词supremum和infimum的缩写.

例 1.1.4　$A_1=\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$，$\alpha=\inf A_1=0\notin A_1$，即下确界 α 不能达到；$\beta=\sup A_1=1\in A_1$，即上确界 β 可达到.

$A_2=\{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\}$，$\alpha=1$ 可达到，而 β 不存在.

$A_3=\{x\mid-\infty<x\leqslant 5\}$，$\alpha$ 不存在，$\beta=5$ 可达到.

$A_4=\{x\mid x^2>4\}$，A_4 既无上界又无下界，因此 α 和 β 均不存在. □

习　题　1.1

(A)

1. 回答下列问题：
   (1) 集合有什么样的表示法？
   (2) 一个集合的子集是怎样定义的？
   (3) 两个集合相等是什么意思？
   (4) 集合的并、交、差、余是怎样定义的？
   (5) 什么叫两个集合的乘积集合？
   (6) 实数集的稠密性是什么意思？
   (7) 实数与任一条直线之间有什么关系？
   (8) 什么叫点 a 的邻域？
   (9) 什么叫有界数集、无界数集？
   (10) 一个数集的上(下)确界是怎样定义的？
   (11) 确界原理的内容是什么？
2. 试用列举法表示下列集合：
   (1) 函数方程 $\sin x=0$ 的根的集合；　(2) 五种商业广告形式的集合.
3. 设 $X=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，$A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=\{a,c,e,g\}$，$C=\{b,e,f,g\}$. 求：
   (1) $A\cup C$；　(2) $B\cap A$；　(3) $C-B$；　(4) $B^C\cap C$.
4. 解下列不等式：
   (1) $|x-1|<2$；　(2) $|x-2|\geqslant 10$；　(3) $\left|5-\frac{1}{x}\right|<1$；
   (4) $|x^2-2|\leqslant 1$；　(5) $|x-5|<|x+1|$；　(6) $|2x-1|<|x-1|$；
   (7) $|x|>|x+1|$；　(8) $|x+2|+|x-2|\leqslant 12$.
5. 设 $a<c<b$，求证 $|c|\leqslant\max(|a|,|b|)$.
6. 证明不等式：(1) $|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$；　(2) $|x+x_1+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$.
7. 证明：$\max(a,b)=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}$，$\min(a,b)=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}$.
8. 证明恒等式：$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2$.
9. 用区间表示下列不等式的解：
   (1) $\left|x+\frac{1}{x}\right|\leqslant 6$；　(2) $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$；　(3) $(x-2)(x-3)(x-4)>0$.

10. 求下列数集的上、下确界:

(1) $A=\{x \mid x\in\{0,1,2,3,4,5\}\}$; (2) $B=\{x \mid x^2<3\}$;

(3) $C=\{x \mid -5\leqslant x<5\}$; (4) $D=\{x \mid x>0 \text{ 且 } x^2<2\}$.

(B)

1. 试用特性表示法表示下列集合:

(1) 以点(0,0)为圆心、R 为半径的圆内全体点构成的集合(不含圆周上的点).

(2) 考察费波那契(Fibonacci)数列:1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,…. 写出由该数列的项构成的集合.

2. (1) 举一个 $(A-B)\cup B\neq A$ 的例子.

(2) 举一个 $A\cap B=A\cap C$ 但 $B\neq C$ 的例子.

3. 若将“对每一个 $x\in X$,存在 $y\in Y$,具有性质 P”用数学符号表示为 $(\forall x\in X)(\exists y\in Y)P$,试问下列两个语句中哪一个是正确的?

(1) $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in \mathbf{R}, -\delta<x<\delta)(|\sin x|<\varepsilon)$.

(2) $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in \mathbf{R}, -\delta<x<\delta, x\neq 0)\left(\left|\sin \dfrac{1}{x}\right|<\varepsilon\right)$.

4. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是符号相同且大于 -1 的数,证明不等式

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

5. 设 $a,b>0$,求证

(1) $(a+b)^p\geqslant a^p+b^p \quad (p>1)$; (2) $(a+b)^p\leqslant a^p+b^p \quad (0<p<1)$.

6. 证明:$\forall a,b\in\mathbf{R}$,有不等式 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

7. 设 E 为非空的有界数集,定义 $E^-=\{x \mid -x\in E\}$. 试证明

(1) $\inf E^-=-\sup E$; (2) $\sup E^-=-\inf E$.

8. 设 A、B 皆为非空的有界数集,定义数集 $A+B=\{z \mid z=x+y, x\in A, y\in B\}$. 证明:

(1) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$; (2) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

9. 设 A 是有下界的非空数集,$\alpha=\inf A$. 证明:$\forall \varepsilon>0$, $\exists x_0\in A$,使得 $\alpha\leqslant x_0<\alpha+\varepsilon$.

10. 证明:若数集 A 包含了它的一个下界 α,则 $\alpha=\inf A$.

答案与提示

(A)

2. (1) $\{0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots,\pm k\pi,\cdots\}$.

3. (1) $\{a,b,c,d,e,f,g\}$; (2) $\{a,c,e\}$; (3) $\{b,f\}$; (4) $\{b,f\}$.

4. (1) $-1<x<3$; (2) $x\leqslant -8$ 或 $x\geqslant 12$; (3) $\dfrac{1}{6}<x<\dfrac{1}{4}$; (4) $1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$; (5) $x>2$; (6) $0<x<\dfrac{2}{3}$; (7) $x<-\dfrac{1}{2}$; (8) $-6\leqslant x\leqslant 6$.

9. (1) $[-3-2\sqrt{2},-3+2\sqrt{2}]$, $[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}]$; (2) $\left[\dfrac{\pi}{4}\pm 2k\pi,\dfrac{3\pi}{4}\pm 2k\pi\right]$;

(3) $(2,3)\cup(4,+\infty)$.

10. (1) $\sup A=5$, $\inf A=0$; (2) $\sup B=\sqrt{3}$, $\inf B=-\sqrt{3}$; (3) $\sup C=5$, $\inf C=-5$;

(4) $\sup D=\sqrt{2}$, $\inf D=0$.

(B)

1. (1) $\{(x,y)\mid x^2+y^2<R\}$;　(2) $\{a_n\mid a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 2), a_0=a_1=1\}$.
2. (1) $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5\}$;　(2) $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,3\}$, $C=\{2,3,5\}$.
3. (1) 正确,(2) 错误.
4. 用数学归纳法.
5. (1) 令 $p=1+h$, $h>0$;　(2) 令 $p=1-h$, $0<h<1$.
6. 左端分子加减1.
7. (1) 利用确界定义;　(2) 同(1).
8. 利用定理1.1.3.
9. 与定理1.1.3的证明方法类似.
10. 与定理1.1.4的证明方法类似.

1.2　映射与函数

在中学数学课程中,我们对函数概念已有了初步的了解.本节将对函数、映射等概念作进一步的讨论.

1.2.1　映射

定义 1.2.1(**映射**)　设 A、B 为两个非空集合.如果存在一个规则 f,使得 $\forall x\in A$,都有唯一的一个元素 $y\in B$ 与它对应,则称 f 是从 A 到 B 的一个**映射**,记作

$$f: A\to B,\quad \text{或}\quad y=f(x).$$

称 y 是 x 在 f 下的**像**,称 A 为映射 f 的**定义域**,常记为 $D(f)=A$.集合

$$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$$

称为映射 f 的**值域**,常记为 $R(f)$.一般来说,$f(A)$ 是 B 的一个子集,而不必是整个 B.

设 $b\in f(A)$,则集合 A 中以 b 为其像的元素可能不止一个,我们把 A 中其像为 b 的一切元素的总体称为 b 的**原像集**,记作 $f^{-1}(b)$.若集合 $B_0\subset f(A)$,则记号 $f^{-1}(B_0)$ 表示子集 B_0 在 f 下的原像集,即 $f^{-1}(B_0)=\{x\in A\mid f(x)\in B_0\}$.显然,$f^{-1}(B_0)$ 是 f 的定义域 A 的子集.

为了形象地理解映射的概念,我们把映射看作一个黑盒子(在传输理论中,将内部构造复杂而又不易弄清楚的传输系统称为黑盒子),如图1.3所示.

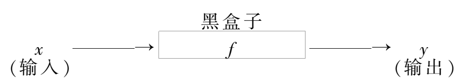


图1.3

例1.2.1　设 A 是一非空集合.$\forall x\in A$.定义 $I(x)=x$.则 I 是从 A 到 A 的映射.称

$I: A \to A$ 为集合 A 上的**恒等映射**. □

例1.2.2 设N表示全体自然数之集. 映射 $f: \mathrm{N} \to \mathrm{R}$ 意味着用自然数编号的一串实数:

$$x_1 = f(1),\ x_2 = f(2),\ \cdots,\ x_n = f(n), \cdots.$$

这样的一个映射,或者说这样的以自然数编号的一串实数 $\{x_n\}$,称为**实数列**,简称**数列**. □

最后,我们简单介绍映射的图像的概念,设 $f: A \to B$ 是一个映射,称集合 $\{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$ 为映射 $f: A \to B$ 的图像. 例如,映射 $f: x \to \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图像 $\{(x, \sin x) \mid x \in [0, 2\pi]\}$ 就是区间 $[0, 2\pi]$ 上的一条正弦曲线.

1.2.2 一元函数的概念

定义1.2.2(**一元函数**) 若 A、B 为两个非空实数集,则称映射 $f: A \to B$ 为**一元函数**,简称为**函数**. 常记作

$$y = f(x), \quad x \in A.$$

称其中 x 为**自变量**, y 为**因变量**. f 的**定义域** $D(f) = A$,其**值域** $R(f) = f(A)$.

由函数的定义可知,定义域 $D(f)$ 和对应规则 f 是确定函数的两个主要因素. 我们说两个函数相同,是指它们有相同的定义域和相同的对应规则(即在相同的定义域中,每个 x 所对应的函数值总相同). 例如

$$f(x) = 1, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$g(x) = \frac{x}{x}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty);$$

$$h(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

f 与 g 是不相同的,因为它们的定义域不同,而 f 与 h 是相同的,虽然其对应规则的表达形式不同.

例 1.2.3 邮费是邮件重量的函数(指国际信函):

邮件重量/克	20及20以下	20~50	50~100	100~250	250~500	500~1 000
邮　费/元	4.40	8.20	10.40	20.80	39.80	75.70

这是一个表格形式的函数. □

例 1.2.4 火箭在垂直发射阶段运行的距离 h 是时间 t 的函数,如图1.4所示,这是一个用图形描述的函数. □

例 1.2.5 符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -1, x < 0 \end{cases}$ 是一种**分段函数**,其图像见图1.5.

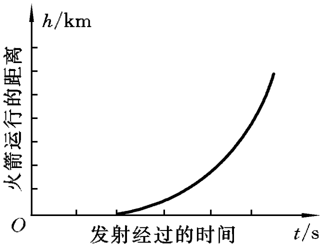


图1.4

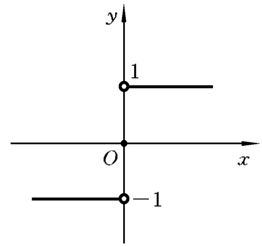


图1.5

函数$f(x)=|x|$也常用如下分段函数形式来表示:

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

利用符号函数还可以把$f(x)=|x|$表示为

$$f(x)=x\operatorname{sgn}x.$$ □

例 1.2.6　狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

这个函数定义在整个数轴上,它既不能用图像也不能用列表的方式表示. □

1.2.3　复合函数

我们先来看一个简单的例子,如何由两个函数构造一个新函数.

从点M垂直地发射一火箭,火箭P在时刻t与发射点的距离为$h(t)$. 观察站设在距发射地点1 km 处(见图1.6). 试将火箭与观察站的距离d表示为时间t的函数.

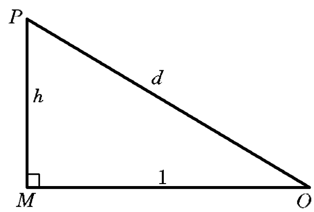


图1.6

例1.2.4已给出函数$h(t)$,而图1.6的直角三角形则给出关系式$d=\sqrt{1+h^2}$,因此在时刻t,P到O的距离为

$$d(t)=\sqrt{1+h^2(t)}.$$

这样我们由两个函数构造出一个新函数$d(t)$. 用黑盒子作图解,其构造过程如图1.7所示.

一个函数的输出作为另一个函数的输入,是数学及其所有应用中的一种典型情况,它反映了诸量之间的一种链式的联系. 下面给出复合函数的概念.

设f和g为两个函数,用

$$f\circ g(x)=f[g(x)]$$

定义一个新函数$f\circ g$,即f与g的**复合函数**,其定义域为

$$D(f\circ g)=\{x\,|\,x\in D(g),g(x)\in D(f)\}.$$

这个对应关系可用图 1.8 刻画.

$$t \longrightarrow \boxed{1} \longrightarrow h \longrightarrow \boxed{2} \longrightarrow d$$

图1.7

$$x \longrightarrow \boxed{g} \longrightarrow g(x) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(g(x))$$

图1.8

例 1.2.7　设 $f(x)=\dfrac{1}{x+1},\quad g(x)=x^2,$

则 g 的值域 $R(g)=[0,+\infty)$ 显然包含在 f 的定义域 $D(f)=\{x\mid x\neq -1\}$ 之中. 由 f 和 g 可以构造两个函数:

$$f\circ g(x)=\frac{1}{x^2+1},$$

$$g\circ f(x)=\left(\frac{1}{x+1}\right)^2=\frac{1}{x^2+2x+1}.$$

注意 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 是完全不同的函数. 因此, 函数的复合运算不是一种可交换的运算. □

例 1.2.8　设 $f(x)=\dfrac{1}{x+1},\quad g(x)=\dfrac{1}{x-1},\quad h(x)=x^2+1,$

则在满足函数复合的条件下

$$f\circ g(x)=\frac{1}{\dfrac{1}{x-1}+1}=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x},$$

$$g\circ h(x)=\frac{1}{x^2+1-1}=\frac{1}{x^2},$$

$$(f\circ g)\circ h(x)=1-\frac{1}{x^2+1},$$

$$f\circ(g\circ h)(x)=\frac{1}{1/x^2+1}=\frac{x^2}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}.$$

注意到 $(f\circ g)\circ h$ 和 $f\circ(g\circ h)$ 是相同的, 这并不是一种偶然的巧合. 实际上我们可以证明, 在一般情形, 下面的关系式是正确的,

$$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h),$$

也就是说, 对于三个能复合的函数来说, 复合运算具有**可结合性**. 复合关系可如图1.9所示.

$$x\rightarrow \boxed{\boxed{h}\rightarrow h(x)\rightarrow \boxed{g}} \rightarrow g[h(x)]\rightarrow \boxed{f} \rightarrow f\{g[h(x)]\}$$

$$x\rightarrow \boxed{h}\rightarrow h(x)\rightarrow \boxed{\boxed{g}\longrightarrow g[h(x)]\longrightarrow \boxed{f}} \rightarrow f\{g[h(x)]\}$$ □

图1.9

我们再给出一些例子.

例 1.2.9　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$　$g(x)=e^x$.

则
$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}1, & |g(x)|<1,\\ 0, & |g(x)|=1,\\ -1, & |g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0;\end{cases}$$
而
$$(g\circ f)(x)=e^{f(x)}=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ \dfrac{1}{e}, & |x|>1.\end{cases}$$
□

例 1.2.10　设 $f(x)=\sqrt{1-x}$, $g(x)=x^2+10$，则当 $x\leqslant 1$ 时，$g\circ f$ 有定义，且
$$(g\circ f)(x)=[f(x)]^2+10=1-x+10=11-x;$$
但 $f\circ g$ 没有定义. □

1.2.4　反函数

我们来考虑一个反问题：如果知道函数 f 的输出 y，能否确定输入 x？也就是说，在对应关系 $y=f(x)$ 中，是否可以由 y 求得 x？这种"倒推"或"倒转"一个函数的作用的问题，是有其实际背景的. 例如，在电路设计中，在产生某个输出的过程中输入可能被破坏. 我们往往需要确定产生这种输出的输入. 图 1.10 表示 f^{-1} 是 f 的逆的示意图.

设函数 $f:A\to B=R(f)$，如果 $\forall x_1、x_2\in A$，$x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是**可逆的**或**一对一的**. 对于一个可逆函数 f，定义一个函数 g 如下：
$$g:R(f)\to A，其中 x 由 f(x)=y 确定.$$
显然，$\forall y\in R(f)$，如上给出的 $x\in A$ 是唯一确定的. 这样定义的函数称为函数 f 的**反函数**(或**逆函数**)，记为
$$g=f^{-1}.$$

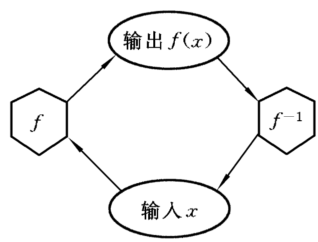


图 1.10

容易看出，函数 f 及其反函数 $g=f^{-1}$ 满足下述关系：
$$g(y)=x \Longleftrightarrow f(x)=y.$$
我们将这种对应关系用图 1.11 表示.

$$x\longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow y=f(x)\longrightarrow \boxed{g=f^{-1}} \longrightarrow x$$

图 1.11

由上述定义可知，若 f 可逆且其逆为 g，则 g 也可逆且其逆为 f. 此外，函数 f 和其反函数 g 的复合按任何次序都是**恒等函数**. 即有

$$(f\circ g)(y)=f[g(y)]=f(x)=y,\quad y\in B;$$
$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g(y)=x,\quad x\in A.$$

这表明$f\circ g$与$g\circ f$,或$f\circ f^{-1}$与$f^{-1}\circ f$分别是B与A上的恒等映射.

例 1.2.11　函数

(1) $y=ax+b\quad(a\neq 0)$;　　(2) $y=a^x\quad(a>0,a\neq 1)$;

(3) $y=\sin x,x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$;　　(4) $y=\sqrt[3]{x+1}$

的反函数分别是

$x=\dfrac{y-b}{a}$;　$x=\log_a y$;　$x=\arcsin y,y\in[-1,1]$;

$x=y^3-1$.

按照习惯记法,我们仍用x表示自变量,y表示因变量,则上述反函数写为

$y=\dfrac{x-b}{a}$;　$y=\log_a x$;

$y=\arcsin x,x\in[-1,1]$;　$y=x^3-1$.　□

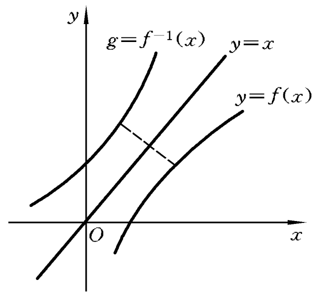


图1.12

函数$y=f(x)$与它的反函数$y=f^{-1}(x)$的图形在同一坐标平面上关于直线$y=x$对称,如图1.12所示.

1.2.5　多元函数的概念

如果映射f的值域$R(f)$是实数集,定义域$D(f)$是乘积集合:

$$D(f)=A_1\times A_2,\quad A_1\text{与}A_2\text{是实数集},$$

则称f是**依赖于两个实变量的实值函数**,简称为**二元函数**,常记作

$$f:A_1\times A_2\to R(f),\quad\text{或}\quad y=f(x_1,x_2).$$

类似地可以定义**三元函数**

$$f:A_1\times A_2\times A_3\to R(f),\quad\text{或}\quad y=f(x_1,x_2,x_3).$$

其中A_1、A_2与A_3均为实数集.

n **元函数**的定义为

$$f:A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\to R(f),\quad\text{或}\quad y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

其中$x_i\in A_i$,A_i为实数集($i=1,2,\cdots,n$).

例 1.2.12　$z=ax+by+c$与$z=x\arctan y+x^2y$都是二元函数,其中x,y均为实变量.　□

例 1.2.13　$u=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$是$n$元函数,其中$x_i\in\mathrm{R}(i=1,2,\cdots,n)$.　□

习　题　1.2

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 什么叫映射? 什么叫函数?

(2) 两个函数相同是什么意思?

(3) 复合函数与反函数是怎样定义的?

2. 若下列函数均视为 R→R的映射,试问这些函数是否相等?

(1) $f(x)=\tan^2 x-\sec^2 x$, $g(x)=-1$;　　(2) $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=|x|$;

(3) $f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{x+2}$, $g(x)=x+2$;　　(4) $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x(x-1)}$.

3. 设$f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$求$f[f(x)]$.

4. 设$f(x)=2x+3$, $g(x)=\lg x$,求

(1) $g[f(x)]$;　　(2) $f[g(x)]$;　　(3) $f[f(x)]$.

5. 设$f(x)=x^3+1$, $g(x)=\sqrt{x}$,求

(1) $g[f(x)]$;　　(2) $f[g(x)]$;　　(3) $f[f(x)]$;　　(4) $g(x+1)$.

6. 函数$y=[x]$,记号$[x]$表示不超过x的最大整数,例如当$x=2.5$时,$[2.5]=2$;当$x=2$时,$[2]=2$;当$x=-2.5$时,$[-2.5]=-3$,等等. 试画出这个函数的图形.

7. 求下列函数的反函数$x=\varphi(y)$和它的定义域:

(1) $y=3x+5\quad(-\infty<x<+\infty)$;　　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}\quad(x\neq-1)$;

(3) $y=\sqrt{1-x^2}$: (i)$(-1\leqslant x\leqslant 0)$; (ii)$(0\leqslant x\leqslant 1)$.

(4) $y=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & 4<x<+\infty.\end{cases}$

8. 下列函数中哪些是一对一的?

(1) $y=x^6+3x^2+2$, $x\geqslant 0$;　　(2) $y=\dfrac{x}{x+1}$, $x\neq-1$;　　(3) $y=x^2+x+1$, $-\infty<x<+\infty$.

(B)

1. 试选择f, g,使得$h(x)=f[g(x)]$. (存在非唯一解,注意不要选$f(x)=x$或$g(x)=x$.)

(1)$h(x)=x^3+1$;　　(2)$h(x)=\ln^3 x$.

2. 设$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求$f_n(x)=\underbrace{f\{[\cdots f(x)]\}}_{n次}$,并求定义域$D(f)$.

3. 如果f和g都是一对一的函数,那么$f\circ g$是否为一对一的? 为什么?

4. 设有映射$f:X\to Y$. 若$f(X)=Y$,则称f为**满射**. 若$\forall x_1, x_2\in X$,由$x_1\neq x_2$推得$f(x_1)\neq f(x_2)$,则称f为**单射**(即我们在前面所说的**可逆映射**或**一对一映射**). 如果f既是满射又是单射,则称f是**双射**,或**一一映射**. 今设$X=(-\infty,+\infty)$, $Y=[-1,1]$, $f(x)=\sin x$,则此时f是满射? 是单射? 若

要使$f:X\to Y$成为双射,应将X改成什么集合便可达此要求?

5. 设有映射$f:A\to Y$,$g:X\to Y$. 若$A\subset X$,并且$\forall x\in A$,都有$f(x)=g(x)$,则称f是g在A上的**限制**,或称g是f在X上的**延拓**,记为$f=g|_A$. 若令$f(x)=\sin(\arcsin x)$,$g(x)=x$,试讨论f与g在区间$[-1,1]$上的关系.

答案与提示

(A)

2. (1) 不相等; (2) 相等; (3) 不相等; (4) 不相等.

3. $f[f(x)]=\begin{cases}2+x & x<-1,\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}$

4. (1) $g[f(x)]=\lg(2x+3)$; (2) $f[g(x)]=3+2\lg x$; (3) $f[f(x)]=4x+9$.

5. (1) $g[f(x)]=\sqrt{x^3+1}\ (x\geqslant -1)$; (2) $f[g(x)]=1+x^{3/2}(x\geqslant 0)$;

(3) $f[f(x)]=1+(x^3+1)^3(-\infty<x<+\infty)$; (4) $g(x+1)=\sqrt{x+1}\ (x\geqslant -1)$.

7. (1) $x=\dfrac{y-5}{3},-\infty<y<+\infty$; (2) $x=\dfrac{1-y}{1+y},y\neq -1$;

(3) (i) $x=-\sqrt{1-y^2},0\leqslant y\leqslant 1$; (ii) $x=\sqrt{1-y^2},0\leqslant y\leqslant 1$.

(4) $x=\begin{cases}y, & -\infty<y<1,\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 16,\\ \log_2 y, & 16<y<+\infty.\end{cases}$

8. (1)和(2)是一对一的,(3)不是一对一的.

(B)

1. (1) $g(x)=x^3,f(g)=g+1$; (2) $g=\ln x,f(g)=g^3$.

2. $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}},D(f)=\mathbf{R}$

3. 是一对一的.

4. $f(x)=\sin x:(-\infty,+\infty)\to[-1,1]$是满射,非单射,若令$X=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,则$f:X\to Y$是双射.

5. $f(x)=g(x)|_{[-1,1]}$.

1.3 函数的几种特性与初等函数

1.3.1 函数的几种特性

(1) 有界性

设函数$f(x)$在区间I上定义,若存在常数M(或m)$\in\mathbf{R}$,$\forall x\in I$,有$f(x)\leqslant M$(或$f(x)\geqslant m$),则称函数$f(x)$在I上**有上(或下)界**,数M(或m)称为f在I上的一个**上(或下)界**. 如果f在I上既有上界又有下界,则称f是I上的**有界函数**,否则,称f是I上的**无界函数**.

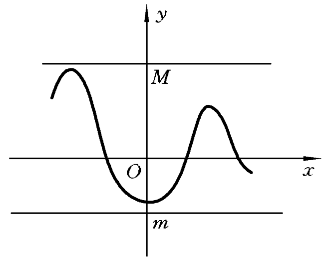


图1.13

显然，f 在 I 上有界等价于：$\exists K>0,\forall x\in I$，有 $|f(x)|\leqslant K$.

函数 f 在 I 上有界，从几何上看，就是它的图形(见图1.13)位于直线 $y=M$ 与 $y=m$ 之间.

(2) **单调性**

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上定义，如果 $\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称 $f(x)$ 为**严格单调递增**(或**严格单调递减**)函数. 严格单调递增函数和严格单调递减函数统称为**严格单调函数**. 如果 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称 f 为**单调递增**(或**单调递减**)函数. 单调递增函数和单调递减函数统称为**单调函数**.

(3) **奇偶性**

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上定义，I 关于原点对称(即 $x\in I\Leftrightarrow -x\in I$)，如果 $\forall x\in I$ 有 $f(x)=f(-x)$(或 $f(x)=-f(-x)$)，则称 $f(x)$ 是**偶函数**(或**奇函数**). 偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

(4) **周期性**

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上定义，若 $\exists T>0,\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是**周期函数**，T 为 $f(x)$ 的**周期**. 通常我们说的周期是指**最小正周期**.

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 是周期为 2π 的函数，即 $\sin(x+2\pi)=\sin x$.

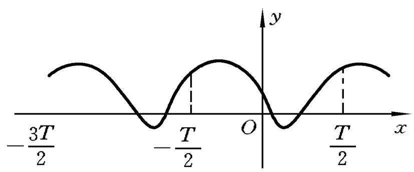


图1.14

不在整个数轴上定义的函数，也可以讨论它的周期性. 例如正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为数轴除去点 $x=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，同样可以讨论它的周期性. 因为 $\tan(x+\pi)=\tan x$，所以 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

由于周期函数的值每隔一个周期都是相同的，所以在画周期函数的图形时，只要作出一个周期的图形，然后周而复始地画这图形，即得整个周期函数的图形(见图1.14).

1.3.2　初等函数

在中学数学课程中我们已熟悉以下六种**基本初等函数**，在这里我们作一简单的回顾.

(1) **常数函数**　$y=C\quad(-\infty<x<+\infty)$.

其图形是过点 $(0,C)$ 且平行于 x 轴的直线(见图1.15).

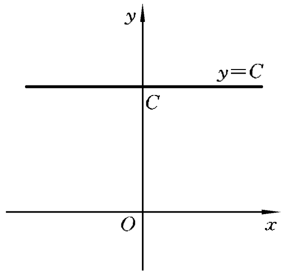


图1.15

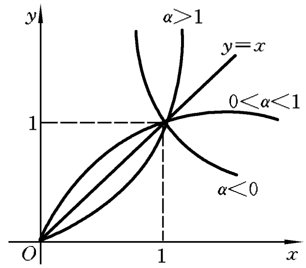


图1.16

(2) **幂函数** $y=x^{\alpha}$ $(0<x<+\infty,\alpha\neq 0)$.

$\alpha>0$ 时,函数 x^{α} 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增;$\alpha<0$ 时,函数 x^{α} 在 $(0,+\infty)$ 上严格递减. 函数 $y=x^{\alpha}$ 与 $y=x^{\frac{1}{\alpha}}$ 互为反函数(见图1.16).

(3) **指数函数** $y=a^{x}(a>0,a\neq 1,-\infty<x<+\infty)$.

$a>1$ 时,函数 a^{x} 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递增;$0<a<1$ 时,函数 a^{x} 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递减(见图1.17).

(4) **对数函数** $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1,0<x<+\infty)$.

$a>1$ 时,函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增;$0<a<1$ 时,函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递减. 函数 $y=a^{x}$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数(见图1.18).

(5) **三角函数**

正弦函数 $y=\sin x(-\infty<x<+\infty)$,见图1.19.

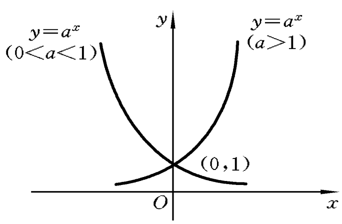


图1.17

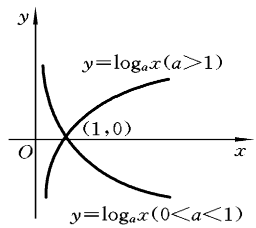


图1.18

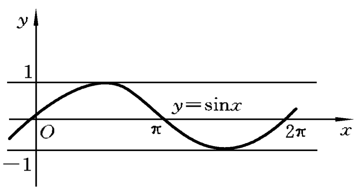


图1.19

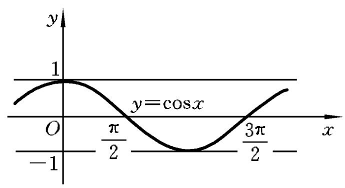


图1.20

余弦函数　$y=\cos x\ (-\infty<x<+\infty)$,见图1.20.

正切函数　$y=\tan x\ \left(x\neq\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$,见图1.21.

余切函数　$y=\cot x\ (x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,见图1.22.

三角函数不是可逆的,为了讨论反函数,我们必须取定一个严格单调分支,使得对于每个分支都有反函数存在.

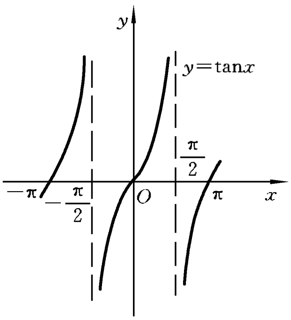


图1.21

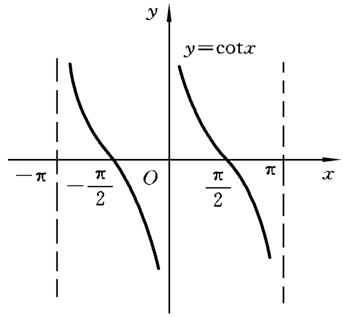


图1.22

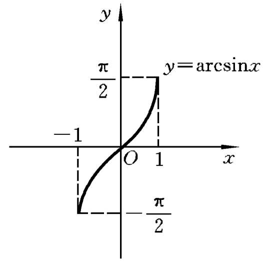


图1.23

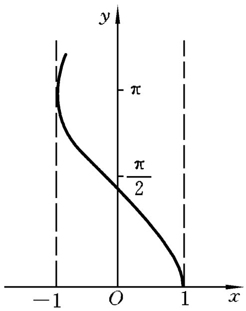


图1.24

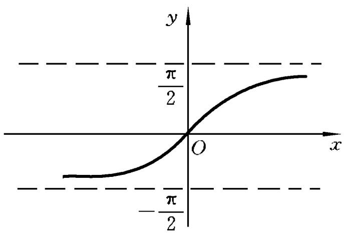


图1.25

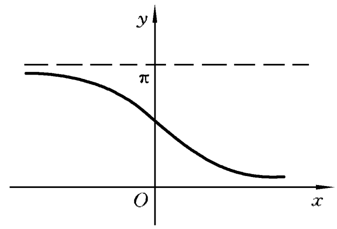


图1.26

(6) **反三角函数**

反正弦函数　$y=\arcsin x\quad\left(-1\leqslant x\leqslant1,-\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$,见图1.23.

反余弦函数　$y=\arccos x\quad(-1\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant\pi)$,见图1.24.

反正切函数　$y=\arctan x\quad\left(-\infty<x<+\infty,-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$,见图1.25.

反余切函数　$y=\operatorname{arccot} x\quad(-\infty<x<+\infty,0<y<\pi)$,见图1.26.

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为**初等函数**.本教材所讨论的函数绝大多数是初等函数.

最后我们介绍在工程技术中经常用到的两类初等函数:**双曲函数**和**反双曲函数**.

双曲正弦 $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

双曲余弦 $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

双曲正切 $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

以上三个函数的定义域都是$(-\infty,+\infty)$,它们的反函数分别是

反双曲正弦 $y=\operatorname{arsinh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\quad -\infty<x<+\infty$.

反双曲余弦 $y=\operatorname{arcosh}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),\quad x\geqslant 1$.

反双曲正切 $y=\operatorname{artanh}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x},\quad -1<x<1$.

以上函数的性态可通过指数函数及对数函数进行讨论,此处不作详细论述.

习　题　1.3

(A)

1. 回答下列问题:
   (1) 何谓单调函数、严格单调函数?
   (2) 一对一的函数有什么特征?
   (3) 奇函数与偶函数的图形各有什么特点?
   (4) 什么叫周期函数? 最小周期如何定义?
   (5) 有界函数的定义是怎样的? 函数的有界性在几何上如何解释?
2. 讨论下列函数的奇偶性:
   (1) $y=3x-x^3$;　(2) $y=2+3x-x^3$;　(3) $y=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}$;
   (4) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$;　(5) $y=\sqrt{x(2-x)}$;　(6) $y=2^{-x}$;
   (7) $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0;\end{cases}$　(8) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.
3. 研究下列函数的单调性:
   (1) $y=ax+b$;　(2) $y=ax^2+bx+c$;　(3) $y=x^3$;　(4) $y=a^x$.
4. 下列函数中哪些是周期函数? 对周期函数,指出其周期,并说明有无最小周期,有则求出来.
   (1) $y=\sin^2 x$;　(2) $y=\sin x^2$;　(3) $y=\cos(x-2)$;
   (4) $y=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$;　(5) $y=x-[x]$;　(6) $y=\tan|x|$.
5. 证明$f(x)=4-x^2$在区间$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内有界.
6. 画下列各函数的图像:
   (1) $y=ax+b$,分别取$a=1,b=2$及$a=-1,b=-1$;
   (2) $y=|x|$;　(3) $y=-|x-3|$;　(4) $y=a^x$,取$a=2,a=\dfrac{1}{2}$;

(5) $y=x^n$，取$n=-1$，$n=-2$；

(6) $y=A\sin x$，取$A=1,10,-2$.

7. 设$f(x)$的图像如图1.27所示，试写出其表达式，并作下列函数的图形：

(1) $y=f(-x)$；　(2) $y=-f(x)$；

(3) $y=|f(x)|$；　(4) $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$；

(5) $y=f(2x)$.

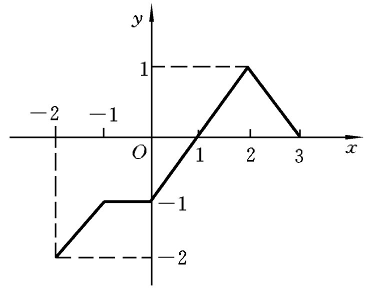


图1.27

8. 画出周期函数$y=|\sin x|$的图形.

9. 在1900年到1912年间，奥运会的撑杆跳高纪录的提高情况如下表所示：

年份	1900	1904	1908	1912
高度/cm	330	350	370	390

试给出高度与时间(以年为单位)的关系.

10. 三角形两边之长a，b一定，夹角θ不定. 试将三角形面积S用θ的函数写出来，并指出这个函数的定义域.

11. 脉冲发生器产生一个三角波，波形如图1.28所示，试求电压u对于时间t的函数$u(t)$.

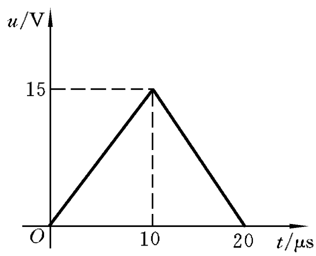


图1.28

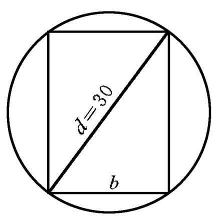


图1.29

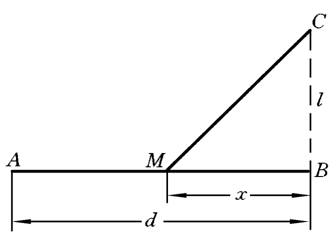


图1.30

12. 把直径为30 cm的木材，锯成横断面为矩形的房梁. 设矩形的宽是b，试将矩形面积A表为b的函数(见图1.29).

13. 人工开凿的直线运河经过相距d(km)的A、B两城(见图1.30). 在B城垂直于运河的方向上离B城l(km)处有一个工厂C. 从A城运货到工厂，先从水路到一地M，然后走陆路从M到C. 假设一吨货物每公里水路运费为α(元)，陆路运费为β(元)，求每吨总运费与MB之间的函数关系.

(B)

1. 证明：两个奇函数之积为偶函数，奇函数与偶函数之积为奇函数.
2. 证明：定义在数轴上的任一函数可以分解成奇函数与偶函数之和.
3. 设$f(x)$是周期为T $(T>0)$的周期函数，试证明$f(-x)$也是周期为T的周期函数.
4. 设$f(x)$，$g(x)$是定义于$(-\infty,+\infty)$上的单调函数，求证：$f[g(x)]$也是$(-\infty,+\infty)$上的单调函数.

5. 证明函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界.

6. 利用图形的相加法,作下列函数的图像:

(1) $y=1+x+e^x$; (2) $y=x+\sin x$.

7. 证明恒等式:

(1) $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$; (2) $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$.

8. 某药物注射到人体内,人体内血中的药浓度在前5分钟呈直线增长,后5分钟则呈指数衰减.试作出血中药浓度关于时间 t(分钟)的函数图像.

答案与提示

(A)

2. (1) 奇函数; (2) 非奇非偶; (3) 偶函数; (4) 偶函数;
(5) 非奇非偶; (6) 非奇非偶; (7) 奇函数; (8) 奇函数.

3. (1) $a>0$ 时为增函数,$a<0$ 时为减函数.

(2) $a>0$ 时,在 $-\infty<x<-\frac{b}{2a}$ 内 $f(x)\downarrow$;在 $-\frac{b}{2a}<x<+\infty$ 内 $f(x)\uparrow$.

$a<0$ 时,在 $-\infty<x<-\frac{b}{2a}$ 内 $f(x)\uparrow$;在 $-\frac{b}{2a}<x<+\infty$ 内 $f(x)\downarrow$.

(3) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内递增.

(4) $0<a<1$ 时,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内递减;$a>1$ 时,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内递增.

4. (1) $T=\pi$; (2) 非周期函数; (3) $T=2\pi$; (4) $T=\frac{2\pi}{\lambda}(\lambda>0)$; (5) $T=1$;
(6) 非周期函数.

9. $y=330+5t(0\leqslant t\leqslant 12)$.

10. $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta\left(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right)$.

11. $u(t)=\begin{cases}\frac{3}{2}t, & 0\leqslant t\leqslant 10,\\ -\frac{3}{2}t+30, & 10<t\leqslant 20.\end{cases}$ 当 $t\geqslant 20$ 时 $u=0$.

12. $A=b\sqrt{900-b^2}$.

13. $y=\alpha(d-x)+\beta\sqrt{x^2+l^2}$(元).

(B)

2. $f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$.

5. 提示:$\forall G>1$,取 $0<x_0<\frac{1}{G}$.

7. (1) 令 $\varphi=\arctan\frac{1}{2}$,$\psi=\arctan\frac{1}{3}$,计算 $\tan(\varphi+\psi)$. (2) 令 $\theta=\arcsin x$.

8. $y=\begin{cases}kx, & 0\leqslant x\leqslant 5,\\ e^{-\alpha x}. & 5<x\leqslant 10\end{cases}$ $(k>0,\alpha>0)$.

总 习 题 (1)

1. 试建立集合A与B之间的一一映射:

   (1) $A=(0,\pi)$, $B=(-\infty,+\infty)$;

   (2) $A=\{$全体自然数$\}$, $B=\{$全体正有理数$\}$.

2. 证明两个有理数$r_1,r_2(r_1<r_2)$之间必存在一个无理数.

3. 求下列函数y的定义域:

   (1) $f(x)=\cot(\pi x)+\arccos 2^x$, $y=f(x)$;

   (2) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $\varphi(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, $y=f[\varphi(x)]$;

   (3) $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ $g(x)=\ln x$, $y=f[g(x)]$;

   (4) $f(x)=e^{x^2}$, $f[y(x)]=1-x$, 且$y(x)\geqslant 0$.

4. 将函数$y=\dfrac{|x|-1}{|x+1|}$写成分段函数形式.

5. 设$f(x)=\dfrac{ae^x+be^{-x}}{a+b}$,求证:$f(2x)-f(-2x)=[f(x)]^2-[f(-x)]^2$.

6. 设$z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$,且$y=1$时有$z=x$,试求$f(x)$及$z$的表达式.

7. 设$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,求$f(x)$.

8. 求下列函数的反函数$f^{-1}(x)$:

   (1) $f(x)=(x^2+1)\operatorname{sgn}x$; (2) $y=1+\lg(x+2)$; (3) $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$.

9. 证明函数$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$在$(-\infty,+\infty)$上是有界函数.

10. 判定下列函数的奇偶性:

    (1) $f(x)=(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x$; (2) $f(x)=\begin{cases}-x^2+x, & x\geqslant 0,\\ x^2+x, & x<0.\end{cases}$

11. 设$x\neq 0$时,$f(x)$满足关系式$2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{a}{x}$,$a$为常数. 证明$f(x)$为奇函数.

12. 设$f(x)$定义于$(-\infty,+\infty)$,且恒有$f(x+l)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$,其中$l$为正实数. 求证$f(x)$是周期为$2l$的周期函数.

13. 若函数$f(x)$在其定义域上满足$f(x)=f(2a-x)$,则称函数图形对称于直线$x=a$. 试证:若$f(x)$的图形同时对称于直线$x=a$和$x=b(a\neq b)$,则$f(x)$为周期函数.

14. 设$\varphi(x)$、$\psi(x)$及$f(x)$均为$(-\infty,+\infty)$上的单调增加函数. 若$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$,试证必有
$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)].$$

15. 已知$y=f(x)$的图形,试作(1) $y=f(x+a)$的图形,a为常数;(2) $y=f(|x|)$的图形.

16. 试确定一最低次的多项式,使它当$x=\pm 1$,$x=\pm 2$时为0,而当$x=0$时为1.

17. 某化工厂有一球形容器,液体深度为h时,液面面积为A,试求A与h之间的函数关系.

18. 证明当$0<a<1$时,有

(1) $(1-a)^n\geqslant 1-na$;　(2) $(1-a)^n\leqslant\dfrac{1}{1+na}$;　(3) 若 $1-na>0$,则 $(1+a)^n\leqslant\dfrac{1}{1-na}$.

答案与提示

1. (1) $f:A\to B,x\to y=\cot x$.

(2) 将全体正有理数列成下表

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \cdots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \cdots \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

依箭头所示的柯西对角线法,略去重复出现的数,全体正有理数便可排成一列:$1,2,\frac{1}{2},\frac{1}{3},3,4,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\cdots$.

2. $r_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}(r_2-r_1)\in(r_1,r_2)$.

3. (1) $-(n+1)<x<-n\ (n=0,1,2,\cdots)$;　(2) $y=\dfrac{x^2-1}{2x^2}$,　$x\neq 0,\pm 1$;

(3) $y=\begin{cases}2\ln x, & 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e},\\ \ln^2 x, & \mathrm{e}<x\leqslant \mathrm{e}^2,\end{cases}$ 定义域为 $[1,\mathrm{e}^2]$;　(4) $y=\sqrt{\ln(1-x)}$,　$x\leqslant 0$.

4. $y=\begin{cases}1, & x<-1,\\ -1, & -1<x<0,\\ 1-\dfrac{2}{x+1}, & x\geqslant 0.\end{cases}$

6. $f(x)=x^3+3x^2+3x$,　$z=\sqrt{y}+x-1$.

7. $f(x)=x^2-2$.

8. (1) $y=\begin{cases}-\sqrt{-x-1}, & x<-1,\\ 0, & x=0,\\ \sqrt{x-1}, & x>1;\end{cases}$　(2) $y=10^{x-1}-2$;　(3) $y=\dfrac{1}{2}(a^x-a^{-x})$.

10. (1) 偶函数;　(2) 奇函数;

11. 令 $\dfrac{1}{x}$ 代替式中的 x.

12. 利用 $f(x)=f(x-l+l)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x-l)-f^2(x-l)}\geqslant\dfrac{1}{2}$.

13. 证明 $f[x+2(a-b)]=f(x)$.

16. $y=\dfrac{1}{4}(x^2-1)(x^2-4)$.

17. $A=\pi h(2R-h)$.

18. (1) 利用伯努利不等式,令 $x=-a$;　(2) 注意 $\dfrac{1}{1+na}\geqslant\dfrac{1}{(1+a)^n}=\dfrac{(1-a)^n}{(1-a^2)^n}$.

第 2 章　极限与连续

本章介绍函数极限和数列极限的概念和性质. 高等数学的方法是建立在无限观念上的. 例如仅知矩形的面积与周长的公式,要求圆的面积和周长,那么用有限次的代数运算是无法求得其准确值的,必须通过无限次的逼近,即极限方法,才能求出它的准确值. 极限概念是微积分的最基本概念,微积分的其他基本概念如连续函数、导数和定积分等都是通过极限概念来描述的. 因此理解极限概念、掌握极限方法,是能否学好高等数学的关键.

2.1　函数极限的概念

根据自变量的不同变化状态,本节将分成几种情况给出函数极限的定义.

2.1.1　自变量趋于有限值时函数的极限

假设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个空心邻域 $O_0(x_0)$ 内有定义(在 x_0 点是否有定义无关紧要),我们要考察当 x 充分靠近 x_0(但始终不等于 x_0)时,相应的函数值 $f(x)$ 的变化趋势,即考察它是否无限地接近某常数. 先看几个例子.

例 2.1.1　设 $f(x)=3x^2+1$. 容易看到 $x\approx 2(x\neq 2)$ 时, $f(x)\approx 13$. 但是,要说明当 x 无限接近 2 时, $f(x)$ 便无限接近于 13,还得弄清“接近”的数学含义. 显然, x 与 2 的接近程度可由 $|x-2|$ 的值来表示, $f(x)$ 与 13 接近的程度可由 $|f(x)-13|$ 来表示. 注意到

$$|f(x)-13|=3|x+2||x-2|\leqslant 3(|x-2|+4)|x-2|,$$

便知:

$\|x-2\|$	<0.1	<0.01	<0.001	…
$\|f(x)-13\|$	<1.23	<0.1203	<0.012003	…

于是我们说,当自变量 x 趋于 2 时,函数值 $f(x)$ 趋于 13,或说, $x\to 2$ 时, $f(x)$ 的极限是 13. 记作

$$\lim_{x\to 2} f(x)=13,$$

这里记号“→”读作“趋于”. □

例 2.1.2　设 $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$,讨论 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的变化趋势.

解　f 的定义域是除 $x=0$ 以外的所有实数. 其图像如图 2.1 所示. 当 $x>0$, $x\to 0$

时,$f(x)\to 1$;当 $x<0$,$x\to 0$ 时,$f(x)\to -1$. 但是,当 x 在 0 的附近时(注意,这时 x 可取正值也可取负值),$f(x)$并不接近某个特殊的常数,因此它的变化趋势是无法确定的. 这时我们说极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$ 不存在. 但是,若 $a\neq 0$,则极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{|x|}$ 是存在的. 因为当 $a>0$ 时,这个极限是 1;当 $a<0$ 时,这个极限是 -1. 因此,对于一切非零的数 a,极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在. □

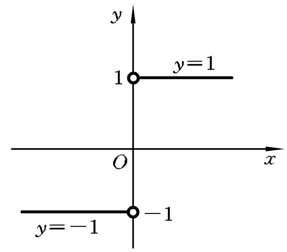


图 2.1

一般地,当 $x\to a$ 时 $f(x)\to A$,记作

$$\lim_{x\to a}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to a).$$

注意,**极限 A 与 $f(a)$ 毫无关系**,A 的存在与否及大小与 $f(a)$ 的大小甚至 $f(a)$ 有无定义都无关系. A 仅体现函数 $f(x)$ 在点 a 附近的局部性态(除去 a 点!).

在上面,我们对于函数极限用了如下一些描述性的语言:“x 趋于 a”,“$f(x)$ 趋于某个数 A”等等. 这些说法确实有助于我们直观地理解极限的含意,但作为定义是不精确的.

在微积分发展的早期,这些描述性的非正式定义是够用了的. 从莱布尼兹(Leibniz)和牛顿(Newton)(在 17 世纪)到伯努利(Bernoulli)、欧拉(Euler)和高斯(Gauss)(在 18 世纪及 19 世纪初),都是这样定义极限的. 但是,到了 19 世纪中叶,面对更加复杂的函数以及更加困难的定理,数学家们不再仅仅依赖于直观. 他们认识到,要想了解一个函数的性态,光是看一看函数的图像是远远不够的.

在 1841－1856 年间,魏尔斯特拉斯(Weierstrass)在分析严密化方面做了许多工作,提出了一种定义极限的严格的方式. 1859 年他到柏林(Berlin)大学任教后(他原先是一位中学教师),把他关于极限的精确定义传播开来,并由纯粹及应用数学家们传遍全世界. 如今,大学生的微积分课程也都采用魏尔斯特拉斯关于极限的精确定义.

下面我们给出极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 的精确定义.

定义 2.1.1(**函数极限**) 设 $f(x)$ 定义于点 a 的某个空心邻域 $O_0(a)$,A 为某定数. 如果 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使得 $\forall x:0<|x-a|<\delta$,都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 $x\to a$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限,记作

$$\lim_{x\to a}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to a).$$

定义中 $0<|x-a|<\delta$ 表示 x 在 a 的 δ 邻域中,但 $x\neq a$;也就是说,x 在 a 的空心邻域中. 在这里 δ 刻画 x 趋于 a 的程度,它依赖于预先给定的正数 ε. 一般地,当 ε 减小时,δ 也相应地减小. ε 和 δ 通常都是比较小的. 图 2.2 给出了精确定义的几何解释. 具体地说,任给正数 ε,作平行于 x 轴的两条直线 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$,这两条直线构成一个宽度为 2ε 的横条区域. 由定义,对于事先任意给定的 $\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使得当 x 位于空心

邻域$\mathring{O}(a,\delta)$内时，$y=f(x)$的图形上相应的点都落在上述的横条区域内.

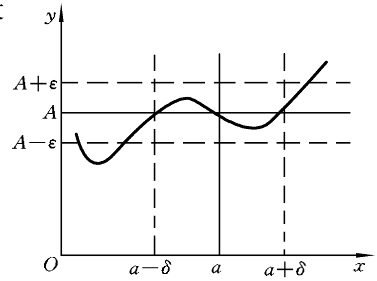


图2.2

例2.1.3　利用极限的精确定义证明$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$.

证　这里$a=0,A=0$. $\forall\varepsilon>0$，由于

$$|f(x)-A|=|x^2|=|x|^2,$$

为了使$|f(x)-A|<\varepsilon$，只要

$$|x|<\sqrt{\varepsilon}.$$

因此，取$\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当$x$适合不等式

$$0<|x|<\delta$$

时，就有

$$|f(x)-A|=|x|^2<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}x^2=0.$$

□

例2.1.4　利用极限的精确定义证明$\lim\limits_{x\to 2}(3x+9)=15$.

证　这里$a=2,A=15$. $\forall\varepsilon>0$，要使

$$|f(x)-A|=|(3x+9)-15|=3|x-2|<\varepsilon,$$

只要

$$|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因此，取$\delta=\frac{\varepsilon}{3}$，则当$0<|x-2|<\delta$时，有

$$|f(x)-15|<\varepsilon,$$

从而

$$\lim_{x\to 2}(3x+9)=15.$$

□

例2.1.5　利用极限的精确定义证明$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$.

证　$\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon,$$

只要

$$|x+1-2|=|x-1|<\varepsilon.$$

因此，取$\delta=\varepsilon$，则当$0<|x-1|<\delta$时，就有

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

□

例2.1.6　利用极限的精确定义证明$\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\ (a>0)$.

证　$\forall\varepsilon>0$，要使

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon,$$

因为

$$\left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{a}}|x-a|,$$

所以，只要$\frac{1}{\sqrt{a}}|x-a|<\varepsilon$即可. 取$\delta=\sqrt{a}\,\varepsilon$，则当$0<|x-a|<\delta$时，就有

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon.$$

即
$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}.$$
□

例 2.1.7 利用极限的精确定义证明$\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{x}=\frac{1}{a}(a\neq 0)$.

证
$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=\left|\frac{x-a}{xa}\right|,$$

由于分母有 x,为了防止 x 接近原点,我们要设法限制 x,使得 $|x|$有一个正的下界.由于 $x\to a$,故我们可以考虑 x 满足不等式

$$|x-a|<\frac{|a|}{2},$$

由此得
$$|x|>|a|-\frac{|a|}{2}=\frac{|a|}{2}.$$

$\forall\varepsilon>0$,要使$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=\left|\frac{x-a}{xa}\right|<\frac{2|x-a|}{|a|^2}<\varepsilon$,

取$\delta=\min\left(\frac{|a|}{2},\frac{|a|^2}{2}\varepsilon\right)$,则当$0<|x-a|<\delta$时,就有

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|<\varepsilon,$$

所以
$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x}=\frac{1}{a}.$$
□

例 2.1.8 证明 $\lim\limits_{x\to 1}2x=3$ 是错误的.

证 由于
$$|2x-3|=|2(x-1)-1|\geqslant 1-2|x-1|,$$

对于$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$,无论$\delta$取得多么小,不妨设$0<\delta<\frac{1}{4}$,取$x_0=1-\frac{\delta}{2}$时,有$0<|x_0-1|<\delta$,且

$$|2x_0-3|\geqslant 1-2|x_0-1|>1-2\delta>\frac{1}{2}.$$

因此
$$\lim_{x\to 1}2x\neq 3.$$

这个事实由图2.3可以看得很清楚:在$x=1$的附近,函数$y=2x$的值与$y=3$有较大的偏离. □

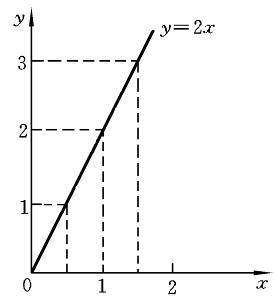


图2.3

2.1.2 单侧极限

例2.1.2中函数$f(x)=\frac{x}{|x|}$在$x=0$附近的性态是值得注意的.虽然按照定义2.1.1,极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$不存在,但是当$x$从0的左侧趋于0时,$f(x)\to -1$.由此我们可以引进**单侧极限**的概念.

定义 2.1.2(**左**、**右极限**) 设 $f(x)$在点a的某个右邻域$O^+(a)$内有定义.A 为某

定数.如果 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$,使得 $\forall x: 0<x-a<\delta$,都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 是 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时的**右极限**,记作:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to a^+).$$

类似地,可以定义 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时的**左极限**,记作:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to a^-).$$

在例2.1.2中我们看到

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=1,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=-1.$$

今后为方便起见,我们引进下列较简明的记号:若下列极限存在,则记

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a^-),\quad \lim_{x\to a^+} f(x)=f(a^+).$$

不难证明极限与单侧极限的关系:

$$\lim_{x\to a} f(x)\textbf{存在}\Leftrightarrow f(a^-)\textbf{与}f(a^+)\textbf{存在且相等}.$$

例2.1.9　研究函数

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0 \end{cases}$$

在 $x\to 0$ 时的极限.

解　仿照例2.1.2可证明

$$f(0^-)=-1,\quad f(0^+)=1.$$

因为左、右极限不相等,故极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在. □

2.1.3　自变量无限增大时函数的极限

有时我们需要考察 $x\to\infty$ 时,即 $|x|$ 无限增大时,函数 $f(x)$ 的变化趋势;或者 $x\to+\infty$ 时,即 $x>0$ 且 x 无限增大时,以及 $x\to-\infty$ 时,即 $x<0$ 且 $-x$ 无限增大时,函数 $f(x)$ 的变化趋势.读者不难从函数图像中观察出下列极限:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}e^x=0,\ \lim_{x\to+\infty}e^{1/x}=e^0=1.$$

一般地,若当 $x\to\infty$ 时, $f(x)$ 趋于某个确定的数 A,则记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.类似地可定义 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

下面给出极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的精确定义.

定义2.1.3　设函数 $f(x)$ 对于 $|x|$ 充分大的一切 x 有定义, A 为常数.如果 $\forall \varepsilon>0$, $\exists X>0$,使得 $\forall x: |x|>X$,都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

则称 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限是 A，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

图 2.4 给出了这个定义的几何意义：正数 ε 是事先任意给定的，而 X 则与 ε 有关，当 $|x|>X$ 时，曲线 $y=f(x)$ 完全落在直线 $y=A-\varepsilon$ 与 $y=A+\varepsilon$ 所夹横条区域之内.

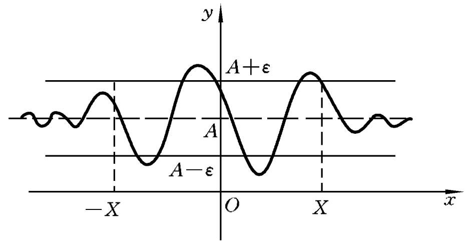


图2.4

类似可给出 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 的精确定义. 读者可以证明：

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\text{存在}\Leftrightarrow f(-\infty)\text{与}f(+\infty)\text{存在且相等},$$

其中 $f(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$，$f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

例 2.1.10　利用极限的精确定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$.

证　函数 $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$ 对一切 $|x|>0$ 有定义. $\forall\varepsilon>0$，要想

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right|<\varepsilon \quad 即 \quad \left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon,$$

只要

$$|x|>\frac{1}{\varepsilon}.$$

取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}>0$，$\forall x$：$|x|>X$，就有 $\left|\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-1\right|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1. \qquad \square$$

利用极限的精确定义，我们还可以证明某些函数极限不存在. 请看下例.

例 2.1.11　证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x=0$ 是错误的.

证　要证明对于某个 $\varepsilon_0>0$，找不到这样的 $X>0$，使当 $|x|>X$ 时，有 $|\sin x-0|<\varepsilon_0$.

我们知道 $\sin\dfrac{\pi}{2}=1$，并且对任意整数 n，有 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1$，这意味着存在绝对值任意大的 x，使得 $\sin x=1$. 例如，我们取 $\varepsilon_0=0.8$，则对于任意大的正数 X'，总可找到一个数 $x_0>X'$，使得 $\sin x_0=1$，于是有 $|\sin x_0-0|=1>0.8$. 因此，对于 $\varepsilon_0=0.8$，找不到定义中所要求的正数 X. 这就证明等式 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x=0$ 是不对的. $\square$

2.1.4　函数值趋于无穷的情形

在函数极限不存在的情况中，有一种情况特别值得注意. 先观察下面的例子：在 $x\to0$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的绝对值 $\left|\dfrac{1}{x}\right|$ 可以无限地增大；而 $x\to+\infty$ 时，函数 $g(x)=\mathrm{e}^{x}$

的值大于零且可无限地增大.这时,虽然函数极限不存在,但函数有确定的变化趋势,即 $|f(x)|$无限增大.于是我们有下面的定义.

定义2.1.4　设$f(x)$在$O_0(a)$上定义.若$\forall G>0$,$\exists\delta>0$,使得$\forall x$:$0<|x-a|<\delta$,都有

$$|f(x)|>G,$$

则称$x\to a$时,函数$f(x)$的**极限为无穷大**,记作:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty \quad 或 \quad f(x)\to\infty\ (x\to a).$$

仿此,记号$\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$定义为:$\forall G>0$,$\exists\delta>0$,当$0<|x-a|<\delta$时,有$f(x)>G$;

记号$\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$定义为:$\forall G>0$,$\exists\delta>0$,当$0<|x-a|<\delta$时,有$f(x)<-G$;

而记号$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$定义为:$\forall G>0$,$\exists X>0$,当$|x|>X$时,有$|f(x)|>G$.

图2.5给出了$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$的几何意义:$G$是事先任给的正数,而$X$是根据$G$找到的一个正数,当$|x|>X$时,$y=f(x)$的图形上的点全都落在两条直线$y=G$与$y=-G$所夹横条区域之外.

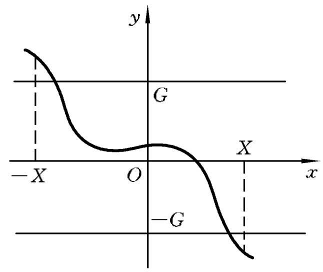


图2.5

例2.1.12　试用极限的精确定义证明$\lim\limits_{x\to\infty}3x=\infty$.

证　设G是任意给定一个正数,我们要证明存在一个正数X,使当$|x|>X$时,有$|3x|>G$.显然,不等式$|3x|>G$等价于$|x|>\dfrac{G}{3}$.所以取$X=G/3$,当$|x|>X$时,有$|3x|>G$,即

$$\lim_{x\to\infty}3x=\infty. \qquad \Box$$

在这个例子中,$X=G/3$给出了对G求X的一个公式.例如,若$G=3\,000$,则$X=1\,000$即可.事实上,比$1\,000$更大的X也是适合的.比方说$|x|>1\,100$时,仍有$|3x|>3\,000$.因此,对于给定的G,只要找到一个X满足定义中的不等式,则必有任意多个充分大的X也满足要求.

例2.1.13　利用极限的精确定义证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{2}+\sin x\right)=+\infty$.

证　$\forall G>0$,由于$\sin x\geqslant-1$对一切x成立,故只要令$x>2(G+1)$就有

$$\frac{x}{2}+\sin x>G.$$

因此,取$X=2(G+1)$,$\forall x>X$,有$\dfrac{x}{2}+\sin x>G$,于是

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2}+\sin x\right)=+\infty. \qquad \Box$$

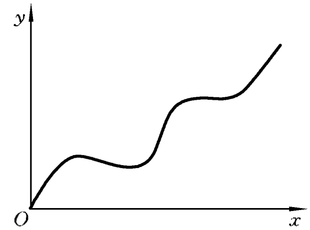


图2.6

例2.1.13中的函数的图像如图2.6所示.这个函数不是单调增加的,但当x充分大之后,$f(x)$的值无限增大.

习　题　2.1

(A)

1. 回答下列问题:

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在与否,与$f(a)$存在与否有关吗?为什么?

(2) $f(x)$在a处的极限存在与$x\to a$的方式有无关系?

(3) $f(x)$在a处的极限与$f(x)$在a点的左、右极限有何关系?

(4) 在$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$的精确定义中,$\delta$与$\varepsilon$有何关系?

(5) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$的精确定义的几何意义是什么?

(6) 下列说法是否可作为$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$的等价定义.

(i) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使当$0<|x-a|<\delta$时,有$|f(x)-A|\leqslant\varepsilon$.

(ii) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使当$0<|x-a|<\delta$时,有$|f(x)-A|<k\varepsilon$,其中$k$为某个正的常数.

(7) 在$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$的精确定义中,$X$是否依赖于$G$?

(8) 在$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$的精确定义中,$X$是否依赖于$\varepsilon$?

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$与$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$的精确定义在几何上有什么解释?

2. 根据函数图像,判断所给的极限是否存在,若存在则求出其值.

(1) (见图2.7) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\lim\limits_{x\to1}f(x),\lim\limits_{x\to2^-}f(x),\lim\limits_{x\to2^+}f(x)$;

(2) (见图2.8) $\lim\limits_{x\to1}f(x),\lim\limits_{x\to2}f(x),\lim\limits_{x\to3}f(x),\lim\limits_{x\to4^-}f(x)$;

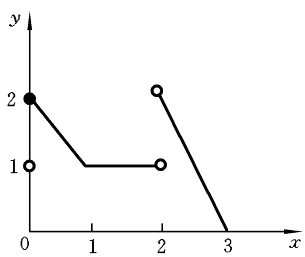


图2.7

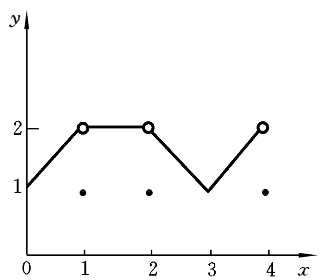


图2.8

(3) $\lim\limits_{x\to1^+}[x],\lim\limits_{x\to1^-}[x],\lim\limits_{x\to1}[x]$;

(4) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ 3-x, & 1<x\leqslant2,\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to1^-}f(x),\lim\limits_{x\to1^+}f(x),\lim\limits_{x\to1}f(x)$;

(5) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant1,\\ \dfrac{2}{x}, & x>1,\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to1^-}f(x),\lim\limits_{x\to1^+}f(x),\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

3. 给出下列极限的精确定义：

(1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=A$；　(2) $\lim\limits_{x\to1^+}(3x+5)=8$；　(3) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，e为实数；

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$；　(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$；　(6) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

4. 给出一个数δ，使得当$0<|x-2|<\delta$时，有$|x^2-4|<1$.

5. 证明：若$0<\delta<1$且$|x-3|<\delta$，则$|x^2-9|<7\delta$. 并进一步证明$\lim\limits_{x\to3}x^2=9$.

6. 证明：若$0<\delta<1$，且$|x-4|<\delta$，则$|\sqrt{x}-2|<\dfrac{\delta}{\sqrt{3}+2}$. 并进一步证明$\lim\limits_{x\to4}\sqrt{x}=2$.

7. 试用极限的精确定义证明下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to3}(x^2+5x)=24$；　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$；　(4) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2x}{x^2-4}=+\infty$.

8. 证明：$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在的充要条件是$f(a^-)$与$f(a^+)$存在且相等.

9. 证明：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在的充要条件是$f(-\infty)$与$f(+\infty)$存在且相等.

10. 证明：由$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$能推出$\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$，但反之不然.

(B)

1. 试利用计算机或计算器，观察函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$在$x=0.1,0.01,0.001,\cdots$时的取值情况，并作出极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$存在与否的猜测.

2. 用极限的精确定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$；　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x+100\cos x)=+\infty$；　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-100)=\infty$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$；　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}=1$.

3. 证明$\lim\limits_{x\to2}3x=5$是错误的. 为此，必须说明对某一个正数ε，找不到所要求的δ符合定义(提示：可画图观察).

4. 利用$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$的精确定义证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=+\infty$是错误的.

5. 利用$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$的精确定义证明$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x=\dfrac{1}{2}$是错误的.

答案与提示

(A)

2. (1) 2,1,1,2；　(2) 2,2,1,2；　(3) 1,0,不存在；　(4) 1,2,不存在；　(5) 1,2,不存在.

3. (1) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x:0<|x|<\delta$，有$|f(x)-A|<\varepsilon$；

(2) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x:0<1-x<\delta$，有$|(3x+5)-8|<\varepsilon$；

(3) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x:0<|x|<\delta$，有$|(1+x)^{\frac{1}{x}}-e|<\varepsilon$；

(4) $\forall G>0,\exists X>0,\forall x:x>X$,有$f(x)>G$;

(5) $\forall G>0,\exists X>0,\forall x:x>X$,有$f(x)<-G$;

(6) $\forall G>0,\exists X>0,\forall x:x<-X$,有$|f(x)|>G$;

(7) $\forall \varepsilon>0,\exists X>0,\forall x:|x|>X$,有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

4. $\delta=\min\left\{1,\frac{1}{5}\right\}=\frac{1}{5}$.

5. 注意到此时有$|x+3|<7$.

6. 注意到此时有$x>3$,从而$\sqrt{x}>\sqrt{3}$.

7. (1) 利用不等式$|x^2+5x-24|=|x+8||x-3|<12|x-3|$;

(3) 考虑$\left|\frac{x^2+2}{3x^2}-\frac{1}{3}\right|=\frac{2}{3x^2}$.

10. 利用不等式$||f(x)|-|A||\leqslant|f(x)-A|$.

(B)

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

2. (3) $\forall G>0$,取$X=\frac{1}{4}(100+G)$; (4) $\forall G>0$,取$X=\max\left\{\frac{100+G}{2},\left|\frac{100-G}{2}\right|\right\}$;

(5) $\forall \varepsilon>0$,取$X=\frac{1}{\varepsilon}$; (6) $\forall \varepsilon>0$,取$X=\frac{1}{\varepsilon}$.

3. 对$\varepsilon=\frac{1}{2}$,$\forall \delta>0$,取$x_0=2+\frac{\delta}{3}$,则$0<|x-2|<\delta$,但是$|3x_0-5|>\frac{1}{2}$.

4. 对$G=1$,$\forall X>0$,总可找到一个$x_0>X$,使$\frac{x_0}{x_0+1}<1$.

5. 对$\varepsilon=0.4$,$\forall X$,总可找到一个$x_0>X$,使得$\left|\sin x_0-\frac{1}{2}\right|=0.5>0.4$. 只要取$x_0=\frac{\pi}{2}+2n\pi$,$n$足够大.

2.2 数列极限的概念

2.2.1 基本概念

我们曾在第1章1.2.1中提到过一个特殊的函数

$$f:\mathrm{N}\to\mathrm{R},$$

即f定义在自然数集N上,取值为实数. 这样一个函数实际上就是一个**数列**:

$$x_1=f(1),x_2=f(2),\cdots,x_n=f(n),\cdots.$$

简记为$\{x_n\}$. 当$n\to+\infty$时,数列$x_n=f(n)\to a$,记作

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=a.$$

为简单计,今后在讨论数列极限时,我们只写$n\to\infty$,而略去“+”,这不会引起混淆.

根据上节的定义2.1.3,我们给出数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的精确定义.

定义2.2.1(**数列极限**) 设给定数列$\{x_n\}$,若存在实数a,对$\forall\varepsilon>0$,$\exists$正整数N,

使得对 $\forall n > N$，有

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

则称 a 为**数列** $\{x_n\}$ **的极限**，或称**数列** $\{x_n\}$ **收敛于** a，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a(n\to\infty).$$

对于存在极限的数列，称为**收敛数列**. 否则称为**发散数列**.

例 2.2.1　设 $x_n = \dfrac{1}{n}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

证　$\forall \varepsilon > 0$，取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$（方括号表示取最大整数部分），则当 $n > N$ 时，有

$$|x_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \qquad \square$$

例 2.2.2　证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0(0 < q < 1)$.

证　$\forall \varepsilon > 0$，不妨设 $\varepsilon < 1$. 要使

$$|q|^n = q^n < \varepsilon,$$

只要

$$n\log q < \log\varepsilon, \quad n > \frac{\log\varepsilon}{\log q}.$$

因此，取 $N = \left[\dfrac{\log\varepsilon}{\log q}\right]$，则当 $n > N$ 时，就有

$$|q|^n < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0. \qquad \square$$

例 2.2.3　证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 - 1}{2n^2 - 7n} = 1$.

证　由于 $n > 7$ 时，有

$$\left|\frac{2n^2 - 1}{2n^2 - 7n} - 1\right| < \frac{7}{n},$$

故对 $\forall \varepsilon > 0$，只要取 $N = \max\left\{7, \left[\dfrac{7}{\varepsilon}\right]\right\}$，则当 $n > N$ 时，便有

$$\left|\frac{2n^2 - 1}{2n^2 - 7n} - 1\right| < \varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 1}{2n^2 - 7n} = 1. \qquad \square$$

例 2.2.4　证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1(a > 1)$.

证　$\forall \varepsilon > 0$，要使

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon,$$

只要

$$\sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon, \quad \frac{1}{n}\ln a < \ln(1+\varepsilon), \quad n > \frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}.$$

取 $N = \left[\dfrac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right]$，则当 $n > N$ 时，就有

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon.$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$ □

根据上节的定义2.1.4,对数列可类似定义下列极限:
$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}x_n=-\infty,\quad \lim_{n\to\infty}x_n=\infty.$$
例如,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ 的定义是:$\forall G>0$,$\exists$ 正整数N,使得$\forall n>N$,有 $|x_n|>G$.

2.2.2 数列极限与函数极限的关系

定理2.2.1 设函数$f(x)$定义在x_0的某个空心邻域$O_0(x_0)$上,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 成立的充分必要条件是:对于$O_0(x_0)$内的任一数列$\{x_n\}$,$x_n\neq x_0(n=1,2,\cdots)$,当$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$时都有
$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

证 必要性.设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$.如果数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,且每个$x_n\neq x_0$,那么对上述$\delta$,就存在正整数$N$,使得当$n>N$ 时有$0<|x_n-x_0|<\delta$,因此有
$$|f(x_n)-A|<\varepsilon\quad(n>N).$$
这就证明了
$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

充分性.假设对于每一个满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$且每个$x_n\neq x_0$的数列$\{x_n\}$都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$,我们要证必有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.如若不然,即若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 不成立,则会有某个$\varepsilon_0>0$,使得对于每一个$\delta>0$,都有一个x'满足
$$0<|x'-x_0|<\delta\quad 但\quad |f(x')-A|\geqslant\varepsilon_0.$$
特别是对每个n,都存在一个数x_n,使得
$$0<|x_n-x_0|<\frac{1}{n}\quad 但\quad |f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0.$$
数列$\{x_n\}$显然收敛到x_0,但因
$$|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0\quad(\forall n),$$
所以数列$\{f(x_n)\}$不收敛到A.这与假设矛盾,因此$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 必成立. □

上述定理给出了数列极限与函数极限的联系.利用这种关系,今后我们将很容易沟通函数极限与数列极限的相关结果.

习　题　2.2

(A)

1. 回答下列问题:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义是什么?

(2) 由数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的精确定义可知,在区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$外面,至多含有数列$\{x_n\}$中的多少项?

(3) 下列说法是否可作为"数列$\{x_n\}$以a为极限"的定义?

(i) $\forall\varepsilon>0$,$\exists$正整数N,当$n>N$时,$|x_n-a|\leqslant\varepsilon$.

(ii) $\forall\varepsilon>0$,$\exists$正整数N,当$n>N$时,$|x_n-a|<k\varepsilon$,其中$k>1$为常数.

(iii) $\exists$正整数N,$\forall\varepsilon>0$,当$n>N$时,$|x_n-a|<\varepsilon$.

(4) 数列极限与函数极限有什么关系?

2. 利用数列极限的精确定义(定义2.2.1),证明下列数列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})=0$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$;　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{5n+1}=\dfrac{3}{5}$.

3. 试给出下列极限的精确定义:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$.

4. 证明:由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$能推出$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$,但反之不然.

5. 叙述数列$\{x_n\}$有界的定义(参看第1章1.3).若数列$\{x_n\}$有界,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,试证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

(B)

1. 利用定义证明下列数列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-1}{n^2+1}=\infty$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\dfrac{\pi}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}=\dfrac{1}{2}$;　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0\quad(a>1)$.

2. 下列做法是否改变数列的敛散性?

(1) 任意改变有限项;　(2) 各项同取绝对值;

(3) 各项乘以同一常数k.

3. 在数列极限的定义中,对于N请回答:

(1) N是否唯一?　(2) N是否是ε的函数?

(3) 前N项是否有$|x_n-a|\geqslant\varepsilon$?

4. 下面$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$的证明是否正确?

$\forall\varepsilon>0$,要使$\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$,只要$\dfrac{1}{n}\ln n<\ln(1+\varepsilon)$,只要

$$\frac{1}{n}<\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln n}\leqslant\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln 2},$$

取$N=\left[\dfrac{\ln 2}{\ln(1+\varepsilon)}\right]$,则当$n>N$时,有

$$1-\varepsilon<1<\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

如果你认为上述证明是错误的,那么你能否给出一个正确的证明?

答案与提示

(A)

1. (3) (i)与(ii)可以,但(iii)不行.
4. 利用不等式 $||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|$.
5. $\{x_n\}$有界是指 $\exists M>0,\forall n$,有 $|x_n|\leqslant M$.

(B)

1. (4) 利用$\dfrac{a^n}{n!}=\dfrac{a}{1}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a}{[a]}\cdot\dfrac{a}{[a]+1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a}{n}<\dfrac{a^{[a]}}{[a]!}\cdot\dfrac{a}{n}$.
2. (1) 不改变; (2) 由$\{x_n\}$收敛可得$\{|x_n|\}$收敛,但若$\{x_n\}$发散,则$\{|x_n|\}$却有可能收敛,例如$x_n=(-1)^n(n=1,2,\cdots)$.
3. (1) N 不唯一; (2) N 与ε有关,但不能说N 是ε的函数; (3) 不一定.
4. 所给的证法不正确.

2.3　极限的运算法则

本节介绍极限的运算法则,它们对于求极限是十分重要的.我们将对函数极限论述这些法则,利用函数极限与数列极限的关系,这些法则很容易搬到数列极限上去.

2.3.1　极限运算法则

定理 2.3.1(**四则运算法则**)　设 f 和 g 是两个函数,并设函数极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$与$\lim\limits_{x\to a}g(x)$都存在.则

(1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

(2) $\lim\limits_{x\to a}kf(x)=k\lim\limits_{x\to a}f(x)$,$k$ 为任一常数.

(3) $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$　(设$\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq0$).

证　(1) 只对函数的和的情形证明,不妨设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$.对于$\forall\varepsilon>0$,由定义知,$\exists\delta_1>0$,使当$0<|x-a|<\delta_1$时有

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2},\tag{2.3.1}$$

又$\exists\delta_2>0$,使当$0<|x-a|<\delta_2$时,有

$$|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{2.3.2}$$

令$\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$,则当$0<|x-a|<\delta$时,不等式(2.3.1)和(2.3.2)同时成立.于是,当$0<|x-a|<\delta$时,有

$$|f(x)+g(x)-(A+B)|\leqslant|f(x)-A|+|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

这表明
$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=A+B.$$

(2) 利用不等式 $|kf(x)-kA|\leqslant|k||f(x)-A|$证明，请读者自己完成.

(3) 利用等式$f(x)g(x)-AB=f(x)[g(x)-B]+B[f(x)-A]$可得不等式
$$|f(x)g(x)-AB|\leqslant|f(x)||g(x)-B|+|B||f(x)-A|.\qquad(2.3.3)$$
$|B|$是固定的，当$x\to a$时，$|f(x)-A|$与$|g(x)-B|$可以任意小. 现问题在于估计$|f(x)|$. 不妨设$B\neq0$，$\forall\varepsilon>0$，由于$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，故$\exists\delta_1>0$，使得当$0<|x-a|<\delta_1$时，有
$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2|B|}.\qquad(2.3.4)$$
由此又可推得当$0<|x-a|<\delta_1$时，
$$|f(x)|=|A+[f(x)-A]|\leqslant|A|+|f(x)-A|<|A|+\frac{\varepsilon}{2|B|}.$$
令$C=|A|+\dfrac{\varepsilon}{2|B|}$，则当$0<|x-a|<\delta_1$时，有
$$|f(x)|<C.\qquad(2.3.5)$$
另外，由于$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$，故$\exists\delta_2>0$，使当$0<|x-a|<\delta_2$时，有
$$|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2C}.$$
令$\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则当$0<|x-a|<\delta$时，不等式(2.3.4)和(2.3.5)同时成立，再由(2.3.3)式即得当$0<|x-a|<\delta$时，
$$|f(x)g(x)-AB|<C\cdot\frac{\varepsilon}{2C}+|B|\cdot\frac{\varepsilon}{2|B|}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$
法则(3)得证.

(4) 由法则(3)，我们只要证$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{B}$.

令$\varepsilon_0=\dfrac{|B|}{2}>0$，由于$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$，故$\exists\delta_1>0$，当$0<|x-a|<\delta_1$时，有
$$||g(x)|-|B||\leqslant|g(x)-B|<\frac{|B|}{2},$$
$$|g(x)|>-\frac{|B|}{2}+|B|=\frac{|B|}{2},$$
$\forall\varepsilon>0$，仍因$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$，故$\exists\delta_2>0$，当$0<|x-a|<\delta_2$时，有
$$|g(x)-B|<\frac{|B|^2}{2}\varepsilon,$$
令$\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则当$0<|x-a|<\delta$时，就有
$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}\right|=\frac{|g(x)-B|}{|g(x)\cdot B|}\leqslant\frac{2}{|B|^2}|g(x)-B|<\frac{2}{|B|^2}\cdot\frac{|B|^2}{2}\varepsilon=\varepsilon,$$

因此得
$$\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{B}.$$
□

例 2.3.1 求$\lim\limits_{x\to 2}(5x^2-4)$.

解 $$\lim_{x\to 2}(5x^2-4)=\lim_{x\to 2}5x^2-\lim_{x\to 2}4=5\lim_{x\to 2}x^2-4=5\lim_{x\to 2}x\cdot\lim_{x\to 2}x-4$$
$$=5\cdot 2\cdot 2-4=16.$$
□

例 2.3.2 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x^3-2x+5}$.

解 $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^3-2x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^3-2x+5)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2+\lim\limits_{x\to 1}1}{\lim\limits_{x\to 1}x^3-\lim\limits_{x\to 1}2x+\lim\limits_{x\to 1}5}$$
$$=\frac{(\lim\limits_{x\to 1}x)^2+1}{(\lim\limits_{x\to 1}x)^3-2\lim\limits_{x\to 1}x+5}=\frac{1+1}{1-2+5}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$
□

从上面两个例子可以看出,对于多项式及有理分式函数求$x\to a$时的极限时,只要把a代入函数中即可.但要注意对有理分式函数来说,这样代入后若分母等于零,则没有意义.

例 2.3.3 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0,\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$,试讨论$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

解 由于$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$,故我们不能利用法则(4)求极限,看来关于函数$f$和$g$还需要知道更多的信息.例如,若$f(x)=x^2-9,g(x)=x-3$,则
$$\lim_{x\to 3}f(x)=0,\quad \lim_{x\to 3}g(x)=0,$$
而商的极限则是
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6.$$
不太严格地说,“当x接近3时,x^2-9大约是$x-3$的6倍”.

如果选取$f(x)=(x-3)^2,g(x)=x-3$,那么这时$\lim\limits_{x\to 3}f(x)=0,\lim\limits_{x\to 3}g(x)=0$,而商的极限
$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^2}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-3)=0.$$
在这种情形我们则说“当$x\to 3$时,$(x-3)^2$趋于0的速度比$x-3$趋于0的速度更快”.

由上面的讨论可见,如果仅仅知道$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0,\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$,那么当$x\to a$时,$\dfrac{f(x)}{g(x)}$的状态是无法确定的. □

定理2.3.1中的四个运算法则均可推广到$x\to\infty$或$x\to+\infty,x\to-\infty$的情形.我们还可以证明,如果$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=L>0$,则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)g(x)=+\infty$.我们把这个结果用于下面的例子.

例 2.3.4 讨论$x\to\pm\infty$时,函数$2x^3-5x^2+6x$的性态.

解 先考察 $x\to+\infty$ 的情形，这里 $2x^3$，$-5x^2$ 和 $6x$ 的绝对值都无限制地增大. 为了看清函数 $2x^3-5x^2+6x$ 的变化趋势，我们提出一个因子 x^3：

$$2x^3-5x^2+6x=x^3\left(2-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right).$$

显然，当 $x\to+\infty$ 时，$5/x$ 和 $6/x^2$ 都趋于0，故

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)=2.$$

而 $x\to+\infty$ 时，$x^3\to+\infty$，于是有

$$\lim_{x\to+\infty}(2x^3-5x^2+6x)=+\infty.$$

不难看出，$\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$，且

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)=2,$$

因此

$$\lim_{x\to-\infty}(2x^3-5x^2+6x)=-\infty.$$

□

例 2.3.5 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+5x-1}{2x^3+x^2+4}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+5x-1}{2x^3+x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}}=\frac{1}{2}.$$

□

例2.3.4 和例2.3.5 中所用到的技巧，可应用于一般的**有理函数**(即多项式之商)：

设 $f(x)$ 是一个多项式，其最高次项为 ax^n，又设 $g(x)$ 是另一个多项式，其最高次项为 bx^m，那么，运用类似于例2.3.4、例2.3.5 中的办法，我们可以证明

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to\pm\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to\pm\infty)}}\frac{ax^n}{bx^m},$$

即是说，当 $x\to\infty$（或 $x\to+\infty$，或 $x\to-\infty$）时，两个多项式之商的极限可以化为两个多项式的最高次项之商的极限. 我们再来看几个例子.

例 2.3.6 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4+5x^3}{-x^4+10x+5}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-17x}{5x^4+x^3-2x}$； (3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5+x}{4x^4-x^2}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4+5x^3}{-x^4+10x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4}{-x^4}=-3.$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-17x}{5x^4+x^3-2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{5x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{5x}=0.$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5+x}{4x^4-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5}{4x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{4}=-\infty.$ □

根据数列极限与函数极限的关系，我们很容易得到数列极限的四则运算法则：

定理 2.3.1′　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$；

(3) 若 $b\neq 0$，$y_n\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

证明留给读者.

定理 2.3.2(**复合运算法则**)　设 $f(t)$ 在空心邻域 $O_0(t_0)$ 上定义，且

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = A;$$

$t = g(x)$ 在空心邻域 $O_0(x_0)$ 上定义，当 $x\in O_0(x_0)$ 时，$t = g(x)\in O_0(t_0)$，且

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = t_0,$$

则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A.$$

证　$\forall \varepsilon > 0$，由于 $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = A$，故 $\exists \eta > 0$，当 $0 < |t - t_0| < \eta$ 时，有

$$|f(t) - A| < \varepsilon.$$

对于上述 η，由于 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = t_0$，故 $\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|g(x) - t_0| < \eta.$$

因为 $x\in O_0(x_0)$ 时 $g(x) = t\in O_0(t_0)$，故上式又可写成

$$0 < |g(x) - t_0| = |t - t_0| < \eta,$$

从而当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，就有

$$|f(t) - A| = |f[g(x)] - A| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A.$$ □

这个定理对 x_0 为无穷大，以及单侧极限的情形也成立.

例 2.3.7　求极限 $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2}$.

解　令 $t = \dfrac{1}{x^2}$，则 $x\to 0 \Rightarrow t\to +\infty$，由此得

$$\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = \lim_{t\to+\infty} e^{-t} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t}} = 0.$$

这里，引进了中间变量 t，复合函数的关系是：$y = e^{-t}$，$t = 1/x^2$. □

例 2.3.8　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2 + x}}{x}$.

解　$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{3+\dfrac{1}{x}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{3+\frac{1}{x}} = \sqrt{3}.$$

这是因为
$$\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{1}{x}\right)=3,$$
并且还利用了
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3+\frac{1}{x}}=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{1}{x}\right)}.$$
对于平方根函数$\sqrt{x}$的这种性质,我们已在本章 2.1 节的例 2.1.6 中给出. □

由以上例子可知,我们在求函数极限时,可以通过适当的变量代换来求,这样做的理论根据就是复合函数极限定理(即定理2.3.2).

2.3.2 渐近线

在本章 2.1 节中我们考察过极限
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 与 \quad \lim_{x\to a}f(x)=\infty,$$
它们与函数的**渐近性态**密切相关.

如果$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,$A$ 是一个实数,那么当$|x|$增加时,函数$y=f(x)$的图形就任意地接近水平直线$y=A$(见图2.9). 这时称直线$y=A$为曲线$y=f(x)$的**水平渐近线**. 类似地,对$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$或$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$的情形,$y=A$也称为曲线$y=f(x)$的水平渐近线.

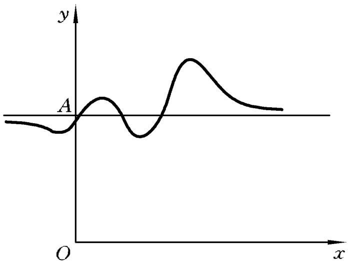


图2.9

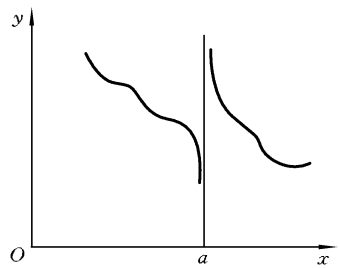


图2.10

如果$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$或$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=+\infty$,则当$x$任意靠近点$a$时,$y=f(x)$的图形就任意地接近直线$x=a$,这时称直线$x=a$为曲线$y=f(x)$的**垂直渐近线**(见图2.10). 对于$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$,$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=-\infty$以及$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=+\infty$的情形也有类似的定义.

下面我们通过一些例子说明如何利用水平渐近线及垂直渐近线来勾勒出函数的部分性态.

例 2.3.9　试描绘$f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$的图形.

解　注意$x=0$与$x=1$不在f的定义域中. 而当x充分靠近$x=0$或$x=1$时,函数值的绝对值就会变得很大. 这是因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1}=-1;\quad \lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty.$$

由此可知

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x(x-1)}=\infty,\quad \lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x(x-1)}=\infty,$$

因此,$x=0$ 与 $x=1$ 是垂直渐近线.此外,由于

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x(x-1)}=0,\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x(x-1)}=0,$$

故 $y=0$(即 x 轴)是 $y=f(x)$ 的图形的水平渐近线.图 2.11 给出了函数 $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$ 的草图(如何描绘函数的整个图形,我们将在第 3 章中详细介绍).

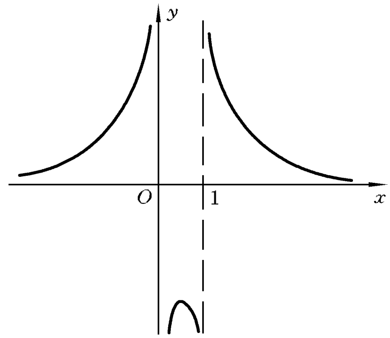


图 2.11

例 2.3.10 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ 的图形的渐近线.

解 设 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.首先我们看到

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty,\quad \lim_{x\to 0^-}\left(x+\frac{1}{x}\right)=-\infty,$$

因此 y 轴是垂直渐近线.

当 $|x|$ 很大时,$f(x)$ 与 x 相差一个很小的量 $\dfrac{1}{x}$. 所以,当 $|x|$ 很大时,$f(x)$ 的图形与直线 $y=x$ 很接近.当 $x<0$ 时,$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 小于 x,这时 $f(x)$ 的图形在直线 $y=x$ 的下方.类似可以看出当 $x>0$ 时,$f(x)$ 的图形位于直线 $y=x$ 的上方.于是直线 $y=x$ 成为曲线 $y=f(x)$ 的一条**斜渐近线**(见图 2.12). □

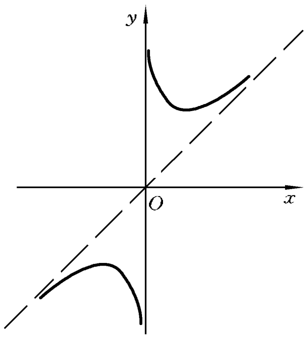


图 2.12

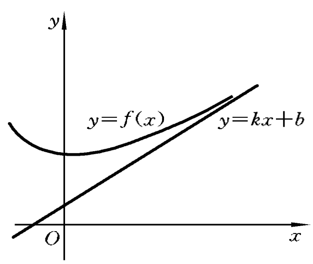


图 2.13

例2.3.10中斜渐近线的求法是粗略的.现在我们稍微详细一点介绍斜渐近线的求法.

首先给出斜渐近线的正式定义.设有一伸展到无穷的曲线 $y=f(x)$,当点 (x,y) 沿曲线趋于无穷时,若它到定直线 $y=kx+b$ 的距离趋于零,则称该直线为曲线的**斜渐近线**(见图2.13).

曲线上的点 $(x,f(x))$ 到直线 $y=kx+b$ 的距离为 $\dfrac{|f(x)-kx-b|}{\sqrt{1+k^2}}$,因此,要直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线,当且仅当

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{|f(x)-kx-b|}{\sqrt{1+k^2}}=0$$

或

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}[f(x)-(kx+b)]=0.$$

如何求 k 和 b 呢? 由斜渐近线的定义

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0, \tag{2.3.6}$$

即得

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b. \tag{2.3.7}$$

若知道 k,就可由上式求得 b,又由(2.3.7)式,有

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot[f(x)-kx]=0\cdot b=0,$$

故得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k. \tag{2.3.8}$$

在具体求斜渐近线时,先由(2.3.8)式求 k,再由(2.3.7)式求 b,于是 $y=kx+b$ 就是所要求的斜渐近线.易见,当 $k=0$ 时,$y=b$ 就是水平渐近线.

例2.3.11　求曲线 $y=\sqrt{1+x^2}$ 的渐近线.

解　先求 k:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1.$$

再求 b:

$$b=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x^2}-1\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=0.$$

因此曲线有斜渐近线 $y=x$. 又

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{-\sqrt{x^2}}=-1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}[\sqrt{1+x^2}-(-1)\cdot x]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=0,$$

所以 $y=-x$ 也是渐近线. □

习　题　2.3

(A)

1. 回答下列问题：

(1) 若 $x\to a$ 时，$f(x)\to 0$，$g(x)\to 0$，则在求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 时，能否用定理 2.3.1 中的公式(4)？

(2) 若 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to\infty$，$g(x)\to\infty$，则对于极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，你有什么办法处理？试就一种较简单的情形拿出你的办法来.

(3) 下列说法是否正确：

(i) $y=f(x)$ 有水平渐近线 $\Leftrightarrow$ 当 $|x|$ 充分大后，$|f(x)|$ 有界.

(ii) $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处有垂直渐近线 $\Leftrightarrow$ 在 a 点附近，$|f(x)|$ 无界.

(iii) $y=f(x)$ 有斜渐近线 $\Leftrightarrow$ 当 $|x|$ 充分大后，$|f(x)|$ 无界.

(4) 讨论曲线 $y=f(x)$ 的渐近线有何意义？

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-5x+2)$；　(2) $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+1)(1-2x)^2$；　(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^5-40x^4)$；

(4) $\lim\limits_{x\to -\infty}(6x^5+21x^3)$；　(5) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}$；

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+1}{x^4+2}$；　(8) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x^3+2x}{x^{10}+x+7}$.

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}\right]$.

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$；　(2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+x}}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+2x+1}}{3x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+x+3}}{6x}$.

5. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=1$，试讨论

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)+g(x)]$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)g(x)$；　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

6. 试根据函数 $y=\cos x$ 的图像讨论 $\lim\limits_{x\to +\infty}\cos x$.

7. 利用渐近线画出下列函数的图形：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$；　(2) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

8. 求下列函数的图形的渐近线：

(1) $y=\dfrac{x^2-2x-2}{x-1}$；　(2) $y=\dfrac{2x^2}{(1-x)^2}$.

(B)

1. 已知 $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to +\infty}g(x)=+\infty$，试讨论

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]$；　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)g(x)$；　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

2. 设$P(x)$是n次多项式，首项为ax^n，$a>0$；$Q(x)$是m次多项式，首项为bx^m，$b>0$. 试就(1)$m=n$，(2)$m<n$，(3)$m>n$等三种情形讨论$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

3. 设$f(x)=\begin{cases}x, & 当x是整数,\\ -x, & 当x不是整数.\end{cases}$

(1) 画出$f(x)$的草图；　(2) 讨论$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|$.

4. 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，试确定常数$a$和$b$.

5. 设a,b,c是常数，$a\neq0$，证明$y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+1}$的图形有斜渐近线，并求出渐近线方程.

6. 证明定理2.3.1中的(2).

答案与提示

(A)

2. (1) 4；(2) 18；(3) $+\infty$；(4) $-\infty$；(5) $-\infty$；(6) $+\infty$；(7) 0；(8) 0.

3. (1) $\dfrac{1}{3}$；(2) $\dfrac{1}{2}$；(3) 1；(4) 1.

4. (1) $\dfrac{1}{2}$；(2) $-\sqrt{3}$；(3) $\dfrac{2}{3}$；(4) $-\dfrac{1}{2}$.

5. (1) 1；(2) 0；(3) 0；(4) ∞.

8. (1) $x=1$及$y=x-1$；(2) $x=1$及$y=2$.

(B)

1. (1) $+\infty$；(2) 不定；(3) $+\infty$；(4) 不定.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\dfrac{a}{b}, & m=n,\\ +\infty & m<n,\\ 0, & m>n.\end{cases}$

3. (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$不存在，$\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=+\infty$.

4. $a=1$，$b=-1$.

5. $y=ax+b-a$.

2.4　极限的性质与两个重要极限

2.4.1　极限的性质

定理2.4.1(唯一性)　若极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在，则极限值唯一.

证　用反证法. 假设当$x\to a$时，$f(x)$趋向两个不同的极限值，设为

$$\lim_{x\to a}f(x)=A,\quad \lim_{x\to a}f(x)=B,\quad A\neq B.$$

不妨设 $A<B$,取 $\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}>0$,由极限定义,$\exists\,\delta_1>0$,当 $0<|x-a|<\delta_1$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,\quad f(x)<A+\varepsilon=\frac{A+B}{2}.$$

又 $\exists\,\delta_2>0$,当 $0<|x-a|<\delta_2$ 时,有

$$|f(x)-B|<\varepsilon,\quad f(x)>B-\varepsilon=\frac{A+B}{2},$$

于是,当 $0<|x-a|<\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$时,就有

$$f(x)<\frac{A+B}{2}<f(x).$$

这就产生了矛盾.这矛盾说明反证法假设不成立,即极限值唯一. □

类似可证:

定理 2.4.1′ 若数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,则极限值唯一.

定理 2.4.2(**局部有界性**) 若极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在,则 $f(x)$在 a 的某个空心邻域 $O_0(a,\delta)$上有界.

证 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, 由定义,对于 $\varepsilon=1$, $\exists\,\delta>0$,当 $0<|x-a|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-A|<1,\quad |f(x)|<1+|A|,$$

因此 $f(x)$在 $O_0(a,\delta)$上是有界的. □

对于数列极限,我们有

定理 2.4.2′ 若数列$\{x_n\}$有极限,则$\{x_n\}$有界.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.由数列极限的定义,对于 $\varepsilon=1$, $\exists N$,当 $n>N$ 时,有

$$|x_n-a|<1.$$

而
$$|x_n|-|a|\leqslant|x_n-a|<1,$$

故当 $n>N$ 时,有
$$|x_n|<|a|+1.$$

取
$$M=\max\{1+|a|,|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|\},$$

则对一切自然数 n,有
$$|x_n|\leqslant M.$$

即数列$\{x_n\}$有界. □

定理 2.4.3(**局部保号性**) 若极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>0$(或$<0$),则对任意正数 r:$0<r<|A|$,存在 a 的某个空心邻域 $O_0(a,\delta)$,使得 $\forall\,x\in O_0(a,\delta)$,恒有

$$f(x)>r>0\quad(\text{或}\ f(x)<-r<0).$$

证 设 $A>0$,令 $\varepsilon=A-r>0$,由于 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,故 $\exists\,\delta>0$,使当 $0<|x-a|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon=A-r,$$

得
$$0< r= A - (A - r)< f(x).$$
对于$A< 0$的情形亦可类似地证明. □

数列极限相应的结果是

定理2.4.3′　若极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n= a> 0$(或$< 0$),则存在$N$,使当$n> N$时有$x_n> 0$(或$<0$).

证明留作习题.

定理2.4.4(**极限不等式**)　设极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$与$\lim\limits_{x\to a}g(x)$都存在,且存在a的某个空心邻域$O_0(a,\delta)$,使得$\forall x\in O_0(a,\delta)$,成立
$$f(x)\leqslant g(x),$$
则
$$\lim_{x\to a}f(x)\leqslant \lim_{x\to a}g(x).$$

证　设$\lim\limits_{x\to a}f(x)= A$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)= B$,$\forall \varepsilon> 0$,由极限定义,$\exists \delta_1> 0$,使当$0< |x- a|< \delta_1$时,有
$$A - \varepsilon< f(x)< A + \varepsilon,$$
又$\exists\delta_2> 0$,使当$0< |x- a|< \delta_2$时,有
$$B - \varepsilon< g(x)< B + \varepsilon.$$
令$\delta_0= \min(\delta,\delta_1,\delta_2)$,则当$0< |x- a|< \delta_0$时,就有
$$A - \varepsilon< f(x)\leqslant g(x)< B + \varepsilon,$$
由此得
$$A< B+ 2\varepsilon,$$
由ε的任意性推得$A\leqslant B$,定理结论得证. □

数列极限的极限不等式是

定理2.4.4′　给定数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,若
$$x_n\leqslant y_n\quad (n= 1,2,\cdots),$$
且
$$\lim_{n\to\infty} x_n= a,\quad \lim_{n\to\infty} y_n= b,$$
则
$$a\leqslant b.$$

证　用反证法.假设$a> b$.对于$\varepsilon= \dfrac{a- b}{2}> 0$,由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n= a$,$\exists N_1$,当$n> N_1$时,有
$$|x_n - a|< \varepsilon,\quad x_n > a- \varepsilon= \frac{a + b}{2}.$$
又由$\lim\limits_{n\to\infty} y_n= b$,$\exists N_2$,当$n> N_2$时,有
$$|y_n - b|< \varepsilon,\quad y_n < b+ \varepsilon= \frac{a + b}{2}.$$
令$M = \max\{N_1,N_2\}$,则当$n> N$时,有
$$x_n > \frac{a + b}{2}> y_n.$$
这与条件矛盾.所以$a\leqslant b$. □

定理 2.4.5(夹逼性) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$,且存在 a 的某个空心邻域 $O_0(a,\delta)$,使得 $\forall x\in O_0(a,\delta)$,都有

$$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x),$$

则

$$\lim_{x\to a}h(x)=A.$$

证 $\forall\varepsilon>0$,由极限定义,分别存在正数 δ_1 和 δ_2,使当 $0<|x-a|<\delta_1$ 时,有

$$A-\varepsilon<f(x),$$

当 $0<|x-a|<\delta_2$ 时,有

$$g(x)<A+\varepsilon.$$

令 $\delta_0=\min(\delta,\delta_1,\delta_2)$,则当 $0<|x-a|<\delta_0$ 时,就有

$$A-\varepsilon<f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)<A+\varepsilon,$$

或

$$|h(x)-A|<\varepsilon,$$

这表明

$$\lim_{x\to a}h(x)=A.$$ □

下面是数列极限的夹逼性定理.

定理 2.4.5′ 设数列 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

$$x_n\leqslant z_n\leqslant y_n\quad(n=1,2,\cdots),\quad\lim_{n\to\infty}x_n=a=\lim_{n\to\infty}y_n.$$

则

$$\lim_{n\to\infty}z_n=a.$$

证明留给读者.

例 2.4.1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证 令 $\sqrt[n]{n}=1+h_n$,只要证 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$. 因为

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots+h_n^n\geqslant\frac{n(n-1)}{2}h_n^2,$$

所以

$$0<h_n<\frac{2}{\sqrt{n-1}}\quad(n>1).$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n-1}}=0$ 及极限的夹逼性,得 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$,因此

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}(1+h_n)=1.$$ □

2.4.2 两个重要极限

下面我们利用函数极限的性质来讨论两个常用的重要极限公式.

(Ⅰ)
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

这个极限等式的几何解释如下:作单位圆,x 表示以弧度为单位的圆心角 $\angle AOB$(见图 2.14),则

$$x=AB,\quad\sin x=\overline{BC}.$$

在下半圆上取与B点对称的点B',则有

$$2x = 2\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BB'},\quad 2\sin x = 2\overline{BC} = \overline{BB'},$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\overline{BB'}}{\overset{\frown}{BB'}} = 1.$$

即当圆心角趋于零时,对应的弧长与弦长之比趋于1.

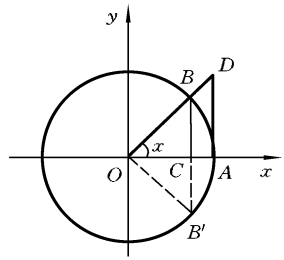


图2.14

证　设$0<x<\dfrac{\pi}{2}$,显然$\triangle OAB$的面积<扇形OAB的面积<$\triangle OAD$的面积,即

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x,\quad \sin x < x < \tan x,$$

因此,当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时,有

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{2.4.1}$$

利用偶函数的性质知,上式对$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$也成立.因此,当$0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$时,(2.4.1)式成立,并且由(2.4.1)式可得不等式

$$|\sin x| < |x| \quad \left(0<|x|<\frac{\pi}{2}\right). \tag{2.4.2}$$

进一步可推得当$0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$时,有

$$0 < 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

即
$$0 < 1-\cos x < \frac{x^2}{2}. \tag{2.4.3}$$

当$x\to 0$时,$\dfrac{x^2}{2}\to 0$,由定理2.4.5(夹逼性)有

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0,$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1.$$

再次运用定理2.4.5及(2.4.1)式,即得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$ □

如果x的单位用度来表示,则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{180}.$$

所以在高等数学中,凡角度都取弧度为单位,使结果简单明了.

例2.4.2　求极限$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$.

解 当 $x\to 0$ 时, $5x\to 0$, 令 $t=5x$, 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5x}{2x}\right)=\frac{5}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{5}{2}.\quad\square$$

例 2.4.3 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

解 设法化成 $\dfrac{\sin t}{t}$ 的形式求极限.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}=\frac{3}{2}.\quad\square$$

例 2.4.4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.\quad\square$$

(Ⅱ) $$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}}$$

其中 e 是指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 以及自然对数 $y=\ln x$ 中的底,它是一个无理数,其值为

$$\mathrm{e}=2.718\,281\,828\,459\,045\cdots$$

证 这里我们要用到一个结果:若 n 为自然数,则有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}.\tag{2.4.4}$$

极限(2.4.4)将在本章 2.5 节中详细证明.在这里我们先承认下来.

先考虑 $x\to+\infty$ 的情形,设 $n\leqslant x<n+1$, n 为自然数,则有

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leqslant 1+\frac{1}{n}$$

及
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.\tag{2.4.5}$$

由于
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{n+1}}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e},$$

据定理 2.4.5 及(2.4.5)式,得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.\tag{2.4.6}$$

再考虑 $x\to-\infty$ 的情形,为此作代换 $x=-y$, 则

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right),$$

因此, $x\to-\infty$ 时, 有 $y-1\to+\infty$, 故上式右端的极限是 e. 从而证得

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{2.4.7}$$

由单侧极限与极限的关系即得

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{2.4.8}$$

极限(2.4.8)式还有一种常用的形式：

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e. \tag{2.4.9}$$

令 $t=\dfrac{1}{x}$，则 $x\to\infty$ 和 $t\to0$ 是等价的，所以

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e. \quad \square$$

例2.4.5　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$.

解　令 $x=-t$，则 $x\to\infty\Leftrightarrow t\to\infty$，于是

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{(-x)}\right]^{(-x)\cdot(-1)}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-1}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t}=\frac{1}{e}. \quad \square$$

例2.4.6　求 $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

解　令 $t=2x$，则 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{t}$，且 $x\to0\Leftrightarrow t\to0$. 因此

$$\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{2}{t}}=\lim_{t\to0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^2=\lim_{x\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\cdot\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

$$=e\cdot e=e^2. \quad \square$$

习　题　2.4

(A)

1. 回答下列问题：

(1) 极限有哪些重要性质？

(2) 假设在 a 点的某个空心邻域内有 $f(x)<g(x)$，是否必定有 $\lim\limits_{x\to a}f(x)<\lim\limits_{x\to a}g(x)$？

(3) 定理2.4.4′中的条件改为 $x_n<y_n$，问结论能否改为 $a<b$. 为什么？

(4) 能否利用定理2.4.4′直接推得定理2.4.5′：$a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}z_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

(5) 两个重要的极限分别是什么？

2. 证明定理2.4.1′.

3. 设 $a>0,b>0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max(a,b)$.

4. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

5. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{5x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 3x}$; (5) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin^2\theta}{\theta}$; (6) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\tan^2 h}{h}$;

(7) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}$; (8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$; (9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$;

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$; (11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$; (12) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

(13) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$; (14) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan x-\tan a}{x-a}$.

6. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x/2}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{1/x}$; (3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}(x\neq 0)$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{1/x}$; (5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{4x}$.

(B)

1. 证明定理2.4.3′.

2. 证明定理2.4.5′.

3. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.

4. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-5}{x^3\sin\dfrac{1}{x^2}}$; (2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\tan 3x$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{x-\dfrac{\pi}{4}}$; (5) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

5. 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$.

(1) 问若在$O_0(a,\delta)$内有$f(x)<g(x)$,是否必有$A<B$? 为什么?

(2) 证明:若$A>B$,则存在空心邻域$O_0(a,\delta)$,使当$x\in O_0(a,\delta)$时,有$f(x)>g(x)$.

6. 试就$a=+\infty$的情形叙述并证明定理2.4.4.

答案与提示

(A)

3. 利用不等式$\max(a,b)\leqslant\sqrt[n]{a^n+b^n}\leqslant\sqrt[n]{2}\cdot\max(a,b)$及极限的夹逼性.

4. 利用$\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

5. (1) $\dfrac{1}{2}$; (2) 2; (3) $\dfrac{3}{5}$; (4) $\dfrac{2}{3}$; (5) 0; (6) 0; (7) $\dfrac{1}{2}$; (8) 1; (9) $\dfrac{1}{2}$; (10) 2; (11) 4; (12) $\cos a$; (13) $-\sin a$; (14) $\sec^2 a$, $a\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k=0,\pm 1,\cdots$.

6. (1) $e^{3/2}$;　(2) e^{-1};　(3) e;　(4) e^{a};　(5) e^{-4}.

(B)

3. 利用$0<\dfrac{2\cdot 2\cdot \cdots \cdot 2}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot n}<\dfrac{1}{n}$.

4. (1) 3;　(2) $\dfrac{1}{3}$;　(3) 1;　(4) 2;　(5) e^{-1}.

5. (1) 不一定有$A<B$. 例如$f(x)=|x|$,$g(x)=x^2$. 当$0<|x|<1$时,有$f(x)>g(x)$,但$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$.

2.5　实数基本定理

我们在第1章1.1节中已学习了实数的一个基本定理——确界原理. 本节将介绍单调有界收敛定理、闭区间套定理、致密性定理和柯西收敛准则等4个实数基本定理. 这些定理从不同的角度刻画了实数集的内在性质,是极限理论的基础.

2.5.1　单调有界收敛定理

我们现在将利用确界原理来解决单调数列极限的存在问题.

数列$\{x_n\}$若满足

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots,$$

则称$\{x_n\}$为**单调增加的**;若满足

$$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant\cdots,$$

则称$\{x_n\}$为**单调减少的**. 若上述条件中仅是严格不等号成立,则称该数列$\{x_n\}$是严格单调增加(或严格单调减少)的.

定理2.5.1(**单调有界收敛定理**)　若数列单调增加(或单调减少),有上(下)界,则数列极限存在.

证　设$\{x_n\}$是单调增加、有上界的数列. 则所有的数x_n组成的集合A是非空、有上界的. 根据确界原理,A的上确界存在,记为

$$\beta=\sup A=\sup\{x_n|n\in\mathbf{N}\}.$$

断定$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\beta$. 实际上,因为$\beta$是$A$的最小上界,所以对$\forall\varepsilon>0$,$\exists$数$x_N$满足

$$\beta-\varepsilon<x_N.$$

由$n>N$时数列单调增加得

$$\beta-\varepsilon<x_N<x_n,$$

再由上确界的定义,有

$$\beta-\varepsilon<x_n<\beta+\varepsilon\quad(n>N).$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\beta=\sup\{x_n|n\in\mathbf{N}\}.$$

若数列$\{x_n\}$单调减少、有下界,则同样可以证明

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha = \inf\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}. \qquad \square$$

在函数极限的情形,可以证明:若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上单调增加,则极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有上界.(证明留作习题)

例 2.5.1 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 存在.

证 先证数列 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n (n=1,2,\cdots)$ 单调增加.

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots \\ &\quad +\frac{n(n-1)\cdots(n-(n-1))}{n!}\frac{1}{n^n} \\ &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots \\ &\quad +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots \\ &\quad +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

将 x_n 与 x_{n+1} 加以比较,x_n 有 $(n+1)$ 项,x_{n+1} 有 $(n+2)$ 项,其中前 $(n+1)$ 项分别比 x_n 中相应的项要大或相等,最后一项大于0,所以有 $x_n\leqslant x_{n+1}$,即 $\{x_n\}$ 单调增加.

再证 $\{x_n\}$ 有上界.

$$\begin{aligned} x_n &\leqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leqslant 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}<3. \end{aligned}$$

根据定理2.5.1,数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,记为 e,它是无理数,即

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

这样我们就解决了上节遗留下来的问题. $\square$

例 2.5.2 已知 $y_1=\sqrt{a}, y_2=\sqrt{a+y_1},\cdots,y_n=\sqrt{a+y_{n-1}},\cdots$,其中 $a>0$ 是常数.证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在并求其值.

解　从数列的构造来看，$\{y_n\}$显然是单调增加的. 实际上，$y_1=\sqrt{a}<y_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$. 假设$y_{n-1}<y_n=\sqrt{a+y_{n-1}}$，则有

$$y_n=\sqrt{a+y_{n-1}}<\sqrt{a+y_n}=y_{n+1}.$$

由数学归纳法知，$\forall n$，都有$y_n<y_{n+1}$.

再来证$\{y_n\}$有上界. 由$y_n=\sqrt{a+y_{n-1}}$得

$$y_n^2=a+y_{n-1},$$

因此有
$$y_n^2=a+y_{n-1}<a+y_n,$$

两端除以y_n，得
$$y_n<\frac{a}{y_n}+1.$$

注意到$\forall n, y_n\geqslant\sqrt{a}$，故$\frac{a}{y_n}\leqslant\sqrt{a}$，于是有

$$y_n\leqslant\sqrt{a}+1\quad(\forall n).$$

这样便证明了数列$\{y_n\}$单调增加有上界. 由定理2.5.1知，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$存在. 设$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$. 对等式$y_n^2=a+y_{n-1}$两端取极限，得

$$A^2=a+A,$$

由此解得
$$A=\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}\quad(\text{负根舍去}).$$
□

2.5.2　闭区间套定理与致密性定理

定理2.5.2(**闭区间套定理**)　设$[a_n,b_n]$$(n=1,2,\cdots)$是一串闭区间，满足条件

(1) $a_n\leqslant a_{n+1}<b_{n+1}\leqslant b_n$，即$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]\quad(n=1,2,\cdots)$；

(2) 当$n\to\infty$时，区间$[a_n,b_n]$的长度趋于0，即$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

则存在唯一的实数ξ，使得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\xi=\lim_{n\to\infty}b_n,$$

且ξ是所有闭区间的唯一公共点，即

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}.$$

证　由条件(1)知，数列$\{a_n\}$单调增加，有上界b_1；数列$\{b_n\}$单调减少，有下界a_1，因而由定理2.5.1，有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\xi_1,\quad\lim_{n\to\infty}b_n=\xi_2,\quad a_n\leqslant\xi_1\leqslant\xi_2\leqslant b_n\quad(n=1,2,\cdots).$$

又由条件(2)知，
$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\xi_2-\xi_1=0,$$

记$\xi=\xi_1=\xi_2$，则有
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\xi=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

如果还有实数ξ^*满足
$$a_n\leqslant\xi^*\leqslant b_n\quad(n=1,2,\cdots),$$

令 $n\to\infty$，得 $\xi^*=\xi$. 因此 ξ 是所有闭区间 $[a_n,b_n]$ 的唯一公共点，证毕. □

我们知道，定理2.5.1只论述一类非常特殊的数列. 而对于一般的数列是否收敛的问题，我们还需要作深入的探讨. 为此，我们先给出子列的概念.

定义2.5.1 设数列 $\{x_n\}$，称形如

$$x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k},\cdots$$

的数列为 $\{x_n\}$ 的一个**子列**，其中 n_k 是满足

$$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots,\quad n_k\to\infty\ (k\to\infty)$$

的自然数.

换句话说，$\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 由原数列 $\{x_n\}$ 中的部分项构成，k 表示 x_{n_k} 在子列中是第 k 项，n_k 表示 x_{n_k} 在原数列中是第 n_k 项. 因此子列 $\{x_{n_k}\}$ 的下标是 k 而不是 n_k.

由子列的定义容易证明下面的结论.

定理2.5.3 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\{x_n\}$ 的任何子列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛，并且 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.

证 $\forall\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 知，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

取 $K=N$，则当 $k>K$ 时，有

$$n_k>n_K=n_N\geqslant N,$$

这时就有

$$|x_{n_k}-a|<\varepsilon.$$

□

现在，我们利用闭区间套定理来证明实数的基本定理之一——致密性定理.

定理2.5.4(Bolzano-Weierstrass 致密性定理) 每个有界数列都有收敛的子列.

证 设数列 $\{x_n\}$ 有界，则存在实数 a_1,b_1，使得

$$a_1\leqslant x_n\leqslant b_1\quad(n=1,2,\cdots).$$

将区间 $[a_1,b_1]$ 二等分为两个小区间 $\left[a_1,\dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$ 和 $\left[\dfrac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$，则其中至少有一个含有数列 $\{x_n\}$ 中的无穷多项，记这个小区间为 $[a_2,b_2]$. 再将闭区间 $[a_2,b_2]$ 二等分，同样其中至少有一个小区间含有 $\{x_n\}$ 中的无穷多项，记这个小区间为 $[a_3,b_3]$，…这样继续做下去就得到一闭区间 $[a_k,b_k]$ 序列，它们满足

$$[a_{k+1},b_{k+1}]\subset[a_k,b_k]\quad(k=1,2,\cdots),\qquad \lim_{k\to\infty}(b_k-a_k)=\lim_{k\to\infty}\frac{b_1-a_1}{2^{k-1}}=0,$$

且其中每一个闭区间 $[a_k,b_k]$ 都含有数列 $\{x_n\}$ 中的无穷多项.

根据闭区间套定理，存在实数 ξ，使得

$$\lim_{k\to\infty}a_k=\xi=\lim_{k\to\infty}b_k.$$

下面证明数列 $\{x_n\}$ 必有一子列收敛于实数 ξ.

首先在区间 $[a_1,b_1]$ 中任意选取 $\{x_n\}$ 中的某一项，记作 x_{n_1}. 由于在 $[a_2,b_2]$ 中含有 $\{x_n\}$ 中的无穷多项，因此总可以选取到位于 x_{n_1} 后的某一项，记作 x_{n_2}，$n_2>n_1$. 继续做下

去,即在选取 $x_{n_k}\in[a_k,b_k]$后,因为在$[a_{k+1},b_{k+1}]$中仍有$\{x_n\}$中的无穷多项,所以我们仍能选取到位于x_{n_k}后的某一项,记作$x_{n_{k+1}}$,$n_{k+1}>n_k$. 于是我们就得到了$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$,满足

$$a_k\leqslant x_{n_k}\leqslant b_k\quad(k=1,2,\cdots).$$

由$\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}b_k=\xi$以及极限的夹逼性,得

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi.$$ □

2.5.3 柯西收敛准则

我们进一步要问:能否给出一个判别数列是否收敛的准则呢? 回答是肯定的. 这个准则不仅在现阶段可以帮助我们解决若干问题,而且在今后更高深的研究中起着重要的作用.

先给出一个基本概念.

定义 2.5.2　设$\{x_n\}$是一个数列. 如果$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, $\forall m,n>N$,有

$$|x_n-x_m|<\varepsilon,$$

(这个条件通常写成$\lim\limits_{m,n\to\infty}|x_n-x_m|=0$),则称$\{x_n\}$为**柯西**(Cauchy)**数列**.

定理 2.5.5(Cauchy **收敛准则**)　数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是:$\{x_n\}$是柯西数列.

证　必要性. 假设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 由定义, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$,对于$m>N$及$n>N$,有

$$|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此, $\forall m$、$n>N$,有

$$|x_n-x_m|\leqslant|x_n-a|+|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这表明$\{x_n\}$是柯西数列.

充分性. 设$\{x_n\}$是柯西数列,要证明$\{x_n\}$收敛,其中的关键在于证明柯西数列有界. 为此,我们在柯西数列的定义中取$\varepsilon=1$,则存在某个N_0,使得对于m、$n>N_0$有

$$|x_n-x_m|<1.$$

特别地, $\forall m>N_0$,有　$|x_m-x_{N_0+1}|<1$,

于是当$m>N_0$时,有　$|x_m|<1+|x_{N_0+1}|$.

令$M=\max(|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_{N_0}|,1+|x_{N_0+1}|)$,则对一切$n$,都有

$$|x_n|\leqslant M,$$

所以柯西数列$\{x_n\}$是有界的. 根据定理 2.5.4, $\{x_n\}$有一个收敛的子列,不妨设为$\{x_{n_k}\}$,且

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=a.$$

现证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 由条件,$\forall\varepsilon>0,\exists N$,当$m,n>N$时,有

$$|x_n-x_m|<\varepsilon,$$

即
$$x_m-\varepsilon<x_n<x_m+\varepsilon.$$

注意当$k>N$时,$n_k\geqslant k>N$,故有

$$x_{n_k}-\varepsilon<x_n<x_{n_k}+\varepsilon,$$

令$k\to\infty$,得
$$a-\varepsilon\leqslant x_n\leqslant a+\varepsilon.$$

根据极限定义,即得
$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$
□

柯西准则的直观意义是:$\forall\varepsilon>0$,$\exists$序号n,以x_n为中心、以ε为半径的邻域之外,只有数列的有限项,数列的无穷多项都在该邻域内,那么极限点a当然也在该邻域内,所以,以a点为中心、以2ε为半径的邻域外,至多只有数列的有限项. 由此可见,数列的极限应为a.

柯西准则又可表述如下:

数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是,$\forall\varepsilon>0,\exists N$,当$n>N$时,对一切自然数$p$,都有

$$|x_n-x_{n+p}|<\varepsilon.$$

例 2.5.3　设$x_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots.)$,求证$\{x_n\}$收敛.

证　对于$m>n$,

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}\\&<\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon>0$,取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,则当$m>n>N$时,有

$$|x_m-x_n|<\varepsilon,$$

所以数列$\{x_n\}$收敛. □

例 2.5.4　证明调和数列$x_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$没有有限极限.

证　取$\varepsilon_0>0,\forall N$,取$n>N,p=n$,则

$$|x_{n+p}-x_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2},$$

由柯西准则知,$\{x_n\}$的极限不存在. 由于$\{x_n\}$单调增加,故必有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty.$$
□

到目前为止,我们已学习了实数的五个基本定理:确界原理,单调有界收敛定理,闭区间套定理.致密性定理和柯西收敛准则.这五个定理是互相等价的.它们从不同

的角度刻画了实数集的内在性质. 读者若想对实数基本定理作更深入的了解,可阅读数学专业用的数学分析教材.

习 题 2.5

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 什么叫子列? 子列的下标有何特征?

(2) 什么叫做单调数列?

(3) 什么叫做柯西数列?

2. 证明数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \cdots$ 收敛.

3. 设 $a>0$, $0<x_1<\dfrac{1}{a}$, $x_{n+1}=x_n(2-ax_n)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

4. 设 $x_1>0$, 且 $x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且等于 $\sqrt{3}$.

(B)

1. 设 $x_1=10$, $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ $(n=1,2\cdots)$, 试证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求此极限.

2. 利用柯西准则, 证明下面各数列的收敛性:

(1) $x_n=a_0+a_1q+\cdots+a_nq^n$, 其中 $|a_i|\leqslant M$ $(i=0,1,\cdots)$, 且 $|q|<1$;

(2) $x_n=\dfrac{\sin 1}{2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n}{2^n}$.

3. 对于数列 $\{x_n\}$, 若子列 $\{x_{2k}\}$ 与 $\{x_{2k+1}\}$ 都收敛于 a, 试用"ε-N"的语言证明 $\{x_n\}$ 也收敛于 α.

4. 证明: 若 $f(x)$ 为定义于 $[a,+\infty)$ 上的单调增加函数, 则极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有上界.

答案与提示

(A)

2. $x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$ 单调增加有上界, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

3. x_n 单调增加有上界, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{a}$.

4. 分 $x_1<\sqrt{3}$, $x_1=\sqrt{3}$ 和 $x_1>\sqrt{3}$ 三种情形讨论.

(B)

1. x_n 单调减少有下界, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

2. (1) 利用 $|x_m-x_n|<M|q|^{n+1}\dfrac{1}{1-|q|}$ $(m>n)$; (2) 利用 $|x_m-x_n|<\dfrac{1}{2^n}$ $(m>n)$.

4. 利用函数极限与数列极限的关系. 并利用单调有界收敛定理.

2.6 无穷小与无穷大

无穷小与无穷大在极限理论中起着重要作用,本节介绍无穷小与无穷大的概念以及无穷小的比较.

2.6.1 无穷小

定义 2.6.1(无穷小) 如果函数 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时的极限为零,则称函数 $f(x)$ **是 $x\to a$ 时的无穷小**. 也就是,如果 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$,使得 $\forall x$:$0<|x-a|<\delta$,都有

$$|f(x)|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ **是 $x\to a$ 时的无穷小量**,简称为**无穷小**.

类似地,若 $x\to\infty$ 时 $f(x)\to 0$,则称 $f(x)$ 是 $x\to\infty$ 时的无穷小. 以 0 为极限的数列 $\{x_n\}$ 是 $n\to\infty$ 时的无穷小. 对 $x\to a^+$, $x\to a^-$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ 等情形可类似定义. 应当注意,我们说一个函数是无穷小时,必须指出这个函数在自变量 x 的何种极限过程中为无穷小,只简单地说函数是无穷小是不确切的. 例如

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0,$$

故 $\sin x$ 当 $x\to 0$ 时为无穷小;但是当 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时,$\sin x$ 不趋于 0,此时 $\sin x$ 就不是无穷小了. 另外,无穷小是变量,无穷小不是很小的量,而是极限值为零的变量.

设 $x\to a$ 时函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限,则此函数与其极限的差

$$\alpha(x)=f(x)-A$$

显然为无穷小,因为依定义 2.6.1,

$$|\alpha(x)|=|f(x)-A|<\varepsilon\qquad(0<|x-a|<\delta);$$

反之,若 $\alpha(x)$ 在 $x\to a$ 时是无穷小,则 $f(x)\to A\ (x\to a)$. 这样我们便得到了下面的命题.

定理 2.6.1 $x\to a$ 时函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限的充要条件是:$\alpha(x)=f(x)-A$ 在 $x\to a$ 时是无穷小.

2.6.2 无穷小的比较

在同一极限过程中,两个无穷小都趋于零,但他们的速度可能相同,也可能不同. 如何加以比较呢? 如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

我们可以说当 $x\to 0$ 时,两个无穷小 $\sin x$ 与 x 趋于零的快慢一样. 如

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2},$$

而当 $x\to 0$ 时,两个无穷小 $1-\cos x$ 与 x^2 趋于零的速度成比例.又如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=0,$$

则称 $\sin^2 x$ 趋于零的速度比 x 快.这样便有如下的定义.

定义2.6.2　设 $x\to x_0$ 时(x_0 有限或为 $\infty,-\infty,+\infty$),$f(x)$ 与 $g(x)$ 均为无穷小.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$,则称 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 为比 $g(x)$ **高阶的无穷小**,或称 $g(x)$ 为比 $f(x)$ **低阶的无穷小**,记作

$$f(x)=o(g(x))\quad(x\to x_0).$$

特别,当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷小可记作

$$f(x)=o(1)\quad(x\to x_0).$$

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$,则称 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 与 $g(x)$ 为**同阶无穷小**,记作

$$f(x)\sim cg(x)\quad(x\to x_0).$$

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,则称 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 与 $g(x)$ 为**等价无穷小**,记作

$$f(x)\sim g(x)\quad(x\to x_0).$$

(4) 若无穷小 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足关系式

$$|f(x)|\leqslant M|g(x)|\quad(x\in O_0(x_0)),$$

则记作
$$f(x)=O(g(x))\quad(x\to x_0).$$

特别,任一有界变量 $f(x)$ 总可写成 $f(x)=O(1)$.

例2.6.1　当 $x\to 0$ 时,有

$$\sin x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,$$
$$\sin^2 x=o(x),\quad x^k=o(1)\quad(k>0).$$ □

例2.6.2　求证:**有界量与无穷小之积为无穷小**.

证　不妨设 $f(x)=o(1)(x\to a)$,$|g(x)|\leqslant M\ (x\in O_0(a))$.因

$$0\leqslant|f(x)g(x)|\leqslant M|f(x)|\quad(\forall x\in O_0(a)),$$

故由夹逼定理得知 $|f(x)g(x)|\to 0(x\to a)$,从而

$$f(x)g(x)=o(1)\quad(x\to a).$$ □

注意,并不是任意两个无穷小都可以比较,例如当 $x\to 0$ 时,无穷小 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 与 x 就不能比较.

若 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 与 $(x-x_0)^k$ 是同阶无穷小,则称 $f(x)$ 是关于基本无穷小 $x-x_0$ 的 k **阶无穷小**.若 k 不是正整数,而是大于零的实数时,极限过程只能考虑 $x\to x_0^+$ 的情形.

若 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 是 $x-x_0$ 的 k 阶无穷小，则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^k}=c\neq 0,$$

于是有
$$f(x)\sim c(x-x_0)^k\quad (x\to x_0).$$
这时称这个与 $f(x)$ 等价的最简单的无穷小 $c(x-x_0)^k$ 为 $f(x)$ 的**主部**.

关于"o"的运算，下面给出两个常用的规则.

定理 2.6.2　(1) $o(g(x))\pm o(g(x))=o(g(x))\quad (x\to x_0)$.

(2) $k\cdot o(g(x))=o(g(x))$, $o(k\,g(x))=o(g(x))$, ($x\to x_0$, k 为常数).

证　我们只证明(1). 令 $\alpha(x)=o(g(x))$, $\beta(x)=o(g(x))$，即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{g(x)}=0,\quad \lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{g(x)}=0.$$

则
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)\pm\beta(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{g(x)}\pm\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{g(x)}=0,$$
所以
$$\alpha(x)\pm\beta(x)=o(g(x)).$$ □

注意，等式(1)的意义与通常的等式意义不同，应理解为：$g(x)$ 的两个高阶无穷小的代数和(左端)是 $g(x)$ 的高阶无穷小(右端)，即左端为条件，右端为结论，等式两端的意义是不一样的. 如果把等式两端交换一下，写成

$$o(g(x))=o(g(x))\pm o(g(x)),$$

那么等式就失去了意义. 另外，等式反映的是某种性质，并不是指数值关系，不能说 $o(g(x))-o(g(x))$ 等于零.

例 2.6.3　试证 $o(x^2)=o(x)\ (x\to 0)$, $\frac{1}{x}\cdot o(x^2)=o(x)\ (x\to 0)$.

证　令 $\alpha(x)=o(x^2)$，则有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x^2}=0$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x^2}\cdot x=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}x=0,$$

因此 $\alpha(x)=o(x)$，亦即 $o(x^2)=o(x)\ (x\to 0)$. 由

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\cdot o(x^2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2}=0$$

得
$$\frac{1}{x}\cdot o(x^2)=o(x)\quad (x\to 0).$$ □

现在给出等价无穷小的一个重要性质，它在求极限时有广泛的应用.

定理 2.6.3　设在同一极限过程中，变量 α 和 α'，β 和 β' 都是无穷小，且 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$. 又设极限 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在. 则有

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

证 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\left(\frac{\beta}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}\right)=\lim\frac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\frac{\alpha'}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$. □

定理2.6.3表明,在求两个无穷小之比的极限时,可以利用等价无穷小进行代换,从而使计算简化.

例2.6.4　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+5x^2}{\sin^2 x}$.

解　当$x\to 0$时,$\sin x\sim x$,$\sin^2 x\sim x^2$,故

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+5x^2}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x+5)}{x^2}=\lim_{x\to 0}(x+5)=5. \qquad □$$

例2.6.5　证明$x\to 0$时,$\arctan x\sim x$,并由此求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\sin 4x}$.

解　作代换$y=\arctan x$,则$x=\tan y$,且$x\to 0$等价于$y\to 0$,于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan y}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot\cos y=1,$$

所以当$x\to 0$时,$\arctan x\sim x$.利用等价无穷小代换,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}. \qquad □$$

2.6.3　无穷大

在本章2.1.4中,我们曾讨论过函数值趋于无穷的情形.由此给出下面的定义.

定义2.6.3(**无穷大**)　设函数$f(x)$在$O_0(a)$中有定义,若

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,$$

则称$f(x)$**是**$x\to a$**时的无穷大量**,简称**无穷大**.

如果$\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$(或$\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$),则称$f(x)$是$x\to a$时的**正无穷大**(或**负无穷大**).类似地,还可定义当$x\to\infty$时的无穷大及正(负)无穷大.同样,无穷大是变量,而不是很大的常量.

由极限的性质不难证明如下定理.

定理2.6.4　若$f(x)$是无穷小,且$f(x)\neq 0$,则$\frac{1}{f(x)}$是无穷大;若$f(x)$是无穷大,则$\frac{1}{f(x)}$是无穷小.

类似地可有两个无穷大的比较,如

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x^3-x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)x^3}{\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)x^3}=1,$$

我们说当$x\to+\infty$时.两个无穷大x^3+1和x^3-x+2趋于无穷的速度一样.又如

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=0,$$

我们说当 $x\to\infty$ 时, $x+1$ 趋于无穷的速度比 x^2+x-1 的慢,或者说 x^2+x-1 趋于无穷的速度比 $x+1$ 的快.

关于无穷大的比较,简述以下定义.

定义 2.6.4 设 $x\to x_0$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是无穷大,则当

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}0\text{ 时}, & \text{称 } f(x)\text{ 是比 } g(x)\text{ 低阶的无穷大},\\ c\neq 0\text{ 时}, & \text{称 } f(x)\text{ 与 } g(x)\text{ 为同阶无穷大},\\ 1\text{ 时}, & \text{称 } f(x)\text{ 与 } g(x)\text{ 为等价无穷大}.\end{cases}$$

当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为等价无穷大时,亦记作 $f(x)\sim g(x)\ (x\to x_0)$.

例 2.6.6 试确定 k 的值,使 $f(x)=2x+5x^3-x^6$ 在 $x\to\infty$ 时为 x^k 的同阶无穷大.

解 不难看出,
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5x^3-x^6}{-x^6}=1,$$
所以取 $k=6$ 即可. □

例 2.6.7 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+2x^4}}{x^2+x}$.

解 由于
$$\sqrt{1+2x^4}\sim\sqrt{2}\,x^2\ (x\to+\infty),\quad x^2+x\sim x^2\ (x\to+\infty),$$
所以
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+2x^4}}{x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2}\,x^2}{x^2}=\sqrt{2}.$$ □

习 题 2.6

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 绝对值非常小的量是无穷小吗? 数0是不是无穷小?

(2) ∞, $+\infty$, $-\infty$ 有什么区别? 它们是实数吗?

(3) 如果说"某函数是无穷小"对不对?

(4) 无穷小的阶的比较是怎样的?

(5) 若在同一极限过程中, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小,能否说 $f(x)=g(x)$?

(6) 等价无穷小在求极限时有什么用处? 你能收集一些等价无穷小吗?

2. 证明:当 $x\to0$ 时, $\sin^2x$ 是 x 的高阶无穷小.

3. 当 $x\to1$ 时,下列无穷小

(1) $\frac{1}{2}(1-x^2)$; (2) $1-x^3$; (3) $(1-x)^2$; (4) $1-x^2$

中,哪一个与无穷小 $1-x$ 等价?

4. 求下列变量的等价无穷大：

(1) $2x^3+3x^2-5x+6\quad(x\to\infty)$；　　(2) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\quad(x\to+\infty)$.

(B)

1. 证明：当 $x\to0$ 时，有

(1) $\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$；　　(2) $\arctan x\sim\frac{1}{4}\sin4x$.

2. 利用等价无穷小，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan5x}{2x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x^m)}{(\sin x)^n}$　(n、m 为正整数)；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

3. 证明下列各题：

(1) $2x-x^2=O(x)\ (x\to0)$；　　(2) $\sqrt{1+x}-1=o(1)(x\to0)$；

(3) $2x^3+2x^2=O(x^3)\ (x\to\infty)$；

(4) $(1+x)^n=1+nx+o(x)\ (x\to0)$，$n$ 为自然数.

4. 设在某一极限过程中，α 和 β 都是无穷小. 证明：如果 $\alpha\sim\beta$，则 $\beta-\alpha=o(\alpha)$；反之，如果 $\beta-\alpha=o(\alpha)$，则 $\alpha\sim\beta$.

5. 证明当 $x\to0$ 时，下列关系式成立：

(1) $o(x^n)+o(x^m)=o(x^n)\quad(0<n<m)$；　(2) $o(x^n)\cdot o(x^m)=o(x^{n+m})\quad(m>0,n>0)$.

答案与提示

(A)

3. 当 $x\to1$ 时，$\frac{1}{2}(1-x^2)\sim(1-x)$.

4. (1) $2x^3$；　(2) $\sqrt{x}$.

(B)

2. (1)$\frac{5}{2}$；　(2)$m>n$ 时为0；$m=n$ 时为1；$m<n$ 时为∞；　(3)$\frac{1}{2}$；　(4)1.

5. (1)考察$\lim\limits_{x\to0}\frac{o(x^n)+o(x^m)}{x^n}$；　(2)考察$\lim\limits_{x\to0}\frac{o(x^n)\cdot o(x^m)}{x^{m+n}}$.

2.7　连续与间断

物质世界的运动和变化有两种形式：一种是渐变，一种是突变. 从几何上看，一条连绵不断的曲线就反映某种渐变过程(见图2.15)，而图2.16所绘的曲线在 x_0 处有一个“跳跃”，这表示某个渐变过程在此处发生了突变. 这些现象在分析上就表现为某个函数的连续与间断. 下面所讨论的连续函数是微积分学研究的主要对象. 我们在研究一个函数的连续性的同时，也要考察它是否会在某处发生不连续的情形.

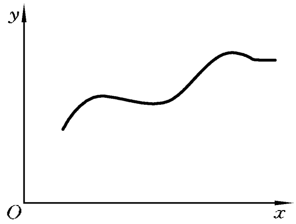


图 2.15

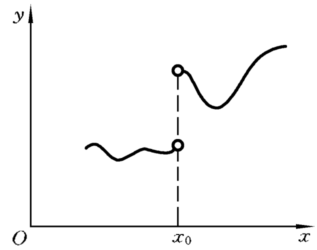


图 2.16

2.7.1 函数的连续性

我们在 2.1 节里给函数极限下定义时,曾经强调过这样一点,若 $x\to a$ 时,函数 $f(x)$ 有极限值 A,则表示为 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,这里与 $f(a)$ 的大小甚至与 $f(a)$ 有无意义都毫无关系. 我们关心的是 x 充分靠近 a 点时,$f(x)$ 的变化趋势. 然而,由几何直观上很容易看出,如果极限值 A 恰好等于函数值 $f(a)$,那么函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处必定是连续地变化的. 下面我们就来刻画这种连续性.

定义 2.7.1(**右连续性**) 设函数 $f(x)$ 在 a 点的某个右邻域 $O^+(a)$ 及 a 点有定义. 如果右极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$,则称 $f(x)$ 在 a 点是**右连续**的.

如图 2.17 所示,$f(x)$ 在 a 点右连续意味着:

(1) $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在;

(2) 极限值为 $f(a)$.

定义 2.7.2(**左连续性**) 设函数 $f(x)$ 在 a 点的某个左邻域 $O^-(a)$ 及 a 点有定义. 如果左极限 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)$,则称 $f(x)$ 在 a 点是**左连续**的. 这将意味着:

(1) $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ 存在;

(2) 极限值为 $f(a)$.

左连续的示意图见图 2.18. 左连续、右连续统称为**单侧连续**.

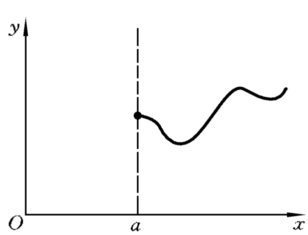


图 2.17

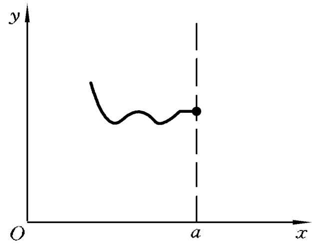


图 2.18

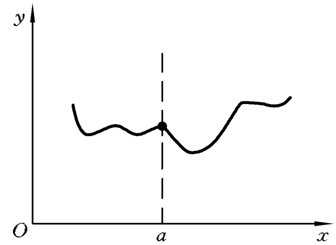


图 2.19

定义 2.7.3(连续性)　设函数 $f(x)$ 在 a 点的某个邻域 $O(a)$ 内有定义. 如果 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$,则称 $f(x)$ 在 a 点是**连续**的. 这意味着:

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在;

(2) 极限值为 $f(a)$.

其几何意义见图 2.19.

由于 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在且相等,所以

$$f(x)\textbf{在 } a \textbf{ 点连续}\Leftrightarrow f(x)\textbf{在 } a \textbf{ 点左连续且右连续}.$$

例 2.7.1　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0,\\ 2-\cos x, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解　由于 $f(0^+)=f(0^-)=f(0)=1$,故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的. □

例 2.7.2　证明 $f(x)=x^2$ 在 $x=3$ 处连续.

证　由于

$$\lim_{x\to 3}x^2=(\lim_{x\to 3}x)\cdot(\lim_{x\to 3}x)=3\cdot 3=9,$$

而 $f(3)=3^2=9$,故 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ 存在且等于 $f(3)$,因此 $f(x)$ 在 $x=3$ 处是连续的(事实上,函数 f 在数轴上每一点处都连续). □

如极限的定义那样,函数在一点处连续可以用 ε-δ 语言定义如下.

定义 2.7.4　设函数 $f(x)$ 在 a 点的某个邻域 $O(a)$ 内定义. 如果 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得当 $|x-a|<\delta$ 时,就有

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 a 点连续.

由定义可见,连续性的实质就是:当自变量变化很小时函数的变化也很小.

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的每一点都连续,则称 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 在这里,函数 $f(x)$ 在区间端点处的连续性理解为单侧连续性,即在 a 点为右连续,在 b 点为左连续. 为方便起见,今后用符号 $C[a,b]$ 表示区间 $[a,b]$ 上全体连续函数的集合. 我们说 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数,常简记为 $f(x)\in C[a,b]$. 类似的记号还有 $C(a,b)$,$C(0,+\infty)$,$C(-\infty,+\infty)$ 等等.

例 2.7.3　证明:正弦函数 $f(x)=\sin x\in C(-\infty,+\infty)$.

证　任取 $a\in(-\infty,+\infty)$,因为

$$|\sin x-\sin a|=2\left|\cos\frac{a+x}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\leqslant|x-a|,$$

所以,$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\varepsilon$,当 $|x-a|<\delta$ 时,有

$$|\sin x-\sin a|\leqslant|x-a|<\varepsilon.$$

即 $f(x)=\sin x$ 在 a 点连续. 由 a 点的任意性知,$\sin x\in C(-\infty,+\infty)$. □

类似可证余弦函数 $f(x)=\cos x\in C(-\infty,+\infty)$.

例 2.7.4　设 $f(x)=\begin{cases}x, & x \text{ 是无理数},\\ 0. & x \text{ 是有理数}.\end{cases}$ 证明 $x=0$ 是函数的连续点.

证 $\forall \varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,当 $|x-0|=|x|<\delta$ 时,

$$|f(x)-f(0)|=|f(x)|\leqslant |x|<\varepsilon,$$

由定义 2.7.4 知,$f(x)$ 在 $x=0$ 点连续. □

由连续函数的定义可立即推得它的两个有用的性质.

定理 2.7.1(**连续函数的局部保号性**) 若函数 $f(x)$ 在点 a 连续,且 $f(a)\neq 0$,则 $f(x)$ 在 a 的某个邻域 $O(a,\delta)$ 内与 $f(a)$ 同号,并且存在某正数 r,使得

$$|f(x)|\geqslant r>0 \quad (\forall x\in O(a,\delta)).$$

这个定理的结论可利用本章 2.4 节定理 2.4.3(函数极限的局部保号性)得到,请读者自己证明.

定理 2.7.2(**连续函数的局部有界性**) 若函数 $f(x)$ 在 a 点连续,则 $f(x)$ 在 a 点的某个邻域 $O(a,\delta)$ 内有界.

同样,这个定理可利用函数极限的局部有界性(见本章 2.4 节定理 2.4.2)加以证明.

2.7.2 函数的间断点

设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某个空心邻域 $\mathring{O}(x_0)$ 内有定义. 如果在 x_0 点的连续性条件

$$f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$$

遭到破坏,则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**间断点**(或**不连续点**).

函数 $f(x)$ 的间断点可如下分类.

第一类间断点:$f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 都存在的间断点.

第二类间断点:$f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 中至少有一个不存在的间断点(注意,无穷大属于不存在之列).

在第一类间断点中,有以下两种情形.

(1) $f(x_0^-)=f(x_0^+)\neq f(x_0)$(或 $f(x_0)$ 无定义),

这种间断点称为**可去间断点**. 只要重新定义 $f(x_0)$(或补充定义 $f(x_0)$),令 $f(x_0)=f(x_0^-)=f(x_0^+)$,则函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

(2) $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$,

这种间断点称为**跳跃间断点**. 对于跳跃间断点 x_0,数 $|f(x_0^+)-f(x_0^-)|$ 称为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的**跃度**.

例 2.7.5 $x_0=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的可去间断点,这是因为 $f(0^-)=f(0^+)=1$,而 $f(0)$ 无定义(见图 2.20),这时我们可以补充定义 $f(0)=1$,于是便得到一个连续的函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1. & x=0.\end{cases}$$

这样便把间断点 $x_0=0$"去掉"了. □

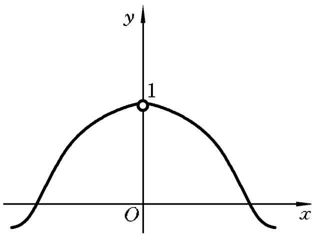


图2.20

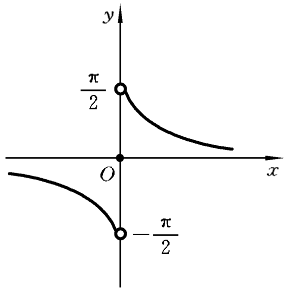


图2.21

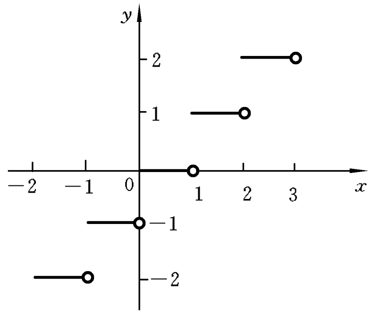


图2.22

例2.7.6　函数 $f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x_0=0$ 点的左、右极限分别为 $-\pi/2$、$\pi/2$,所以 $x_0=0$ 是函数的第一类间断点(见图2.21). □

例2.7.7　讨论函数 $f(x)=[x]$(x 的最大整数部分)的连续性.

解　由函数的定义知,当 $0\leqslant x<1$ 时,$f(x)=0$;当 $1\leqslant x<2$ 时,$f(x)=1$. 于是(见图2.22)

$$f(1^+)=1,\quad f(1^-)=0.$$

因此 $x=1$ 是 $f(x)=[x]$ 的第一类间断点,即跳跃间断点,函数的跃度等于1.

类似可证一切整数点都是函数的跳跃间断点,且跃度都是1.

再来考察 $x=1/2$ 处的情形. 容易看出

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}[x]=0=f\left(\frac{1}{2}\right),$$

所以 $x=1/2$ 是 $f(x)$ 的连续点. 类似可证所有的非整数点都是 $f(x)$ 的连续点.

可以说在一切整数点处,函数是右连续的,但不左连续. □

例2.7.8　函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点的左、右极限都不存在(均为无穷大),所以 $x=0$ 是函数的第二类间断点(亦称**无穷间断点**),见图2.23. □

例2.7.9　设 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 当 $x\to 0$ 时,$\dfrac{1}{x}\to\infty$,$\sin\dfrac{1}{x}$ 不趋向任何数,也不趋向无穷大. 当 x 充分靠近0时,$\sin\dfrac{1}{x}$ 的值在 $+1$ 与 -1 之间无限振荡. 因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点(亦称**振荡型间断点**),见图2.24. □

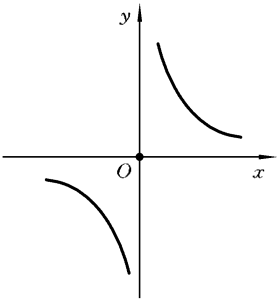


图2.23

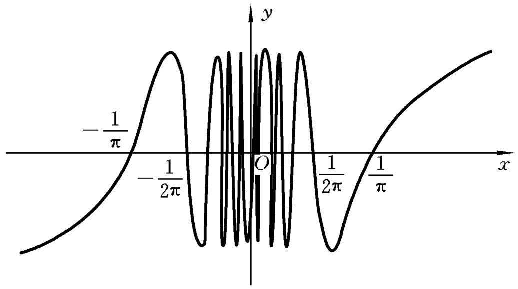


图2.24

习　题　2.7

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 试用ε-δ语言叙述函数$f(x)$在x_0点连续的定义.

(2) 对于自变量的改变量Δx,令$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,称$\Delta y$为$f(x)$在$x_0$点的改变量.若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,可否确定$f(x)$在$x=x_0$点连续?

(3) 什么叫函数的间断点?

(4) 函数的间断点有哪些类型?分类的依据是什么?

2. 试确定A与B的值,使函数$f(x)=\begin{cases}(1-x)^{1/x}, & x>0,\\ B, & x=0,\\ x\sin\dfrac{1}{x}+A, & x<0\end{cases}$在$x=0$处连续.

3. 设$f(x)=\begin{cases}a+bx^2, x\leqslant 0,\\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0\end{cases}$在$x=0$处连续,问常数$a$与$b$应满足什么关系?

4. 设$f(x)=\begin{cases}2-x, & x<1,\\ x^2, & x>1.\end{cases}$

(1) 画出$f(x)$的图形;

(2) 怎样定义$f(1)$,使得$f(x)$在整个x轴上连续?

5. 设$f(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ (x-1)^2, & x>1,\end{cases}$

(1) 画出$f(x)$的图形;

(2) 怎样定义$f(1)$,使得$f(x)$在整个x轴上连续?

6. 设$f(x)=x+|x|$.

(1) 画出$f(x)$的图形;

(2) $f(x)$在$x=0$点是否连续?

7. (1) 设$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 问$x=0$是否为$f(x)$的可去间断点?

(2) 设$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 1, & x=0, \end{cases}$问$x=0$是否为$f(x)$的间断点？如果是间断点,则指出其类型.

8. 判断下列函数的间断点的类型：

(1) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$, $x=0$;　　(2) $f(x)=e^{1/x}$, $x=0$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $x=-1$;　　(4) $f(x)=\arctan e^{1/x}$, $x=0$.

9. 设$x=a$是函数$f(x)$的可去间断点,设$x\neq a$时,$g(x)=f(x)$,并设$g(a)=\lim\limits_{x\to a}f(x)$. 证明$g(x)$在$a$处连续.

10. 设法利用补充定义的办法,使下列函数成为$(-\infty,+\infty)$上的连续函数(这种方法叫做**连续延拓**方法)：

(1) $f(x)=\dfrac{x^3-27}{x-3}$;　　(2) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

(B)

1. 证明函数$f(x)=\cos x\in C(-\infty,+\infty)$.

2. 判断下列函数的间断点的类型：

(1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}-1}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$　$x=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{1+nx^2}$,　$x=0$.

3. 设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$,试找出$f(x)$的间断点.

4. 试确定a,b的值,使$f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$有无穷间断点$x=0$,有可去间断点$x=1$.

答案与提示

(A)

2. $A=B=e^{-1}$.

3. $a=b$.

4. 定义$f(1)=1$.

5. 令$f(1)=0$.

6. (2) 连续.

7. (1)$x=0$不是$f(x)$的可去间断点；　(2)$x=0$是$f(x)$的可去间断点.

8. (1)$x=0$为跳跃间断点；　(2)$x=0$为无穷间断点；　(3)$x=-1$为无穷间断点；　(4)$x=0$为跳跃间断点.

10. (1)令$f(3)=27$；　(2)令$f(0)=\dfrac{1}{2}$.

(B)

2. (1)$x=0$为跳跃间断点；　(2)$x=0$为无穷间断点.

3. 有间断点$x=1$.

4. $a=0,b=e$.

2.8　连续函数的性质

2.8.1　连续函数的运算

对连续函数的四则运算、复合运算以及求逆(反函数)运算,在一定的条件下,其结果仍然是连续函数.因连续是极限的一种特殊情形,由极限的四则运算法则可得连续函数的四则运算法则.

定理2.8.1(**连续函数的四则运算**)　设$f(x)$,$g(x)$在x_0点连续,α和β为任意常数,则

(1) $\alpha f(x)+\beta g(x)$在x_0点连续(称$\alpha f+\beta g$为f与g的**线性组合**);

(2) $f(x)g(x)$在x_0点连续;

(3) 若$g(x_0)\neq 0$,$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在x_0点连续.

进一步可以推得:若$f(x)$、$g(x)\in C(a,b)$,则

$$\alpha f(x)+\beta g(x)\in C(a,b),\quad f(x)g(x)\in C(a,b);$$

若$\forall x\in(a,b)$,$g(x)\neq 0$,则$\dfrac{f(x)}{g(x)}\in C(a,b)$.

由复合函数极限定理可以推得复合函数连续性定理.

定理2.8.2(**复合函数的连续性**)　设$y=f(t)$在t_0点连续,$t=g(x)$在x_0点连续,且$t_0=g(x_0)$,则复合函数$y=f[g(x)]$在x_0点连续.

定理2.8.2的结论可以简单地表示如下:

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=f[\lim_{x\to x_0}g(x)]=f[g(x_0)].\tag{2.8.1}$$

由定理2.8.2还可以推得:若$g(x)\in C(a,b)$,值域属于(α,β),$f(t)\in C(\alpha,\beta)$,则$f[g(x)]\in C(a,b)$.

下面我们给出反函数连续性定理,证明从略.

定理2.8.3(**反函数的连续性**)　设函数$y=f(x)$在区间I上严格递增(或严格递减)且连续,值域为区间J,则其反函数$x=\varphi(y)$在J上严格递增(或严格递减)且连续.

例2.8.1　由于$\sin x$和$\cos x$都在$(-\infty,+\infty)$上连续,因此$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$和$\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$在其定义域内是连续的.　□

例2.8.2　求$\lim\limits_{x\to 0}\cos(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解　函数$y=\cos(1+x)^{\frac{1}{x}}$可看作由

$$y=\cos u,\quad u=(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

复合而成.由于$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$,而$\cos u$在$u=\mathrm{e}$连续,故由本章2.3节定理2.3.2可得

$$\lim_{x\to0}\cos(1+x)^{\frac{1}{x}}=\cos\left[\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\cos e.$$ □

例 2.8.3　求$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2-\dfrac{\sin x}{x}}$.

解　等式(2.8.1)对于$x\to+\infty$,$x\to-\infty$或$x\to x_0^{\pm}$类型的极限也是正确的.因此

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{2-\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{2-\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{2-0}=\sqrt{2}.$$ □

例 2.8.4　由于$y=\sin x$在闭区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上严格递增且连续,故它的反函数$y=\arcsin x$在闭区间$[-1,1]$上也是严格递增且连续的.

同理可证,$y=\arccos x$在$[-1,1]$上严格递减且连续;$y=\arctan x$在$(-\infty,+\infty)$内严格递增且连续.

总之,反三角函数$\arcsin x$,$\arccos x$,$\arctan x$和$\operatorname{arccot} x$在它们的定义域内都是连续的. □

2.8.2 初等函数的连续性

通过前几节的讨论,我们已经知道:

(1) 三角函数和反三角函数在其定义域内是连续的.

下面我们再讨论其他基本初等函数的连续性.

(2) 指数函数和对数函数的连续性在其定义域内是连续的.

先证明指数函数$a^x\in C(-\infty,+\infty)$,其中$a>0$.

当$a=1$时,结论显然成立.当$a>1$时,$\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$,$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\log_a(1+\varepsilon a^{-x_0})>0$,则当$|x-x_0|<\delta$时,有

$$|a^x-a^{x_0}|=a^{x_0}|a^{x-x_0}-1|<a^{x_0}(a^{\delta}-1)=\varepsilon,$$

所以,当$a>1$时,$\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$,结论成立.当$a<1$时,请读者给出证明.

由a^x的连续性及反函数的连续性,立即知道对数函数$\log_a x$在$(0,+\infty)$内连续.

(3) 幂函数的连续性在其定义域内是连续的.

设$y=x^{\alpha}$,$0<x<+\infty$,α为任一实数,这时

$$x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}\quad(0<x<+\infty),$$

由e^u和$u=\ln x$的连续性以及复合函数的连续性定理可知,x^{α}是$(0,+\infty)$上的连续函数.

当α取不同的值时可以分别加以讨论,可以证明,幂函数在其定义域内是连续的.

(4) 双曲函数在其定义域内是连续的.这可由e^x的连续性及连续函数的运算法则推得.

综上所述可以推知,**一切初等函数都在其定义域内连续**.

例 2.8.5　证明$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

证　由对数的性质知

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{1/x},$$

右端可视作$u=(1+x)^{1/x}$和$\ln u$的复合函数,故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}]=\ln e=1.$$ □

例 2.8.6　证明$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a(a>0)$.

证　作代换$y=a^x-1$,则$a^x=1+y$,进而得

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{y\ln a}{\ln(1+y)},$$

由于$x\to 0\Leftrightarrow y\to 0$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(1+y)}=\ln a.$$

当$a=e$时,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$ □

利用等价无穷小的记号,我们可以把上面两例的结果表为:$x\to 0$时

$$\ln(1+x)\sim x,\quad e^x-1\sim x.$$

2.8.3　有界闭区间上连续函数的性质

定义在有界闭区间上的连续函数具有一系列重要的性质,这使得对连续函数的研究及应用比不连续函数的情形要简单得多.

定理 2.8.4(**有界性定理**)　闭区间$[a,b]$上的连续函数$f(x)$必定有界.

证　用致密性定理证明.

假设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上无界,即$\forall n$, $\exists x_n\in[a,b]$,使得

$$|f(x_n)|>n.$$

令n取遍一切自然数,则相应地可得到一数列$\{x_n\}$,其中$x_n\in[a,b]$. 且$|f(x_n)|>n(n=1,2,\cdots)$. 于是便有

$$f(x_n)\to\infty\quad(n\to\infty).$$

根据致密性定理(见2.5节定理2.5.4),有界数列$\{x_n\}$必含有一收敛子列,不妨设为$\{x_{n_k}\}$,$x_{n_k}\to x_0\in[a,b](k\to\infty)$. 对于这个子列,显然也有$|f(x_{n_k})|>n_k$,因此亦有$f(x_{n_k})\to\infty(k\to\infty)$.

另一方面,由$f(x)$在$[a,b]$上的连续性可知$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 再由函数极限与数列极限的关系得

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

这就产生了矛盾. 因此,$f(x)$在$[a,b]$上无界的假设是错误的. 定理得证. □

这个定理的假设有两点，一是$[a,b]$为有界闭区间，一是函数$f(x)$连续. 这两个条件缺一不可. 例如函数$\frac{1}{x}$在开区间$(0,1)$上连续但无界. 又例如$[0,2]$上的函数

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x\neq 1,0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & x=1\end{cases}$$

在$x=1$处发生间断，且函数在$x=1$附近无界.

定理2.8.4可以用数学符号简明地表述如下：

若$f(x)\in C[a,b]$，则$\exists M>0$，使得$|f(x)|\leqslant M\quad(\forall x\in[a,b])$.

定理2.8.5(**最大最小值定理**)　闭区间$[a,b]$上的连续函数$f(x)$必有最大值和最小值.

证　由有界性定理知，$f(x)$在$[a,b]$上有界. 由确界原理(见第1章1.1.4)知，数集$\{f(x)\mid a\leqslant x\leqslant b\}$有上确界$\beta$和下确界$\alpha$，我们证明$f(x)$有最大值，也就是$f(x)$可以达到上确界$\beta$.

根据第1章1.1节定理1.1.3，对于$\varepsilon=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，$\exists x_n\in[a,b](n=1,2,\cdots)$，使得

$$\beta-\frac{1}{n}<f(x_n)\leqslant\beta\quad(n=1,2,\cdots)$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\beta.$$

由致密性定理知，有界数列$\{x_n\}$有一收敛子列$\{x_{n_k}\}$，设$x_{n_k}\to x_0\in[a,b]$，则由子列的性质知

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\beta.$$

再由$f(x)$在x_0点的连续性可推知

$$\beta=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0).$$

这表明上确界β可以在x_0点达到，亦即$f(x)$在$[a,b]$上有最大值.

同理可证$f(x)$有最小值.　□

这个定理是说，若$f(x)\in C[a,b]$，则必$\exists\xi\in[a,b]$及$\eta\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x),\quad f(\eta)=m=\min_{a\leqslant x\leqslant b}f(x).$$

这里，假设条件也是一个不能少的. 例如函数$\arctan x$不能达到其上下确界$\pm\frac{\pi}{2}$，因为它的定义域$(-\infty,+\infty)$是一个无穷区间. 又如函数$\frac{1}{1+e^{1/x}}$即使在有界闭区间$[-1,1]$上也不能达到其上确界1及下确界0，这是因为函数在这个区间上发生间断.

定理2.8.6(**零点存在定理**)　设$f(x)\in C[a,b]$，且$f(a)$与$f(b)$异号，则在(a,b)内至少存在一点ξ，使$f(\xi)=0$.

证 我们用确界原理(见第1章1.1.4)证明. 不妨设$f(a)<0$,$f(b)>0$,令

$$E=\{x\in[a,b]\mid f(x)\leqslant 0\},$$

则因$a\in E$,故E非空,且E有上界,如b就是E的一个上界. 所以E是一个有上界的非空数集,根据确界原理,E有上确界,记为$\xi=\sup E$.

下面先证明$a<\xi<b$. 根据连续函数的保号性质可推知,由$f(a)<0$,$\exists\delta_2>0$,使当$x\in(a,a+\delta_1)$时,有$f(x)<0$;又由$f(b)>0$,$\exists\delta_2>0$,使当$x\in(b-\delta_2,b)$时,$f(x)>0$. 因此得

$$a<a+\delta_1\leqslant\xi\leqslant b-\delta_2<b.$$

再证明$f(\xi)=0$,用反证法. 若$f(\xi)>0$,则$\xi\notin E$,且由连续函数的保号性,$\exists\delta>0$,使当$x\in(\xi-\delta,\xi+\delta)$时,有$f(x)>0$,因此,小区间$(\xi-\delta,\xi+\delta)$内不含集合$E$的点. 这显然与$\xi$是$E$的上确界相矛盾.

若$f(\xi)<0$,则$\exists\delta'>0$,使当$x\in(\xi-\delta',\xi+\delta')$时,有$f(x)<0$. 因此,小区间$(\xi-\delta',\xi+\delta')\subset E$,于是$\xi$不可能是$E$的上确界,这又产生了矛盾.

总之,$f(\xi)>0$及$f(\xi)<0$都是不可能的,所以必有$f(\xi)=0$,定理证毕. □

定理2.8.6的几何意义是明显的:连续曲线由x轴下方跑到x轴上方,中间至少要通过x轴一次(见图2.25).

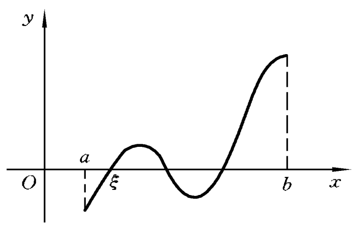


图2.25

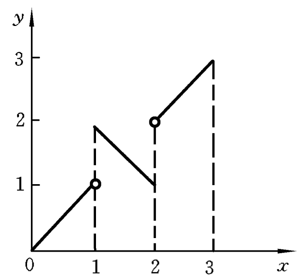


图2.26

从定理2.8.6容易推得下面的结果.

定理2.8.7(**介值定理**) 设$f(x)\in C[a,b]$,η是介于$f(a)$与$f(b)$之间的某个数. 则必存在一点$\xi\in[a,b]$,使得$f(\xi)=\eta$.

证 若η等于$f(a)$或$f(b)$,则取$\xi=a$或b即可. 若$f(a)<\eta<f(b)$,或$f(a)>\eta>f(b)$,作辅助函数$F(x)=f(x)-\eta$,则$F(x)\in C[a,b]$,且

$$F(a)\cdot F(b)=[f(a)-\eta]\cdot[f(b)-\eta]<0.$$

由定理2.8.6知,$\exists\xi\in(a,b)$,使得$F(\xi)=0$,即$f(\xi)=\eta$. 证毕. □

这个定理是说连续函数可以取得$f(a)$与$f(b)$之间的一切值. 换句话说,如果I是以$f(a)$和$f(b)$为端点的区间,则$f([a,b])\supset I$. 反过来,若一函数能取到$f(a)$与$f(b)$之间的一切值,它是否连续呢? 考察函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<1;\\ 3-x, & 1\leqslant x\leqslant 2;\\ x, & 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

这个函数可以取到$f(0)=0$与$f(3)=3$之间的一切值,但它不连续(见图2.26).

推论2.8.1　设$f(x)\in C[a,b]$,则$f(x)$必取得其最大值和最小值之间的任何值.

请读者自己证明.

推论2.8.2　若$f(x)\in C[a,b]$,则值域$J=f([a,b])$也是一个闭区间(可以退化为一点).

证　如果f是常值函数,则J退化为一点.如果f不是常值函数,则J自然不是单点集.由于$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,故有最大值和最小值,它们必含于J中.在J中任取两点$y_1<y_2$,则在$[a,b]$中有两点x_1和x_2使$f(x_1)=y_1$,$f(x_2)=y_2$.由定理2.8.7易知$J\supset[y_1,y_2]$.而y_1和y_2是任意的,所以J必是一个闭区间.　□

例2.8.7　证明方程$x^3+4x^2-3x-1=0$有三个实根.

证　设$f(x)=x^3+4x^2-3x-1$,则$f(x)\in C(-\infty,+\infty)$.

因$f(0)=-1<0$,$f(1)=1>0$,所以$f(x)$在$(0,1)$内至少有一个零点,即方程$f(x)=0$至少有一实根.

又$f(-1)=5>0$,所以方程$f(x)=0$在$(-1,0)$内至少有一实根.

又$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,由极限性质知,$\exists x_0<0$,使$f(x_0)<0$,所以方程$f(x)=0$在$(x_0,-1)$内至少有一实根.三次方程至多有三个实根,故方程恰有三个实根.　□

例2.8.8　证明方程$4-x=2^x$在区间$[1,2]$内有一个根.

证　令$f(x)=4-x-2^x$,易见$f(x)$连续,且

$$f(1)=4-1-2^1=1>0,f(2)=4-2-2^2=-2<0,$$

由定理2.8.6知,$\exists c\in(1,2)$,使$f(c)=0$.　□

2.8.4　函数的一致连续性

我们先来回忆一下连续性定义.函数$f(x)$在x_0点连续是指:$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,$\forall x\in O(x_0,\delta)$,有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.这里的$\delta$一般来说不仅依赖于$\varepsilon$,也依赖于点$x_0$.也就是说,当所讨论的点不同时,$\delta$也会随之而改变(见图2.27).这就是连续性定义的局部性.至于函数在区间上的连续性,我们是用它在这个区间的每一点的连续性来确定的(即是逐点的).其实,我们也可以直接定义函数在区间上的连续性,而不必依赖于函数在一点的连续性概念(即不是逐点的).我们的基本出发点是:如果对区间I中的所有

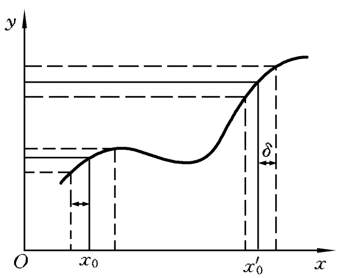


图2.27

不同点,能求出一个同样大小的δ,使 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立,就称 $f(x)$ 在 I 上是一致连续的.

定义 2.8.1(一致连续性)　设函数 $f(x)$ 定义在区间 I(或开或闭或无穷)上.如果 $\forall \varepsilon>0,\exists \delta>0,\forall x_1,x_2\in I:|x_1-x_2|<\delta$,有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**一致连续**的.

换句话说,$f(x)$ 在区间 I 上一致连续,是指它在 I 的任意两个彼此充分靠近的点上的值之差,就绝对值来说,可以任意地小.我们之所以称这种连续性是**一致的**,是因为在这里,差 $|f(x_1)-f(x_2)|$ 的任意小并不依赖于点 x_1 和 x_2 在区间 I 上的位置,而只要它们彼此充分接近就行了.简单地说,定义中的δ仅与ε有关,而与点的位置无关.

一致连续的概念与我们在本章2.7.1给出的函数在区间上连续的概念有什么联系呢?首先,这几乎是显然的,即从函数在区间上一致连续性可以推出它在该区间的每一点的连续性.事实上,假设 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续,又 x_0 是 I 的任一点,则当 x 充分逼近 x_0 时,$|f(x)-f(x_0)|$ 可以任意小,而这正表示 $f(x)$ 在 x_0 点连续.然而,比这个更加深刻得多的事实是:从函数在一个有界闭区间上的每一点的连续性就足以推出它在这个闭区间上的一致连续性.

定理 2.8.8(一致连续性定理)　闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 必定在 $[a,b]$ 上一致连续.

由于这个定理的证明比较困难,在此略去.有兴趣的读者可参看数学专业的数学分析教材.

注意,定理2.8.8对开区间 (a,b) 一般是不成立的.

例 2.8.9　$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 的每一点都连续,但在该区间并不一致连续.

证　对于任意小的 $\delta>0$,令 $x_1=\delta,x_2=2\delta$,则 $|x_1-x_2|=\delta$,而

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\frac{1}{\delta}-\frac{1}{2\delta}=\frac{1}{2\delta}.$$

这里 $|x_1-x_2|$ 可以任意小,但 $|f(x_1)-f(x_2)|$ 可以任意大.　□

函数 $f(x)=\tan x$ 在开区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 也有类似的情形.

例 2.8.10　证明函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证　$\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,有不等式

$$|\sin x_1-\sin x_2|=2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\leqslant|x_1-x_2|,$$

$\forall \varepsilon>0$,只要取 $\delta=\varepsilon$,则当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,就有

$$|\sin x_1-\sin x_2|\leqslant|x_1-x_2|<\varepsilon,$$

由定义2.8.1知,$\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.　□

习　题　2.8

(A)

1. 回答下列问题：

(1) 连续函数的运算法则有哪些？

(2) 你怎样利用这些运算法则求函数极限？

(3) 一致连续是怎样的一个概念？

(4) 连续性与一致连续性的概念有什么区别？有什么联系？

(5) 若$f(x)\in C[a,b]$，c和d是$[a,b]$内任意两点，那么$f(x)$是否可以取到介于$f(c)$和$f(d)$之间的任何值？你能证明你的结论吗？

2. 确定下列函数的连续区间：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-x^2-2x}$；　(2) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x^3}$；

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$　(4) $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin x)$.

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\ln x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\cos\dfrac{x^2-1}{x-1}$；　(3) $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\ (a>0)$；

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\dfrac{x}{2}\right)^{3\sec x}$；　(5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}}$；　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x)^{\cos\frac{1}{x}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$；　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3x}}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(\cos^2 x+\sqrt{1-x^2})}{e^x+\sin x}+(1+x)^x\right]$.

4. 试利用定理2.8.7证明：每一个正数有一个平方根. 换句话说，若$\alpha>0$，则有一数x能满足$x^2=\alpha$.

5. 证明下列方程在给定区间上至少有一根：

(1) $x2^x=1, 0\leqslant x\leqslant 1$；　(2) $x^3+px-q=0\ (p>0), -\infty<x<+\infty$.

6. 设$f(x)\in C[0,1]$，并且$\forall x\in[0,1]$，$0<f(x)<1$(画一图). 求证：$\exists x_0\in(0,1)$，使得$f(x_0)=x_0$(称方程$f(x)=x$的根为函数f的**不动点**).

7. 设$f(x)$、$g(x)\in C[a,b]$，且$f(a)<g(a)$，$f(b)>g(b)$. 证明：$\exists c\in(a,b)$，使得$f(c)=g(c)$.

(B)

1. 闭区间$[a,b]$上的连续函数$f(x)$的值域也是一个闭区间吗？试证明你的结论.

2. 证明：若$f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$都存在，则$f(x)$必有界.

3. 设$f(x)\in C(a,b)$，且$f(a^+)$与$f(b^-)$都存在. 证明$f(x)$在(a,b)一致连续.

4. 设$f(x)$在$[a,b]$上满足李普希兹条件：

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|\quad(\forall x,y\in[a,b]),$$

其中L为常数. 证明$f(x)$在$[a,b]$上一致连续.

答案与提示

(A)

2. (1) $(-\infty,-1),(-1,0),(0,2),(2,+\infty)$;

   (2) $(-\infty,0),(0,1),(1,+\infty)$; (3) $(-\infty,0),(0,+\infty)$;

   (4) $(k\pi,(k+1)\pi),k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$.

3. (1) -1; (2) $\cos 2$; (3) 0; (4) e^3; (5) 1; (6) $\frac{\pi}{2}$; (7) e^{-1}; (8) $e^{-\frac{1}{3}}$; (9) $1+\ln 2$.

4. 令$f(x)=x^2$,取区间$[0,b]$,使$f(b)>a>f(0)$.

5. (1)在$[0,1]$上考察$f(x)=x2^x-1$; (2)令$f(x)=x^3+px-q$,考察$f(0)$与$f(q^{1/3})$的符号.

6. 对$\varphi(x)=f(x)-x$在$[0,1]$上应用定理2.8.7.

7. 对$\varphi(x)=f(x)-g(x)$在$[a,b]$上用定理2.8.7.

(B)

1. 是的.利用介值定理证明.

2. 利用极限定义证.

3. 补充定义$f(a)=f(a^+),f(b)=f(b^-)$.

4. $\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\frac{\varepsilon}{L}$.

总 习 题 (2)

1. 在极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$或$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的精确定义中,

   (1) 先有$\varepsilon(>0)$,还是先有N(或δ)?

   (2) 为什么ε要任意给定?

   (3) 对于给定的ε,对应的N(或δ)是否唯一?

   (4) 当ε减小时,N(或δ)一般会怎样变化?

   (5) $0<|x-x_0|<\delta$中为什么要取绝对值?不取绝对值可以吗?不取绝对值表示什么意思?只写$|x-x_0|<\delta$可以吗?$|x-x_0|>0$表示什么意思?

   (6) $f(x_0)\neq A$,或$f(x_0)$没有意义,对$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$有无影响?为什么?

   (7) 定义中的两个不等式表示什么意思?

2. 用极限的精确定义证明:

   (1) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f^2(x)=A^2$;

   (2) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$.

3. 计算下列极限:

   (1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n+1}}{2+x^{2n}}$；

(5) 对$-1\leqslant x\leqslant 1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(1+\sin\pi x)^n+\sin\pi x}{(1+\sin\pi x)^n+1}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2\dfrac{x}{2}}$；　(7) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$；　(8) $\lim\limits_{\alpha\to\pi}\dfrac{\sin\alpha}{1-\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right)^2}$；

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^x$；　(10) $\lim\limits_{n\to\infty}n\sqrt{n}\left(\tan\dfrac{x}{\sqrt{n}}-\sin\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)$；

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n})$；　(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

4. 设$[x]$表示不超过x的最大整数部分，求$\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

5. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x+3^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$.

6. 设x为任意实数，求$\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n个} x$.

7. 设$x_1=4$，$x_n=\dfrac{1}{x_{n-1}}+\dfrac{x_{n-1}}{2}$ $(n=2,3,\cdots)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

8. 选择题(正确答案只有一个)：

(1) 函数$f(x)=x\sin x$(　　).

(A) 当$x\to\infty$时为无穷大；　(B) 在$(-\infty,+\infty)$内有界；

(C) 在$(-\infty,+\infty)$内无界；　(D) 在$x\to\infty$时有有限极限.

(2) 曲线$y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$(　　).

(A) 没有渐近线；　(B)仅有水平渐近线；

(C) 仅有垂直渐近线；　(D) 既有水平渐近线又有垂直渐近线.

(3) 当$x\to 1$时，函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限(　　).

(A) 等于2；　(B) 等于0；　(C) 为∞；　(D) 不存在但不为∞.

(4) 曲线$y=e^{1/x^2}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$的渐近线有(　　)条.

(A) 1条；　(B) 2条；　(C) 3条；　(D) 4条.

9. 当$x\to 0$时，试确定下列无穷小对于x的阶数：

(1) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$；　(2) $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4}}$；

(3) $\dfrac{1}{1-x}-1-x-x^2$；　(4) $2\sin x-\sin 2x$.

10. 证明：若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

11. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，求常数$a,b$.

12. 已知$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+bx+c}{1-x}=5$，求常数$b,c$.

13. 试利用等价无穷小代换求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

14. 设$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时,$\alpha(x)\to 0$,$\beta(x)\to 0$,且$\beta(x)$是$\alpha(x)$的高阶无穷小. 证明:存在x_0的一个空心邻域$\mathring{O}(x_0)$,在此邻域内表达式$\alpha(x)+\beta(x)$的正负号由$\alpha(x)$确定(或存在充分大的$X>0$,使当$|x|>X$时,表达式$\alpha(x)+\beta(x)$的正负号由$\alpha(x)$确定).

15. 指出下列函数的间断点(若有的话)及其类型. 如果是可去间断点,则补充函数的定义使之连续.

(1) $y=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$;　(2) $y=\dfrac{e^2+e^{\frac{1}{x}}}{e^2-e^{\frac{1}{x}}}$;　(3) $y=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\leqslant 1,\\ |x-1|, & |x|>1;\end{cases}$

(4) $y=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & -1\leqslant x<0;\end{cases}$　(5) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3nx}{1-nx}$.

16. 设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}, & x<0,\\ b, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}[\ln x-\ln(x^2+x)], & x>0.\end{cases}$试问$a,b$为何值时,$f(x)$为连续函数.

17. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$为连续函数,试确定常数$a$和$b$.

18. 设有函数$f(x)=\begin{cases}x, & x<1,\\ a, & x\geqslant 1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}b, & x<0,\\ x+2, & x\geqslant 0.\end{cases}$问当$a,b$为何值时,$F(x)=f(x)+g(x)\in C(-\infty,+\infty)$.

19. 设$y=\begin{cases}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ e^x+\beta, & x\leqslant 0.\end{cases}$试根据不同的$\alpha$和$\beta$,讨论函数$y$在$x=0$处的连续性(包括左、右连续性以及间断点的类型).

20. 设函数$\varphi(x)$在$x=0$连续,且$\varphi(0)=0$,$|f(x)|\leqslant\varphi(x)$. 证明$f(x)$在$x=0$连续.

21. 设$f(x)$满足$f(x+y)=f(x)+f(y)$,且$f(x)$在$x=0$连续. 证明$f(x)$在任意点x处都连续.

22. 设$f(x)$是周期函数,且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 试证明$f(x)\equiv 0$.

23. 设$f(x)$为连续函数,x_1和x_2($x_1<x_2$)是方程$f(x)=0$的相邻的两个根. 又存在点$c\in(x_1,x_2)$,使$f(c)>0$. 证明在区间(x_1,x_2)内有$f(x)>0$.

24. 证明方程$\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{7}{x-2}+\dfrac{16}{x-3}=0$有一根介于1与2之间,另有一根介于2与3之间.

25. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$;　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$;　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\alpha x}-\sqrt[m]{1+\beta x}}{x}\left(\dfrac{\alpha}{n}\neq\dfrac{\beta}{m}\right)$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,b>0,c>0)$;　(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{2x}(e^{2x}-1)^2\arcsin x^2}{(\sqrt[4]{1+x^4}-1)\ln(1+8x)}$.

答案与提示

3. (1) $\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$;　(2) $\dfrac{15}{2}$;　(3) $n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$;

(4)原式$=\begin{cases}\dfrac{2}{3},x=-1,\\ 0,x=1,\\ \dfrac{1}{2},|x|<1,\\ -x,|x|>1;\end{cases}$　　(5)原式$=\begin{cases}\sin\pi x, & -1<x\leqslant 0,\\ -\dfrac{1}{2},x=-1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1,\\ x, & 0<x<1;\end{cases}$

(6)4；　(7)e^3；　(8)$\dfrac{\pi}{2}$；　(9)1；　(10)$\dfrac{x^3}{2}$；　(11)0；　(12)$\dfrac{\sin x}{x}$.

4. 利用$\dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant\dfrac{1}{x}(x\neq 0)$,$\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

5. 利用$0\leqslant\left(\dfrac{2^x+3^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant\left(\dfrac{3^x+3^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$,原式$=0$.

6. 先对$0\leqslant x\leqslant\pi$证明$y_n=\sin\sin\cdots\sin x$单调减少有下界.从而$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.

7. 先证$\{x_n\}$单调减少有下界,再求出$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

8. (1)(C)；　(2)(D)；　(3)(D)；　(4)(B).

9. (1)1；　(2)$\dfrac{2}{3}$；　(3)3；　(4)3.

11. $a=1,b=-1$.

12. $b=-7,c=6$.

13. $\dfrac{4}{3}$.

15. (1)$x=0$为跳跃间断点;$x=1$为可去间断点,可补充定义$y(1)=\dfrac{1}{2}$;$x=-1$为无穷间断点;

(2)$x=0$为跳跃间断点,$x=\dfrac{1}{2}$为无穷间断点；　(3)$x=-1$为跳跃间断点;

(4)$x=0$为可去间断点,令$y(0)=1$；　(5)$x=0$为可去间断点,令$y(0)=-3$.

16. $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2},b=-1$.

17. $a=0,b=1$.

18. $a=1,b=2$.

19. $\alpha>0,\beta=-1$时,y在$x=0$连续;$\alpha>0,\beta\neq-1$时,$x=0$为第一类间断点;$\alpha\leqslant 0$时,y在$x=0$为左连续,右间断(第二类).

25. (1)$\dfrac{a^2}{b^2}$；　(2)$\dfrac{1}{2}$；　(3)$\dfrac{\alpha}{n}-\dfrac{\beta}{m}$；　(4)$\sqrt[3]{abc}$；　(5)2.

第 3 章　一元函数微分学

在我们根据需要研究那些变化着的量时,其变化的**快慢**,即**速度**问题,常常是主要的问题之一. 飞机或火车运动的速度是它们的工作效能的重要标志. 经济增长的快慢反映出一个国家的经济实力. 一条由比较低的地方上升到较高地方的公路,它的险峻程度直接与这条路在当地升高的快慢密切相关. 变化的速度(即**变化率**)涉及广阔的领域. 研究这类问题的工具就是函数的导数. 知道了函数在各个点上的变化趋势,就可以在一点估计函数的微小改变量. 这微小的改变量就是函数的微分.

本章将学习如何求导数和微分,并将进一步研究导数与微分的一些更深刻的性质,这些性质是微分学的理论基础,其中有一系列定理起着基础的作用,我们把这些定理都叫作“微分中值定理”. 之所以这样称呼,是因为在某种条件下,在给定的区间(a,b)上可以找到这样一点ξ,使$f(x)$在闭区间$[a,b]$上的某些性质可以用它的导数在点ξ的值$f'(\xi)$来表示. 这些定理还有一个很好的功用,那就是沟通函数f及其导数f'之间的信息,使得我们可以利用导数来研究函数. 本章还将介绍如何利用导数来研究函数的性态,并给出导数在一些实际问题中的应用.

3.1　导数概念

3.1.1　导数的定义

导数概念是 17 世纪时由两个问题产生的,这两个问题就是速度问题和切线问题. 我们先考察瞬时速度问题.

非匀速运动的瞬时速度　假定知道物体的运动规律为$s=f(t)$,其中t表示时间,距离s是t的函数. 我们希望确定t时刻物体运动的瞬时速度. 当时间从t变化到$t+\Delta t$时,时间的改变量为Δt,在这段时间内物体经过的距离为

$$\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t),$$

于是,物体在时间间隔Δt内运动的**平均速度**是

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}. \tag{3.1.1}$$

很显然,当改变量Δt很小时,速度变化不大,可近似地看作匀速运动,$\frac{\Delta s}{\Delta t}$可以看成物体在时刻$t$的瞬时速度的近似值. 说得确切一些,就是,只要把$\Delta t$取得充分小,$\frac{\Delta s}{\Delta t}$就可以任意地逼近所要找的瞬时速度. 用极限的语言说. 就是. 当$\Delta t\to 0$时. 我们所要找的

瞬时速度 $v(t)$就是(3.1.1)式的极限,即

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}. \tag{3.1.2}$$

因此,可以给瞬时速度下一个定义:运动着的物体的瞬时速度就是它所走过的路程与时间之比在时间趋于零时的极限(如果这个极限存在的话).瞬时速度是一个理论概念,一个抽象概念,它与任何观测得出的量都不同,领会这一点是重要的.然而,认为瞬时速度与平均速度无关也是不对的.请记住瞬时速度 $v(t)$不等于 Δt 的任何特定值时的平均速度$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$,而是当 $\Delta t\to 0$ 时这些平均速度的极限.

例 3.1.1　真空中的自由落体的运动规律为

$$s=f(t)=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度.考虑时间间隔$[t,t+\Delta t]$,在 Δt 很小时,在局部上可以把变速运动近似看作匀速运动,得到在 Δt 时间内的平均速度

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=gt+\frac{1}{2}g\Delta t,$$

于是在时刻 t,落体的瞬时速度为

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{1}{2}g\Delta t\right)=gt. \qquad \square$$

在上面求运动物体的瞬时速度时,也遇到求改变量之比的极限的问题.由此我们引入下面的定义.

定义 3.1.1(**导数**)　设 $y=f(x)$在(a,b)上定义,$x\in(a,b)$.若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\quad x+\Delta x\in(a,b)$$

存在,则称函数 $f(x)$在 x 点**可导**,称极限值为 $f(x)$在 x 点的**导数**,记作

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

如果 $f(x)$在(a,b)内每一点都有导数,则 $f'(x)$也是 x 的函数,它是由 $f(x)$导出的一个新函数,称为 $f(x)$的**导函数**,简称**导数**,常记为 f'.

在前面讨论的问题中,瞬时速度是距离对时间的导数,记成

$$v(t)=s'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

导数的记号 $f'(x)$或 y'是拉格朗日引入的.牛顿用 $\dot{y}$ 表示导数,在一般物理书中常用 $\dot{s}$ 表示瞬时速度.莱布尼兹则引入记号

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

来表示导数.象征着导数是改变量之比的极限.并把导数称为“微商”.现在我们只能

把$\frac{dy}{dx}$作为一个整体记号来理解,等到学过微分后,也可以作为比式来理解.

例 3.1.2　设$f(x)=c$(常数),则$f'(x)=0$.

证　因为
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{c-c}{\Delta x}=0,$$
所以
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=0.$$
由于常数函数是不变的,因此结论$(c)'=0$是毫不奇怪的. □

例 3.1.3　设$I(x)$是恒等函数,即$I(x)=x$,则
$$I'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{I(x+\Delta x)-I(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=1.$$
此外,很容易算出,若f是线性函数
$$f(x)=ax+b,$$
则
$$f'(x)=a.$$ □

下面我们举一个不可导函数的例子.

例 3.1.4　设$f(x)=|x|$,则$f'(0)$不存在.

证　差商
$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & \Delta x>0,\\ -1, & \Delta x<0.\end{cases}$$
因此
$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=-1,\quad \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=1.$$
从而$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$不存在,即$f'(0)$不存在. □

例 3.1.4 告诉我们,**不是所有的连续函数都可导**.但是,由定义 1.1.1 可以推知,**可导函数一定连续**(请读者自己证明).

利用单侧极限可以定义函数的单侧导数.如果左(右)极限
$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\quad\left(\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)$$
存在,则称此极限值为函数$f(x)$在x点的**左导数**(**右导数**),记作
$$f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\quad\left(f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right).$$
利用极限与左、右极限的关系立即可得:

$f(x)$**在**x_0**点可导**$\Leftrightarrow f(x)$**在**x_0**的左、右导数存在且相等**.

例 3.1.4 中的函数$f(x)=|x|$在$x=0$点的左、右导数分别为-1和1,所以$f'(0)$不存在.

我们说函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导,是指它在$[a,b]$的每一点的导数存在,区间端点的导数理解为单侧导数.

例 3.1.5　设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x. & x>0.\end{cases}$　则

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\begin{cases}\Delta x, & \Delta x<0,\\ 1, & \Delta x>0.\end{cases}$$

因此
$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=0.$$

但
$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=1,$$

故 $f'(0)$ 不存在. 不过,当 $x\neq 0$ 时 $f'(x)$ 是存在的,不难算出

$$f'(x)=\begin{cases}2x, & x<0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$ □

下面把例3.1.4和例3.1.5中的函数 f 及其导数 f' 的图像画出来,见图3.1和图3.2.

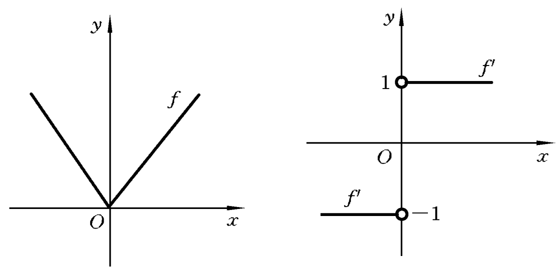


图3.1

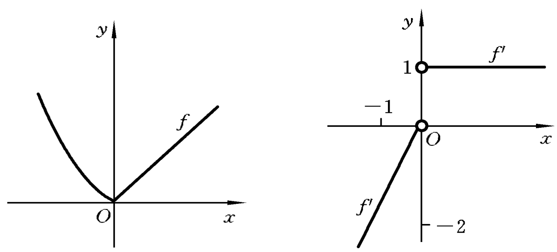


图3.2

由图中可以看出,在 $x=0$ 这个不可导点处,函数 f 的图形是“不光滑”的——有一个尖点. 有趣的是,在尖点出现的地方,即 $x=0$ 处,两个函数的导函数均发生间断.

下面我们再给出几个简单函数的导数.

例3.1.6　正弦函数和余弦函数的导数. 设 $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$, 则

$$f'(x)=\cos x,\quad g'(x)=-\sin x.$$

证　因为 $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$

$$= \frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}},$$

所以
$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right) = \cos x.$$

对于$(\cos x)' = -\sin x$ 可类似证明. □

例 3.1.7　对数函数的导数. 设$f(x) = \log_a x\ (x>0)$,则

$$f'(x) = \frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}.$$

证　因为
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}},$$

所以
$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}.$$

特别地,以 e 为底的自然对数,有

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

此时导数形式最简单,这也是高等数学常用自然对数的理由. □

例 3.1.8　设$f(x) = x^{\frac{1}{n}}$(n 为正整数,$x>0$),则

$$f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

证　因为

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n}}}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n}}}{\left[(x+\Delta x)^{\frac{1}{n}}\right]^n-\left[x^{\frac{1}{n}}\right]^n}$$
$$= \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left[(x+\Delta x)^{\frac{1}{n}}\right]^k\left[x^{\frac{1}{n}}\right]^{n-1-k}},$$

所以
$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\left[\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left[(x+\Delta x)^{\frac{1}{n}}\right]^k\left[x^{\frac{1}{n}}\right]^{n-1-k}\right]} = \frac{1}{\left[\sum\limits_{k=0}^{n-1}x^{1-\frac{1}{n}}\right]}$$
$$= \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$ □

对于$(x^n)' = nx^{n-1}$(n 为非负整数),请读者自行给出证明.

3.1.2　导数的几何意义

导数概念的另一个来源是几何方面的问题. 在天文观察中离不开望远镜,伽利略

发明了第一架天文望远镜,为了改进望远镜,就需要研究曲线的法线,而求曲线的法线引出了求曲线的切线的问题.

设 $y=f(x)$ 表示一条平面曲线,$P_0(x_0,f(x_0))$ 表示曲线 $y=f(x)$ 上的一定点,$P(x,f(x))$ 表示曲线上一动点. 曲线上过 P_0、P 两点的割线的斜率为 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. 由图 3.3 知

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\tan\alpha.$$

当 $x\to x_0$ 时,点 P 沿曲线趋向点 P_0,同时割线 $\overline{P_0P}$ 也随之绕着 P_0 点转动,当 P 移向 P_0 时,若割线 $\overline{P_0P}$ 趋向于某一极限位置(即某一直线),则称割线的极限位置为曲线在 P_0 点的**切线**. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导,则 $x\to x_0$ 时,割线的斜率

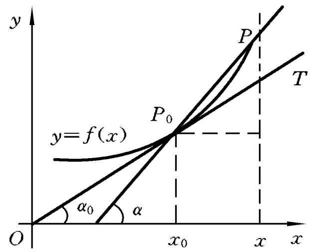


图 3.3

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\tan\alpha$$

的极限为 $f'(x_0)$,即

$$\tan\alpha_0=\lim_{x\to x_0}\tan\alpha=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).$$

这表明割线 $\overline{P_0P}$ 的极限位置就是过 P_0 点并以 $\tan\alpha_0$ 为斜率的直线 T. 根据切线的定义,T 就是曲线在 P_0 点的切线.

因此,函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点可导,在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在 $P_0(x_0,f(x_0))$ 点的切线存在;导数 $f'(x_0)$ 就是曲线 $y=f(x)$ 在 $P_0(x_0,f(x_0))$ 点的切线的斜率. 由直线的点斜式方程,可以写出曲线过 P_0 点的切线方程

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

及过 P_0 点的法线方程

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\quad (设\ f'(x_0)\neq 0).$$

反过来,如果曲线 $y=f(x)$ 在 $P_0(x_0,f(x_0))$ 点的切线存在,则函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点导数 $f'(x_0)$ 或者存在,或者为 $+\infty$、$-\infty$、∞. 例如函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $(0,0)$ 点的切线存在,而在 $x=0$ 的导数为 $+\infty$.

例 3.1.9　求抛物线 $y=x^2$ 过点 (x_0,x_0^2) 的切线方程.

解　因 $y'=2x$,$y'(x_0)=2x_0$,所以切线方程为

$$y-x_0^2=2x_0(x-x_0),$$

化简得

$$y=2x_0\left(x-\frac{x_0}{2}\right).\tag{3.1.3}$$

□

下一个例题讨论光在镜面的反射. 我们先叙述光的反射定律.

① 在均匀介质中光沿直线传播.

② 当光线碰到平镜时,光线要反射. 入射线与镜面垂线的夹角(记作 i)等于反射线与镜面垂线的夹角(记作 r),见图 3.4. 角 i 称为**入射角**,角 r 称为**反射角**.

③ 光在曲面镜上的反射也遵守同样的法则,即

$$入射角 = 反射角$$

此时镜面的垂线定义为与镜面在入射点的切线相垂直的直线(即法线,见图 3.4 中的虚线).

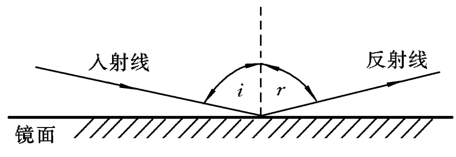


图 3.4

例 3.1.10 研究光线从位于 xOy 平面上一抛物镜面的反射,这个抛物镜面由抛物线 $y = x^2$ 绕 y 轴旋转而成. 我们要计算当入射线与 y 轴平行时,反射线的轨迹,特别希望求出反射线与 y 轴交点 F 的位置(见图 3.5). 令 P 表示入射点, G 表示过 P 点的切线与 y 轴的交点. 从图上可得以下的几何关系:因为 $r = i$,所以 ΔFGP 是等腰三角形,因而

$$\overline{PF} = \overline{FG}. \tag{3.1.4}$$

设 $P = (a, a^2)$, $F = (0, k)$. 由勾股定理知

$$\overline{PF}^2 = a^2 + (a^2 - k)^2. \tag{3.1.5}$$

下面计算 G 点的 y 坐标. 由于 G 点是切线与 y 轴的交点,所以 G 的 y 坐标是切线方程在 $x = 0$ 的值. 根据例 3.1.9 中的切线方程(3.1.3)可知, G 的坐标是 $(0, -a^2)$. 于是

$$\overline{FG} = k - (-a^2) = k + a^2. \tag{3.1.6}$$

由(3.1.4)、(3.1.5)、(3.1.6)式得

$$a^2 + (a^2 - k)^2 = (k + a^2)^2,$$

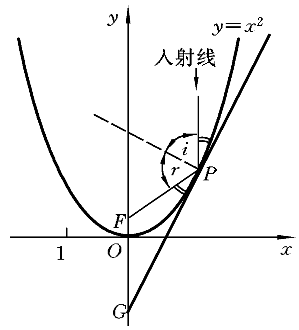


图 3.5

从而求得

$$k = \frac{1}{4}.$$

这就得出了一个有趣的结论:对所有点 P,点 F 的位置都相同,即一切与 y 轴平行的入射线的反射线都经过点 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$. 这个点称为曲线 $y = x^2$ 的**焦点**.

从很远的物体如一颗星星上发来的射线是非常接近于平行线的. 因此,若抛物镜的轴指向这颗星星,那么所有射线都反射到焦点. 利用这个原理可以制造望远镜. 由于太阳光线几乎是平行的,因此可以用一个抛物镜很好地聚焦. 我们知道,1990 年北京亚运会的圣火以及 1996 年第 26 届奥运会的圣火,都是利用这个原理点燃的.

如果把上述问题反推回去,就可得出这样的结论:当我们把光源放置在焦点 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 处时,光线经抛物镜面反射后成平行光束. 而这一点正是制造探照灯的根据.

习　题　3.1

(A)

1. 回答下列问题：

(1) 导数是描述客观世界中什么现象的变量？你能举几个例子吗？

(2) 连续函数是否可导？用例子说明你的结论.

(3) 如果 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，那么是否有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+o(1)\quad(\Delta x\to 0)?$$

(4) 什么叫左导数和右导数？它与导数有什么区别和联系？

(5) 符号 $f'_+(x_0)$ 与 $f'(x_0^+)$ 是一回事吗？为什么？

(6) 导数的几何意义是什么？

(7) 曲线 $y=f(x)$ 过点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线方程和法线方程是怎样的？

2. 试判断下列命题的真假，并说明理由.

(1) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，若 $f(0)=0$，则 $f'(0)=0$，反之也成立；

(2) 若 $f(x)$ 在 x_0 点可导，且在 $O(x_0)$ 内 $f(x)>0$，则有 $f'(x_0)>0$；

(3) 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上为偶函数，且 $f'(0)$ 存在，则 $f'(0)=0$；

(4) 设 $\varphi(x)=f(x)+g(x)$，若 $\varphi(x)$ 在 x_0 点可导，则 f、g 中至少有一个在 x_0 点可导；

(5) 设 $\varphi(x)=f(x)g(x)$，若 $\varphi(x)$ 在 x_0 点可导，则 f、g 中至少有一个在 x_0 点可导；

(6) 若 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则 $|f(x)|$ 在 x_0 点也可导，反之也成立.

3. 下列各式可否成为 $f(x)$ 在 x_0 点的导数的定义？请说明理由.

(1) $y=f(x)$ 在 (a,b) 内定义，$x_0\in(a,b)$. 若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$ 存在，则称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 点的导数.

(2) $y=f(x)$ 在 (a,b) 内定义，$x,x_0\in(a,b)$，若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 点的导数.

(3) $y=f(x)$ 在 (a,b) 内定义，$x_0\in(a,b)$，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$ 存在，则称该极限为 $f(x)$ 在 x_0 点的导数.

4. 设 $f(x)$，$\varphi(x)$ 在 (a,b) 内定义，$x_0\in(a,b)$. 并且对任何 $x\in(a,b)$，有 (1) $f(x)-f(x_0)=\varphi(x)(x-x_0)$；(2) $\varphi(x)$ 在 x_0 点连续. 求证：$f(x)$ 在 x_0 点可导，且 $f'(x_0)=\varphi(x_0)$.

5. 设 $f(x)$ 在 a 点可导，求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+nh)-f(a-mh)}{h}$.

6. 已知物体的运动规律为 $s=t^3$(m)，求该物体在 $t=3$ s 时的速度.

7. 工厂生产 x 件某产品的总成本 y 用函数 $y=C(x)$ 表示，即总成本是产品数量的函数. 我们希望知道总成本随产出增加(或减少)的变化率. 显然，每件产品的平均成本为 $\dfrac{C(x)}{x}$. 如果产出从某一水平 x 增加一个量 Δx，相应地，总成本就增加 $\Delta y=C(x+\Delta x)-C(x)$. 于是每单位产出增量的

平均成本就是$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{C(x+\Delta x)-C(x)}{\Delta x}$. 试求产品数量为$x_0$时总成本关于产品数量的变化率，经济学中称之为产品的**边际成本**.

8. 设有需求函数$y=f(x)$,其中x表示产品件数,y表示单价,则总收益R为x与y的乘积,即$R(x)=xy=xf(x)$. 总收益随需求变化的变化率即总收益对x的导数,称之为**边际收益**. 现在考虑需求函数为$3x+4y=10$,即$y=\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{4}x$,求边际收益$R'(x)$.

9. 利用定义求下列函数在$x=0$处的导数：

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

10. 在曲线$y=2+x-x^2$上的哪些点其切线

(1) 平行于x轴?

(2) 平行于第一象限角的平分线?

11. 求曲线$y=\dfrac{1}{x}$过点$(1,1)$的切线.

12. 给定抛物线$y=x^2-x+3$,求过点$(2,5)$的切线与法线方程.

13. 在曲线$y=2\sin x\,(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$上求出“曲线的坡度”(指$|y'|$)大于1的区域.

(B)

1. 试确定常数a与b的值,使下列函数在$x=1$处可导：

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x>1,\\ ax+b, & x\leqslant 1;\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2}, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1.\end{cases}$

2. 设$f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-10000)$,求$f'(0)$.

3. 证明:(1) 偶函数的导数是奇函数;(2) 奇函数的导数是偶函数.

4. 证明周期函数的导数仍为周期函数.

5. 设$f(x)=|x-a|\varphi(x)$,$\varphi(x)$连续且$\varphi(a)\neq 0$. 证明$f(x)$在a点不可导.

6. 给定曲线$y=x^2+5x+4$.

(1) 确定b,使直线$y=3x+b$为曲线的切线;

(2) 确定m,使直线$y=mx$为曲线的切线.

7. 求曲线$y=x^2-2x$和$y=-x^2+1$分别在点$(2,0)$与$(1,0)$的切线的交点.

8. 求一条直线,使它与两个函数$f(x)=x^2$和$g(x)=x^2-2x$的图形相切.

9. 曲线$y=\ln x$与x轴的交角如何?

10. 证明抛物线$y=a(x-x_1)(x-x_2)\,(a\neq 0,\,x_1<x_2)$与$x$轴相交所成两角$\alpha$及$\beta$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$彼此相等.

答案与提示

(A)

2. (1)错; (2)错; (3)对; (4)错; (5)错; (6)错.

3. (1)可以； (2)可以； (3)不能.

5. $(m+n)f'(a)$.

6. 27 m/s.

8. $\frac{5}{2}-\frac{3}{2}x$.

9. $f'(0)=0$.

10. (1)点$\left(\frac{1}{2},\frac{9}{4}\right)$； (2)点$(0,2)$.

11. $y=-x$.

12. 切线$y=3x-1$,法线$x+3y-17=0$.

13. $|x|<\frac{\pi}{3}$及$\frac{2\pi}{3}<|x|<\pi$.

(B)

1. (1)$a=2,b=-2$； (2)$a=-1,b=2$.

2. 10000!.

5. $f'_-(a)=-\varphi(a),f'_+(a)=\varphi(a)$.

6. (1)$b=3$； (2)$m=9$和$m=1$.

7. $\left(\frac{3}{2},-1\right)$.

8. $y+x=-\frac{1}{4}$.

9. $\theta=45°$.

3.2 求导法则

我们将证明,可导函数的和、差、积、商、复合及反函数同样是可导的,并且给出相应的求导法则.

3.2.1 函数和、差、积、商的导数

定理 3.2.1(**和的导数**) 设f和g是可导函数,则它们的和函数是可导的,且

$$(f+g)'=f'+g'. \tag{3.2.1}$$

证 令$y(x)=f(x)+g(x)$,则差商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]}{\Delta x}$$

$$=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x},$$

因f与g均可导,所以当$\Delta x\to 0$时,上式后端两项分别趋向于$f'(x)$和$g'(x)$,故得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$=f'(x)+g'(x).$$

即
$$(f+g)'=f'+g'.$$ □

完全类似地,任何有限个可导函数之和的导数等于它们的导数之和.

定理 3.2.2(**积的导数**) 设 f 和 g 是可导函数,则它们的乘积也是可导的,且
$$(fg)'=f'g+fg'. \tag{3.2.2}$$

证 令 $y(x)=f(x)g(x)$,则差商
$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\\&=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}.\end{aligned}$$
令 $\Delta x\to 0$,并利用可导必连续的性质,得
$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x)\right]\\&\quad+\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]\\&=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),\end{aligned}$$
即
$$(fg)'=f'g+fg'.$$ □

当 $f=k$ 是常数时,因 $f'=0$,由(3.2.2)有
$$(kg)'=kg',\quad k\text{ 为常数}. \tag{3.2.3}$$

根据这两个法则,若我们知道一些函数的导数,我们就能够求出由这些函数经过加法和乘法运算所产生的新函数的导数.

例如,在本章3.1.1中我们已得到求导公式:
$$(x^n)'=nx^{n-1}\quad(n\text{ 为非负整数}).$$
这样一来,对多项式
$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$
应用求导的和、积法则以及 x^n 的导数公式,就可得到
$$P'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1.$$

例 3.2.1 若 $P(x)=x^5+3x^2-2x+7$,则
$$P'(x)=5x^4+6x-2.$$ □

公式(3.2.2)还可推广到有限个函数的情形:
$$(f_1f_2\cdots f_n)'=f_1'f_2\cdots f_n+f_1f_2'\cdots f_n+\cdots+f_1f_2\cdots f_n'. \tag{3.2.4}$$

定理 3.2.3(**商的导数**) 设 f 和 g 是可导函数,并且对于 g 的定义域中的每个 x,$g(x)\neq 0$.则商 $\frac{f}{g}$ 也是可导的,且
$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}. \tag{3.2.5}$$

证 我们先证明

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}. \tag{3.2.6}$$

为此,令 $y(x)=\dfrac{1}{g(x)}$,则

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{1}{g(x+\Delta x)} - \frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}.$$

令 $\Delta x\to 0$,得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

所以(3.2.6)式成立. 再利用公式(3.2.2)得

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' = f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g-fg'}{g^2}. \qquad \square$$

例 3.2.2　若 n 为负整数,则

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

证　令 $n=-m$,则 m 为正整数. 于是

$$(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{-(x^m)'}{(x^m)^2}$$

$$= \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}. \qquad \square$$

3.2.2　复合函数的导数

定理 3.2.4(**复合函数的导数**)　若 f 与 g 可导,则复合函数 $f\circ g$ 可导,且有

$$(f\circ g)' = (f'\circ g)g'. \tag{3.2.7}$$

这个公式称为**链式法则**.

证　设 $f'(u_0)$ 与 $g'(x_0)$ 存在,且 $u_0=g(x_0)$. 定义一个函数 φ 如下:

$$\varphi(u) = \begin{cases} \dfrac{f(u)-f(u_0)}{u-u_0}, & u\neq u_0, \\ f'(u_0), & u=u_0. \end{cases}$$

因为

$$\lim_{u\to u_0}\varphi(u) = f'(u_0) = \varphi(u_0),$$

故 $\varphi(u)$ 在 u_0 点是连续的. 在恒等式

$$f(u)-f(u_0) = \varphi(u)(u-u_0)$$

中将 $u=g(x)$ 代入,得

$$f[g(x)]-f[g(x_0)] = \varphi[g(x)][g(x)-g(x_0)],$$

上式除以 $x-x_0$,得

$$\frac{f[g(x)]-f[g(x_0)]}{x-x_0} = \varphi[g(x)]\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0},$$

记 $F(x)=f[g(x)]$,则有

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\varphi[g(x)]\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

由复合函数的连续性,有

$$\lim_{x\to x_0}\varphi[g(x)]=\varphi[g(x_0)]=\varphi(u_0)=f'(u_0),$$

又
$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0),$$

所以,令 $x\to x_0$ 得

$$F'(x_0)=f'(u_0)g'(x_0)=f'[g(x_0)]g'(x_0).$$

因此公式(3.2.7)成立. □

使用符号
$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x},$$

我们可以把复合函数$F(x)=f[g(x)]$的链式法则改写为如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}.$$

例 3.2.3 设 $y=\sin x^2$,求 y'.

解 令 $u=x^2$,则 $y=\sin u$. 由链式法则

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\cos u\cdot(2x)=2x\cos x^2.$$ □

例 3.2.4 设 $y=\sin^2 3x$,求 y'.

解 函数可以写成 $y=u^2,\quad u=\sin v,\quad v=3x.$

链式法则可以推广成
$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

因此
$$\begin{aligned}y'&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin^2 3x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(u^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}(\sin v)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x)=(2u)(\cos v)(3)\\&=6u\cos v=6\sin 3x\cos 3x.\end{aligned}$$ □

例 3.2.5 计算$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2\sin^5 2x)$.

解 首先,由求导的乘积公式(3.2.2),有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2\sin^5 2x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)\cdot\sin^5 2x+x^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin^5 2x),$$

而
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin^5 2x)=(5\sin^4 2x)(\cos 2x)(2)=10\sin^4 2x\cos 2x,$$

于是
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2\sin^5 2x)=2x\sin^5 2x+10x^2\sin^4 2x\cos 2x.$$ □

例 3.2.6 设 $y=\ln|x|$,求 y'.

解 $x>0$ 时,有
$$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x};$$

$x<0$ 时,有
$$y'=[\ln(-x)]'=\frac{1}{(-x)}\cdot(-x)'=\frac{1}{x}.$$

所以,只要 $x\neq 0$,总有 $$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}.$$ □

3.2.3　反函数的导数

定理3.2.5(反函数的导数)　若区间 I 上的严格单调连续函数 $y=f(x)$ 在 x 处可导,且 $f'(x)\neq 0$,则它的反函数 $x=\varphi(y)$ 在对应的点 y 处可导,并且

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}\quad 或\quad \frac{dy}{dx}=1\Big/\frac{dx}{dy}. \tag{3.2.8}$$

证　由第2章定理2.8.3,f 的反函数 φ 也是严格单调的连续函数.故当 $\Delta y\neq 0$ 时,$\Delta x=\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)\neq 0$,并且 $\Delta y\to 0$ 时必有 $\Delta x\to 0$.从而又有 $\varphi(y+\Delta y)=\varphi(y)+\Delta x=x+\Delta x$,故 $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$ 或 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.因此

$$\begin{aligned}\varphi'(y)&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{f(x+\Delta x)-f(x)}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}.\end{aligned}$$ □

后面将会证明,若在区间 I 上 $f'(x)\neq 0$,则 $f(x)$ 是 I 上的严格单调的连续函数.因此,在定理3.2.5中,$f(x)$ 在 I 上严格单调连续的条件可以不强调.

下面利用公式(3.2.8)计算几个基本初等函数的导数.

例3.2.7　指数函数的导数.设 $y=a^x$,则 $y'=a^x\ln a$.

证　$y=a^x$ 的反函数是 $x=\log_a y$,所以

$$(a^x)'=\frac{1}{(\log_a y)'}=1\Big/\frac{\log_a e}{y}=\frac{y}{\log_a e}=\frac{a^x}{\log_a e}=a^x\ln a.$$

特别地,有 $$(e^x)'=e^x.$$ □

例3.2.8　反正弦函数的导数.设 $y=\arcsin x$,则 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

证　$y=\arcsin x$ 的反函数为 $x=\sin y$,所以

$$\begin{aligned}(\arcsin x)'&=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}\\&=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

这里由于 $\arcsin x$ 取值在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$,因此 $\cos(\arcsin x)$ 应取正值,故根式前取正号.

□

例3.2.9　反余弦函数的导数.设 $y=\arccos x$,则 $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

证　$y=\arccos x$.则 $x=\cos y$.所以

$$(\arccos x)'=\frac{1}{(\cos y)'}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sin(\arccos x)}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

这里由于$\arccos x$ 在$(0,\pi)$内取值时,$\sin(\arccos x)$应取正值,所以根式前应取正号.

$\square$

例 3.2.10　反正切函数的导数. 设$y=\arctan x$,则$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

证　$y=\arctan x$,则$x=\tan y$. 所以

$$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{\sec^2(\arctan x)}$$
$$=\frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}=\frac{1}{1+x^2}.\qquad\square$$

例 3.2.11　幂函数的导数. 设$y=x^{\alpha}$,α为任意实数,则$y'=\alpha x^{\alpha-1}$.

证　$y=e^{\alpha\ln x}$,由链式法则知,$y'=e^{\alpha\ln x}\cdot(\alpha\ln x)'=\dfrac{\alpha}{x}e^{\alpha\ln x}=\alpha x^{\alpha-1}$.　$\square$

为今后使用方便,我们列出常用的导数公式表. 表中未予导出的公式,请读者自行推导.

$(C)'=0$,C 是常数;	$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$;	$(a^x)'=a^x\ln a$;
$(e^x)'=e^x$;	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$;	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;
$(\sin x)'=\cos x$;	$(\cos x)'=-\sin x$;	$(\tan x)'=\sec^2 x$;
$(\cot x)'=-\csc^2 x$;	$(\sec x)'=\tan x\sec x$;	$(\csc x)'=-\cot x\csc x$;
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;
$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$;	$(\sinh x)'=\cosh x$;	$(\cosh x)'=\sinh x$.

3.2.4　高阶导数

对于任何函数$f(x)$,取其导数,我们就得到一个新函数$f'(x)$(它的定义域可以远小于$f(x)$的定义域). 可微性的概念当然可应用于函数$f'(x)$,得到另一函数$(f'(x))'$. 函数$(f'(x))'$通常简写成$f''(x)$,并称之为$f(x)$的**二阶导数**,而$f'(x)$称为**一阶导数**. 二阶导数的常用记号有

$$f''(x),\ f^{(2)}(x)\quad 或\quad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

如果$f(x)$在(a,b)的每一点二阶导数存在,则称$f(x)$在(a,b)上**二阶可导**. 类似

可定义**三阶导数**

$$f'''(x),f^{(3)}(x)\quad 或\quad \frac{d^3y}{dx^3},$$

及 n **阶导数**

$$f^{(n)}(x)\quad 或\quad \frac{d^ny}{dx^n}.$$

有时为了统一起见,也把函数本身称为零阶导数,记作

$$f(x)=f^{(0)}(x).$$

我们用记号 $C^{(k)}(a,b)$ 表示 (a,b) 上所有 k 阶可导且 $f^{(k)}(x)\in C(a,b)$ 的函数的集合. 记号 $f(x)\in C^{(k)}(a,b)$ 表示 $f(x)$ 在 (a,b) 上 k 阶可导,且 $f^{(k)}(x)\in C(a,b)$. 记号 $f(x)\in C^{(k)}[a,b]$ 作类似的理解.

在物理学中,二阶导数特别重要. 设 $s(t)$ 为沿直线运动的质点在时刻 t 的位置,则 $s''(t)$ 为在时刻 t 的**加速度**.

通过下面一个例子,可以看到高阶导数与原来的函数的一些关系. 例如函数

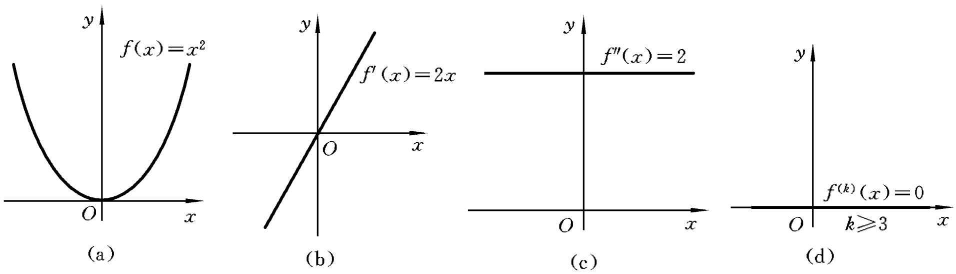


图3.6

$f(x)=x^2$ 及其一阶、二阶、三阶导函数的图形如图3.6所示. 再看函数(见图3.7(a))

$$g(x)=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0,\\ -x^2, & x<0.\end{cases}$$

容易得出

$$g'(x)=\begin{cases} 2x, & x>0,\\ -2x, & x<0,\end{cases}$$

而

$$g'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(\Delta x)}{\Delta x},$$

由于

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{g(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=0,\quad \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{g(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-(\Delta x)^2}{\Delta x}=0$$

所以

$$g'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(\Delta x)}{\Delta x}=0.$$

我们将上述讨论归结成 $g'(x)=2|x|$(见图3.7(b)). 可见 $g''(0)$ 不存在(见图3.7(c)).

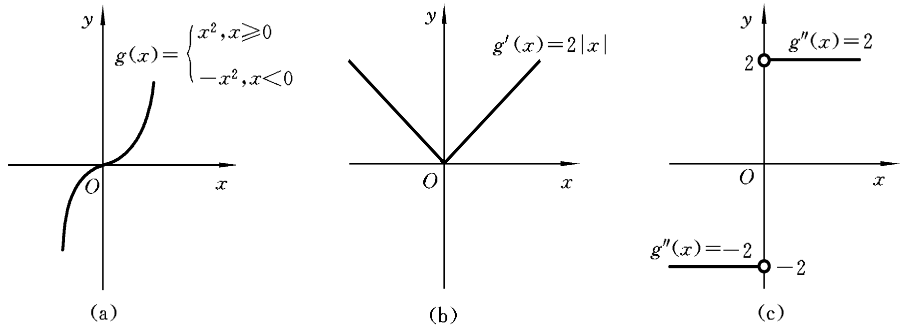


图3.7

从图3.7(a)看,$g(x)$“好象是光滑”的,但当用二阶导数来检查时,也呈现出某种不规则性.读者可用类似的步骤来研究下列函数:

$$h(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

我们可以进一步指出,二阶导数在几何上的重要意义丝毫不亚于它在物理上的重要意义.我们知道,线性函数

$$f(x)=ax+b$$

的一阶导数$f'(x)=a$,而它的二阶导数$f''(x)=0$.又因为线性函数的图形是一条直线,所以如果$f''(x)\neq 0$,那么$f(x)$的图形就不会是直线.这个事实启发人们在某种意义下用$f''(x)$的大小去度量函数图形在x点的弯曲程度.例如函数

$$y=f(x)=r-\sqrt{r^2-x^2}\qquad(-r<x<r)$$

的图形是半径为r的半圆(见图3.2.8),r值越大,半圆靠近x轴的部分越多.而这个函数的二阶导数

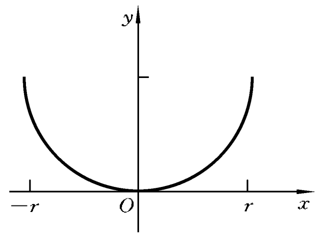


图3.8

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}},\quad f''(x)=\frac{r^2}{(r^2-x^2)^{3/2}},\quad f''(0)=\frac{r^2}{(r^2)^{3/2}}=\frac{1}{r}.$$

因此,r值越大,$f''(0)$的值越小.所以在这种情形中,$f''(0)$很小则表示$f(x)$的图形在$x=0$邻近接近于直线.

下面给出几个计算高阶导数的例子.

例3.2.12 设$y=x^\alpha$,求$y^{(n)}$.

解 $y'=\alpha x^{\alpha-1}$,$y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$,$\cdots$,$y^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ $(n\geqslant 1)$.

当α是正整数n时,$y^{(n)}=n!$;当α是小于n的正整数时,$y^{(n)}=0$.因此,n次多项式

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\quad(a_n\neq 0)$$

的各阶导数为

$$\begin{aligned}
&P_n'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1,\\
&P_n''(x)=n(n-1)a_nx^{n-2}+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+\cdots+2a_2,\\
&\vdots\\
&P_n^{(n)}(x)=n!a_n,\\
&P_n^{(n+1)}(x)=P_n^{(n+2)}(x)=\cdots=0.
\end{aligned}$$

令$x=0$,得$P_n'(0)=a_1$,$P_n''(0)=2a_2$,$\cdots$,$P_n^{(n)}(0)=n!a_n$. 于是,n次多项式$P_n(x)$可以写成如下形式:

$$P_n(x)=P_n^{(0)}(0)+\frac{1}{1!}P_n^{(1)}(0)x+\frac{1}{2!}P_n^{(2)}(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}P_n^{(n)}(0)x^n.$$ □

例 3.2.13 $y=a^x$,求$y^{(n)}$.

解 $y'=a^x\ln a,\quad y''=a^x(\ln a)^2,\quad\cdots,\quad y^{(n)}=a^x(\ln a)^n.$

特别地,
$$(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x.$$ □

例 3.2.14 $y=\ln(1+x)$,求$y^{(n)}$.

解 $$y'=\frac{1}{1+x},\quad y''=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad y'''=(-1)^2\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},$$
$$\cdots,\quad y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\quad(n\geqslant 1).$$ □

例 3.2.15 $y=\sin x$,求$y^{(n)}$.

解 $y'=\cos x,\quad y''=-\sin x,\quad y'''=-\cos x,\quad y^{(4)}=\sin x,$

容易看出,
$$y^{(2n-1)}(x)=(-1)^{n-1}\cos x,\quad y^{(2n)}(x)=(-1)^n\sin x.$$

这样归纳当然是对的,但需要用两个式子给出高阶导数公式,能否统一成一个式子呢?我们利用正弦函数与余弦函数的关系,有

$$\begin{aligned}
&y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\\
&y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),\\
&\vdots\\
&y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

同理可得
$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$ □

从以上几例中我们看出,求函数的高阶导数的基本方法是先求出前二、三阶导数,然后找出规律,再运用归纳的方法得到n阶导数公式. 利用数学归纳法,我们还可以得到下面一般的n阶导数计算公式(证明略).

定理 3.2.6 设函数u,v是n阶可导函数,则有$u\pm v$,cu及uv也是n阶可导函数,

并且有

(1) $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$;

(2) $(cu)^{(n)}=cu^{(n)}$(c 为常数);

(3) $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$ (**莱布尼兹公式**),

其中
$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

例 3.2.16 $y=x^2e^{3x}$,求 $y^{(n)}$.

解 令 $u=e^{3x}$,$v=x^2$,则

$$u'=3e^{3x},\quad u''=3^2e^{3x},\quad \cdots,\quad u^{(n)}=3^ne^{3x};$$
$$v'=2x,\quad v''=2,\quad v'''=v^{(4)}=\cdots=v^{(n)}=0.$$

由莱布尼兹公式得

$$\begin{aligned}y^{(n)}&=(e^{3x})^{(n)}x^2+n(e^{3x})^{(n-1)}(x^2)'+\frac{n(n-1)}{2!}(e^{3x})^{(n-2)}(x^2)''\\&=3^{n-2}e^{3x}[9x^2+6nx+n(n-1)].\end{aligned}$$ □

例3.2.16 给我们一个提示:当u 和v 中有一个为低次多项式时,用莱布尼兹公式求uv 的n 阶导数是特别简便的.

例 3.2.17 $y=\arctan x$,求 $y^{(n)}(0)$.

解 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$,如果再依次求导,发现越求项数越多,无法归纳出一般公式. 这时我们可以把等式$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$写成

$$y'\cdot(1+x^2)=1,$$

然后对这个等式两端取n 阶导数,并利用莱布尼兹公式,得

$$(1+x^2)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0,$$

令 $x=0$,得
$$y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)y^{(n-1)}(0).$$

这是一个递推公式. 由 $y'(0)=1$,$y''(0)=0$ 及上式可推得

$$y^{(2k)}(0)=0,\quad y^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!.$$ □

习　题　3.2

(A)

1. 熟记求导的基本法则. 设$f(x)=x^2$,$g(x)=e^x$,试应用有关导数公式计算下列函数的导数:

(1) $f+g$; (2) $f-2g$; (3) fg; (4) $\dfrac{f}{g}$; (5) $f(1-x)$; (6) $f\circ g$;

(7) $g\circ f$; (8) $f\circ g\circ f$; (9) $|f(x)-1|$; (10) $\operatorname{sgn} f(x)$.

2. 求下列函数的导数.

(1) $y=x^5-2x^2+1$;　(2) $y=x^4-x+\sqrt{2}$;　(3) $y=(x^2+3x+1)(x^3-2x)$;

(4) $y=7\sqrt[3]{x}$;　(5) $y=\dfrac{5}{x^3}$;　(6) $y=\dfrac{3+x}{3+x^2}$;

(7) $y=\dfrac{t^2-3t+1}{t^3+1}$;　(8) $y=x^3(1+\sqrt{x})$;　(9) $y=\dfrac{2}{x}+\sqrt[3]{x}$;

(10) $y=1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$;　(11) $y=\dfrac{1}{x^3+2x+1}$;　(12) $y=\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$.

3. 求下列函数的导数:

(1) $y=\cos 2x-2\sin x$;　(2) $y=(2-x^2)\cos x$;　(3) $y=\sin(x+x^2)$;

(4) $y=\sin x+\sin x^2$;　(5) $y=\sin(\cos x)$;　(6) $y=\sin(\sin x)$;

(7) $y=\sin(x+\sin x)$;　(8) $y=\sin(\cos(\sin x))$;　(9) $y=\tan\dfrac{x}{2}-\cot\dfrac{x}{2}$;

(10) $y=\sin^n x\sin nx$;　(11) $y=\sec x$;　(12) $y=\csc x$.

4. 求下列函数的导数:

(1) $y=x\ln x$;　(2) $y=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln x$;　(3) $y=\ln^3 x^2$;

(4) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$;　(5) $y=\ln(\ln x)$;　(6) $y=\sin\sqrt{1+x^2}$;

(7) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;　(8) $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;　(9) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

(10) $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$;　(11) $y=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$;　(12) $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

5. 求下列函数的导数:

(1) $y=e^{\sqrt{x}}$;　(2) $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$;　(3) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

(4) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$;　(5) $y=\arccos(\sin x)$;　(6) $y=x^2\arctan x$;

(7) $y=e^{ax}\cos bx$;　(8) $y=e^{ax}\sin bx$;　(9) $y=\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$;

(10) $y=\operatorname{arccot}2x$;　(11) $y=\arctan e^x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$;

(12) $y=\dfrac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}\ (a>0)$.

6. 求下列函数的二阶导数:

(1) $y=3x^2+\ln x$;　(2) $y=x\cos x$;　(3) $y=a^{2x}$;

(4) $y=e^{ax}\sin x$;　(5) $y=xe^x$;　(6) $y=x\sqrt{1+x^2}$;

(7) $y=\tan x$;　(8) $y=x\ln x$;　(9) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(10) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

7. 设$f(x)$是三阶可导函数,求y'',y''',设:

(1) $y=f(x^2)$;　(2) $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

(3) $y=f(e^x)$;　(4) $y=f(\ln x)$.

(B)

1. 设$y=f(x)$为严格递增的可导函数,$x=\varphi(y)$是它的反函数.证明:

(1) 当$h\neq 0$时,$f(x+h)-f(x)=k\neq 0$.若记$f(x+h)=y+k$,则$\varphi(y+k)=x+h$.

(2) 当$k\to 0$时,$\dfrac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k}=\dfrac{h}{k}=\dfrac{h}{y+k-y}=\dfrac{h}{f(x+h)-f(x)}$趋于$\dfrac{1}{f'(x)}$.

2. 设$f(x)=x^3+2x^2+3x+1$,用φ表示f的反函数.求证:$f(1)=7$,$\varphi(7)=1$.并计算$\varphi'(7)$.

3. 设$y=(\arcsin x)^2$,证明$(1-x^2)y''-xy'=2$.

4. 求下列函数的n阶导数$y^{(n)}$:

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$; (2) $y=\sin^2 x$.

答案与提示

(A)

1. (1)$2x+e^x$; (2)$2x-2e^x$; (3)$(2x+x^2)e^x$; (4)$e^{-x}(2x-x^2)$;

(5)$2(x-1)$; (6)$2e^{2x}$; (7)$2xe^{x^2}$; (8)$4xe^{2x^2}$;

(9) $|x|>1$时为$2x$; $|x|<1$时为$-2x$; $|x|=1$时导数不存在;

(10)在$x=0$处函数不可导;$x\neq 0$时,$(\operatorname{sgn}f(x))'=0$.

2. (1)$5x^4-4x$; (2)$4x^3-1$; (3)$5x^4+12x^3-3x^2-12x-2$; (4)$\dfrac{7}{3}x^{-2/3}$; (5)$-15x^{-4}$;

(6)$\dfrac{3-6x-x^2}{(3+x^2)^2}$; (7)$(t^3+1)^{-2}(2t^4-6t^3+9t^2-t-3)$; (8)$3x^2+\dfrac{7}{2}x^{5/2}$;

(9)$-2x^{-2}+\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$; (10)$\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$; (11)$-\dfrac{3x^2+2}{(x^3+2x+1)^2}$; (12)$-\dfrac{1+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+\sqrt{x})^2}$.

3. (1)$-2\sin 2x-2\cos x$; (2)$-2x\cos x-(2-x^2)\sin x$; (3)$(1+2x)\cos(x+x^2)$;

(4)$\cos x+2x\cos x^2$; (5)$-\sin x\cos(\cos x)$;(6)$\cos x\cos(\sin x)$; (7)$(1+\cos x)\cos(x+\sin x)$;

(8)$-\cos x\cdot\cos(\cos(\sin x))\sin(\sin x)$; (9)$2\csc^2 x$; (10)$n\sin^{n-1}x\cos x\sin nx+n\sin^n x\cos nx$;

(11)$\tan x\sec x$;(12)$-\cot x\csc x$.

4. (1)$1+\ln x$; (2)$1+\dfrac{1}{x^2}+\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\ln x$; (3)$\dfrac{6}{x}\ln^2 x^2$; (4)$\dfrac{1}{\sin x}$; (5)$\dfrac{1}{x\ln x}$;

(6)$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cos\sqrt{1+x^2}$; (7)$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; (8)$\dfrac{x}{x^4-1}$;

(9)$\dfrac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$; (10)$\dfrac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$;

(11)$1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3x^{2/3}}$; (12)$-x^{-2}-\dfrac{1}{2}x^{-3/2}-\dfrac{1}{3}x^{-4/3}$.

5. (1)$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$; (2)$\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$; (3)$-\dfrac{\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}$; (4)$\dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$;

(5)$-\operatorname{sgn}(\cos x)$,$x\neq\dfrac{2k-1}{2}\pi$,$k$为整数; (6)$2x\arctan x+\dfrac{x^2}{1+x^2}$;

(7)$ae^{ax}\cos bx-be^{ax}\sin bx$; (8)$ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx$; (9)$\dfrac{2}{1+x^2}$;

(10) $\dfrac{2}{1+4x^2}$；　(11) $\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}-\dfrac{x}{1+x^2}$；　(12) $\dfrac{3a^2-2x^2}{4\sqrt{a^2-x^2}}$.

6. (1) $6-\dfrac{1}{x^2}$；　(2) $x\cos x-2\sin x$；　(3) $4(\ln a)^2a^{2x}$；　(4) $(a^2-1)e^{ax}\sin x+2ae^{ax}\cos x$；

(5) $(2+x)e^x$；　(6) $\dfrac{3x+2x^3}{(1+x^2)^{3/2}}$；　(7) $\dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}$；　(8) $\dfrac{1}{x}$；

(9) $\dfrac{3x}{(1-x^2)^2}+\dfrac{(1+2x^2)\arcsin x+x}{(1-x^2)^{5/2}}$　$(|x|<1)$；　(10) $3x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}$　$(|x|<1)$.

7. (1) $y''=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$, $y'''=12xf''(x^2)+8x^3f'''(x^2)$；

(2) $y''=\dfrac{2}{x^3}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x^4}f''\left(\dfrac{1}{x}\right)$,　$y'''=-\dfrac{6}{x^4}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{6}{x^5}f''\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x^6}f'''\left(\dfrac{1}{x}\right)$；

(3) $y''=e^xf'(e^x)+e^{2x}f''(e^x)$, $y'''=e^xf'(e^x)+3e^{2x}f''(e^x)+e^{3x}f'''(e^x)$；

(4) $y''=\dfrac{1}{x^2}[f''(\ln x)-f'(\ln x)]$,　$y'''=\dfrac{1}{x^3}[f'''(\ln x)-3f''(\ln x)+2f'(\ln x)]$.

(B)

2. $\dfrac{1}{10}$.

3. 将 $y'=(2\arcsin x)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 写成 $y'\sqrt{1-x^2}=2\arcsin x$，两边对 x 求导.

4. (1) $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}+\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right]$；　(2) $2^{n-1}\sin\left(2x+(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3.3　隐函数的导数和参数式求导

3.3.1　隐函数的导数

我们在前面讨论过的许多具体函数都是**显函数**，即因变量 y 可以用自变量 x 的一个明确的式子表达. 但是在许多场合，我们得到的是 x 和 y 的关系式，如

$$e^y+xy-e=0,\quad x^2-y^2=0,\quad x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$$

等等. 有些关系式可以把 y 解出来，得到显函数 $y=y(x)$；有些关系式则不能把 y 解出来写成 x 的函数(指初等函数)，但这不等于说 y 与 x 之间不存在函数关系. 我们把这种解不出来或没有解出来，而由方程所确定的函数 $y=y(x)$ 称为**隐函数**.

一般地，设有函数方程

$$F(x,y)=0.$$

如果当 x 取某区间内的任一确定值时，相应地总有满足这个方程的 y 值存在，那么我们就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间上确定了 x 的隐函数 y.

在实际问题中，我们常会碰到计算隐函数的导数的问题. 下面我们假定所遇到的方程都确定连续可微的隐函数，我们将通过具体的例子来说明隐函数的导数的求法.

例 3.3.1 求开普勒(Kepler)方程 $x=y-\varepsilon\sin y\quad(0<\varepsilon<1)$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $y'(x)$.

解 将隐函数 $y=y(x)$ 代入方程,得恒等式

$$x\equiv y(x)-\varepsilon\sin y(x).$$

恒等式求导仍为恒等式,故得

$$1\equiv y'(x)-\varepsilon\cos y(x)\cdot y'(x).$$

所以
$$y'(x)=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}.$$

在这里虽然隐函数没有解出来,但它的导数求出来了. 当然,结果中仍含有隐函数 $y(x)$. 一般来说,隐函数的导数含有 x 和 $y(x)$. □

例 3.3.2 求由方程 $e^y+xy-e=0$ 所确定的隐函数 $y(x)$ 的导数 $y'(x)$.

解 对方程的两边关于 x 求导数,记住式中的 y 是 x 的函数,得

$$\frac{d}{dx}(e^y+xy-e)=0,$$

即
$$e^y\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0,$$

从而得
$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x+e^y}\quad(x+e^y\neq0).$$
□

例 3.3.3 求过圆周 $x^2+y^2=a^2$ 上一点 $(x_0,y_0)(y_0\neq0)$ 处的切线方程.

解 对所给方程两边关于 x 求导,得

$$2x+2yy'=0,\quad y'(x)=-\frac{x}{y}.$$

所以过点 (x_0,y_0) 的切线的斜率为

$$y'(x_0)=-\frac{x_0}{y_0}.$$

于是得切线方程
$$y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0),$$

化简整理得
$$xx_0+yy_0=a^2.$$
□

当一个函数是若干个函数的乘积,或函数为幂指函数 $y=u(x)^{v(x)}$ 的形式时,利用两边取对数的方法求导,往往比较方便. 我们称这种求导方法为**对数求导法**.

例 3.3.4 设 $y=x^x$,求 y'.

解 两边取对数,得
$$\ln y=x\ln x,$$

两边对 x 求导,得
$$\frac{y'}{y}=\ln x+\frac{1}{x}\cdot x,$$

所以得
$$y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1).$$
□

例 3.3.5 求 $y=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-1)}$ 的导数.

解　两边取对数,得

$$\ln y = \ln(x+1) + \ln(x-3) - \ln(x+3) - \ln(x-1),$$

然后按隐函数求导,得

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1},$$

整理化简得 $$y' = \frac{4(x^2+3)}{(x+3)^2(x-1)^2}.$$ □

读者可以比较对 y 加绝对值取对数后求导的结果与以上结果是否一致.

例 3.3.6　求 $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ 的导数.

解　函数定义域为 $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$. 两边取对数,得

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln\frac{x^3}{x-1} = \frac{3}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x-1|.$$

两边对 x 求导,得 $$\frac{y'}{y} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} = \frac{2x-3}{2x(x-1)},$$

故 $$y' = \frac{2x-3}{2x(x-1)}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}.$$ □

下面我们通过具体例子来介绍隐函数高阶导数的计算方法.

例 3.3.7　设 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,求 $y''(x)$.

解　对方程两边关于 x 求导,并消去2,得

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}\cdot y' = 0, \quad y' = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

上式再对 x 求一次导,得 $$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}y'^2 + \frac{y}{b^2}\cdot y'' = 0,$$

将 y' 代入,有 $$\frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^4y^2} + \frac{y}{b^2}y'' = 0,$$

利用 $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$,得 $$\frac{b^2}{a^2y^2} + \frac{y}{b^2}y'' = 0,$$

所以 $$y''(x) = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$ □

3.3.2　参数式求导

平面上的曲线方程

$$F(x,y) = 0 \tag{3.3.1}$$

常可参数化,即用参数 t 将方程(3.3.1)分解成参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta). \tag{3.3.2}$$

定理 3.3.1(参数方程的导数)　假设函数 $x=\varphi(t)$ 和 $y=\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续、可导,且 $\varphi'(t)\neq 0$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{3.3.3}$$

证　由于 $x=\varphi(t)$ 可导,且 $\varphi'(t)\neq 0$,由本章定理 3.2.5,它的反函数 $t=t(x)$ 在与 t 对应的 x 处可导,且

$$t'(x)=\frac{1}{\varphi'(t)}.$$

这时 y 可看成是 x 的复合函数:

$$y=\psi(t)=\psi[t(x)],$$

由链式法则,有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$
□

例 3.3.8　求椭圆 $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的切线方程(见图 3.9).

解　当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时,椭圆上对应点 M_0 的坐标为

$$x_0=a\cos\frac{\pi}{4}=\frac{a\sqrt{2}}{2},\quad y_0=b\sin\frac{\pi}{4}=\frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

曲线在点 M_0 的切线斜率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{b\cos t}{-a\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{b}{a}.$$

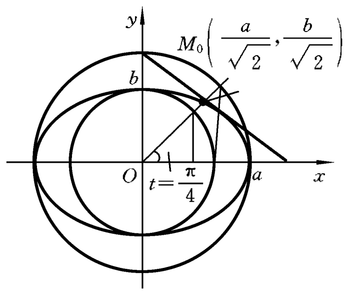


图 3.9

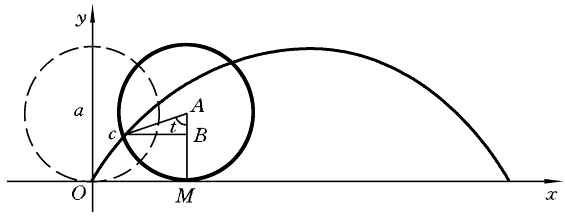


图 3.10

于是椭圆在 M_0 点处的切线方程为

$$y-\frac{b\sqrt{2}}{2}=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right).$$

化简得

$$bx+ay-\sqrt{2}ab=0.$$
□

例3.3.9　一轮子沿一直线滚动,轮子上一定点的轨迹曲线(见图3.10)的参数方程为

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

这条曲线称为**旋轮线**.在研究单摆的等时性问题时,也遇到这条曲线,所以又称它为**摆线**.在研究物体在重力作用下,沿什么曲线下滑时间最短时,也遇到这条曲线,所以也称它为**速降线**.

我们要求出旋轮线上斜率为1的切线.当$0< t< 2\pi$时,旋轮线的切线斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(a(1-\cos t))'}{(a(t-\sin t))'} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \cot\frac{t}{2}.$$

令$\cot\frac{t}{2} = 1$,解出$t = \frac{\pi}{2}$,把它代入参数方程得

$$x = a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right), \quad y = a.$$

所以斜率为1的切线为

$$y - a = x - a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right),$$

化简得

$$y = x + a\left(2 - \frac{\pi}{2}\right).$$

□

下面我们仍通过具体例子来介绍参数式高阶导数的计算方法.

例3.3.10　设$x = a(t-\sin t)$,$y = a(1-\cos t)$,求$y''(x)$.

解　我们知道(见例3.3.9)$y'(x) = \cot\frac{t}{2}$,按照本节的公式(3.3.3),有

$$y''(x) = \frac{\mathrm{d}(y')}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(y')}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}(y')}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \left(\cot\frac{t}{2}\right)' \cdot \frac{1}{(a(t-\sin t))'}$$

$$= -\csc^2\frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$$

□

3.3.3　极坐标式求导

设曲线方程由极坐标方程

$$r = r(\theta) \tag{3.3.4}$$

给出,其中r称**极径**,θ称**极角**.求曲线在点(r,θ)处切线的斜率.

方程(3.3.4)可化为参数方程

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta, \\ y = r(\theta)\sin\theta, \end{cases} \tag{3.3.5}$$

因此
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}=\frac{\tan\theta+\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}{1-\tan\theta\cdot\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}.$$

设切线与 x 轴的夹角为 α,由导数的几何意义知
$$\frac{dy}{dx}=\tan\alpha,$$
因此
$$\frac{\tan\theta+\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}{1-\tan\theta\cdot\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}=\tan\alpha,$$

$$\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}=\tan(\alpha-\theta).$$
令 β 表示向径沿反时针方向转到切线位置的夹角,则由图3.11 可以看出 $\beta=\alpha-\theta$. 所以
$$\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}=\tan\beta.$$
这就是 $\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}$ 的几何意义.

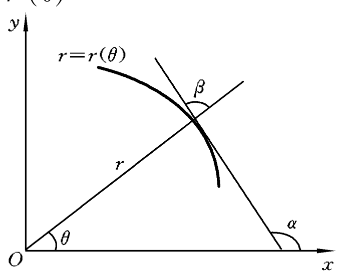


图3.11

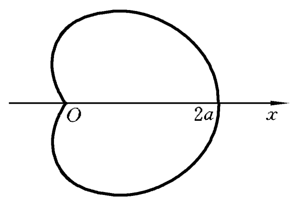


图3.12

例3.3.11 设心脏线(见图3.12)方程为 $r=a(1+\cos\theta)$,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\arctan\frac{y}{x}$ 为极坐标,求 $\frac{dy}{dx}$.

解 $r'(\theta)=-a\sin\theta$,则
$$\frac{dy}{dx}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}=\frac{-a\sin\theta\sin\theta+a(1+\cos\theta)\cos\theta}{-a\sin\theta\cos\theta-a(1+\cos\theta)\sin\theta}=-\frac{\cos2\theta+\cos\theta}{\sin2\theta+\sin\theta}$$
$$=-\frac{2\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=-\cot\frac{3\theta}{2}\quad\left(\theta\neq0,\theta\neq\pm\frac{2\pi}{3}\right).$$ □

3.3.4　相关变化率

在很多问题中常常由一个固定的条件联系着几个变量，这些变量又都随着时间而变，因此它们的变化率之间必然也有一定的关系．有这种连带关系的变化率称为**相关变化率**．

例 3.3.12　钓鱼者站在离水面高 10 m 的桥上，他的鱼线末端有一条鱼．设鱼在水的表面，若钓鱼者以每秒2 m 的速率卷起他的鱼线．试问当鱼线的长度为15 m 时，鱼在水面移动的速率是多少(见图 3.13)？

解　令 s 表示鱼线的长度，x 表示鱼到桥的水平距离．依题设有 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-2$．鱼在水面移动的速率用导数 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 表示．问题归结为：当 $s=15$ 时，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 为多少？

x 和 s 都是时间 t 的函数，它们之间的关系可由勾股定理给出，即

$$x^2+10^2=s^2.$$

对这个等式两端关于 t 求导数，得

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{-2s}{x}.$$

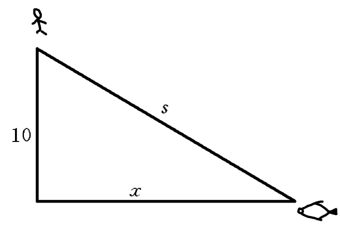


图3.13

当 $s=15$ 时，由 $x^2+10^2=15^2$ 得 $x=5\sqrt{5}$．所以，当鱼线长 15 m 时，所求速率为

$$\frac{2s}{x}=\frac{6\sqrt{5}}{5}\approx 2.7(\mathrm{m/s}).$$ □

例3.3.12 中的方法可用于许多相关变化率的问题．我们把一般的解题步骤叙述如下．

① 求出关联各个量的等式；

② 对所得等式两端关于时间 t(或者其他适当的变量)求导数；

③ 利用第②步得到的等式，由已知的变化率求出未知的变化率．

例 3.3.13　一个小孩站在地面上用望远镜观察一架飞机，该飞机的高度为 11 km，正以 16 km/min 的速度向小孩水平地飞过来．试问当飞机离小孩的水平距离为 38 km 时，望远镜视角改变的速率是多少？当飞机就在小孩的头顶时又如何？

解　首先根据题意画出草图，设定一些有意义的量(见图3.14)．依题意有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-16(\mathrm{km/min}).$$

视角 θ 的变化率 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 是待求的．

(1) 求关于 θ 与 x 的一个方程．这个方程是

$$\theta = \arctan\frac{x}{11}.$$

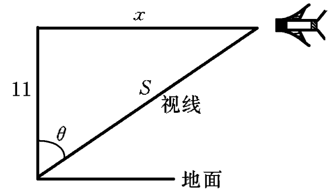


图3.14

(2) 对这个方程两端关于 t 求导数,得

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{11}\right)^2}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

因为$\frac{dx}{dt} = -16$,故　$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-176}{121+x^2}$(rad/min).

最后,令 $x = 38$,得

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-176}{121+38^2} = \frac{-176}{1565}\text{(rad/min)}\quad(\text{约相当于每分钟 } -6°).$$

当飞机在小孩头顶上时,$x = 0$,得

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-16}{11}\text{(rad/min)}\quad(\text{约相当于每分钟 } -83°).$$

□

习　题　3.3

(A)

1. 回答下列问题:
   (1) 什么叫相关变化率?
   (2) 求相关变化率的一般步骤是什么?
2. 方程 $xy + e^y + y = 2$ 确定隐函数 $y = y(x)$,求 $y'(x)$.
3. 求下列方程所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 $y'(x)$:
   (1) $e^x - e^y + xy = 0$;　(2) $x^2 + y^2 - \arcsin y = 0$;　(3) $x^y = y^x$;
   (4) $\arctan\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$;　(5) $x^2 - 2xy + y^2 = 2x$;　(6) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$;
   (7) $xy^2 + e^y = \cos(x + y^2)$;　(8) $\ln y - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 0$.
4. 求下列由参数方程表示的函数的导数:
   (1) $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$,求$\frac{dy}{dx}$;　(2) $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$,求$\frac{dy}{dx}$;
   (3) $x = 1 + t^3$, $y = e^{2t}$,求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}$;(4) $x = 1 + t^2$, $y = \cos t$,求$\frac{dy}{dx}$;(5) $x = e^t\sin t$, $y = e^{-t}\cos t$,求$\frac{dy}{dx}$.
5. 用对数求导法求下列函数的导数:
   (1) $y = x^{\sin x}(x > 0)$;　(2) $y = (\sqrt{x})^{\ln x}(x > 0)$;　(3) $y = a^{\sin x}(a > 0)$;
   (4) $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}(x > 0)$;　(5) $y = \frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}$;　(6) $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
6. 下列参数方程给出函数 $y = y(x)$,求$\frac{d^2y}{dx^2}$:
   (1) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$;　(2) $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$;

(3) $x=\ln(1+t^2), y=\arctan t$;　　(4) $x=\ln(t+\sqrt{t^2+1}), y=t^2$.

7. 求下列隐函数的二阶导数 y'':

(1) $x^3+y^3-3axy=0(a>0)$;　　(2) $y^2+2\ln y=x^4$;

(3) $xy=e^{x+y}$;　　(4) $y=1-xe^y$.

8. 求 $\frac{dy}{dx}$,设

(1) $r^2=2a^2\cos2\theta$(双纽线)在 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 处;

(2) $r=ae^{m\theta}$(对数螺线),其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $\theta=\arctan\frac{y}{x}$ 为极坐标.

9. 身高5尺(1尺=0.333 m)的人在路灯一旁沿着一条水平直线 L 行走(见图3.15),电灯杆 AA' 到 L 的距离是8尺,杆足 A' 在 L 上的正投影是 O 点. 灯高20尺. 如果人行走的速度每秒钟1.5尺,求当人离 O 点6尺时,人影长度的变化率.

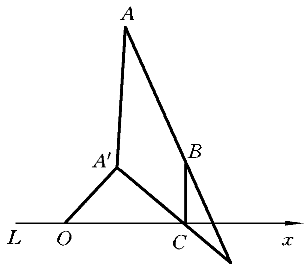


图3.15

10. 在中午正12点,甲船以6 km/h 的速率向东行驶,乙船在甲船之北16 km 处,以8 km/h 的速率向南行驶. 问下午1点整,两船相离的速率为多少?

11. 设有一段直径为200 mm,长为600 mm 的圆钢,放在加热炉加热,直径增大的速率为0.08 mm/min,长度增大的速率为0.25 mm/min. 求加热开始时体积增大的速率.

(B)

1. 求下列函数的导数:

(1) $y=e^x+e^{e^x}$;　　(2) $y=a^{x^a}+a^{a^x}(a>0)$;

(3) $y=2^{\tan\frac{1}{x}}$;　　(4) $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b(a>0,b>0)$;

(5) $y=e^x\left(1+\cot\frac{x}{2}\right)$; (6) $y=3^x\ln x$.

2. 在距海岸5 km 处有一灯塔,它的灯每分钟转动一周,试求光束与岸边成60°角时,光束沿岸边滑动的速度(km/min).

答案与提示

(A)

2. $-\frac{y}{1+x+e^y}$.

3. (1) $\frac{e^x+y}{e^y-x}$; (2) $\frac{2x\sqrt{1-y^2}}{1-2y\sqrt{1-y^2}}$; (3) $\frac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}$; (4) $\frac{x+y}{x-y}$; (5) $\frac{1-x+y}{y-x}$;

(6) $-\sqrt{\frac{y}{x}}$; (7) $-\frac{y^2+\sin(x+y^2)}{e^y+2xy+2y\sin(x+y^2)}$; (8) $-\frac{y}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

4. (1) $\frac{\sqrt{t}\cdot\sqrt[3]{(1-\sqrt{t})^2}}{\sqrt[3]{t^2}\cdot\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}}$; (2) -1; (3) $\frac{2}{3}e^2$; (4) $-\frac{\sin t}{2t}$; (5) $-e^{-2t}$.

5. (1)$x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$； (2)$\dfrac{y}{x}\ln x$； (3)$a^{\sin x}\ln a\cos x$；

(4)$(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right]$； (5)$y\left(\dfrac{2}{x+5}-\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{1}{3(x-4)}-\dfrac{1}{2(x+4)}\right)$；

(6)$y\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2(1-x)}-\dfrac{1}{2(1+x)}\right)$.

6. (1)$-\dfrac{1}{a\sin^3 t}$； (2)$\dfrac{3}{4(1-t)}$； (3)$-\dfrac{1+t^2}{4t^3}$； (4)$4t^2+2$.

7. (1)$\dfrac{1}{y^2-ax}\left[\dfrac{2a(ay-x^2)}{y^2-ax}-2y\left(\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}\right)^2-2x\right]$； (2)$\dfrac{2x^2y}{(1+y^2)^3}[3(1+y^2)^2+2x^4(1-y^2)]$；

(3)$\dfrac{y}{x-xy}+\dfrac{(x+y-2)(xy-y)}{(x-xy)^2}+\dfrac{x(xy-y^2)}{(x-xy)^3}$； (4)$\dfrac{2e^{2y}}{(1+xe^y)^2}-\dfrac{xe^{3y}}{(1+xe^y)^3}$.

8. (1)0； (2)$\dfrac{m\sin\theta+\cos\theta}{m\cos\theta-\sin\theta}=\tan\left(\theta+\arctan\dfrac{1}{m}\right)$.

9. ± 0.3(尺/s).

10. -2.8 (km/h).

11. 7300π (mm^3/s).

(B)

1. (1)$e^x(1+e^{e^x})$； (2)$a\ln a\cdot a^{x^a}\cdot x^{a-1}+a^x\cdot a^{a^x}(\ln a)^2$；

(3)$-\dfrac{1}{x^2}\sec^2\dfrac{1}{x}\cdot 2^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\ln 2\ (x\neq 0)$； (4)$y\left(\ln\dfrac{a}{b}-\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x}\right)(x>0)$；

(5)$\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}$ ($x\neq 2k\pi$, k 为整数)； (6)$3^x\ln x\cdot\ln 3+\dfrac{1}{x}3^x$.

2. $\dfrac{40}{3}\pi$ km/min.

3.4 微　分

3.4.1 局部线性化与微分

由导数的几何意义知，曲线$y=f(x)$上过点$(x_0,f(x_0))$的切线方程为$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. 由图3.16可以看出，当$\Delta x=x-x_0$充分小时，$KN\approx PN$，其中$KN=\tan\alpha\cdot MN$是切线的改变量，而$PN=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$是曲线的改变量. 我们不妨来研究一个具体例子. 设$f(x)=\sqrt{x}$，则曲线$y=\sqrt{x}$在$x=4$处的切线方程为$y=\dfrac{x}{4}+1$. 表3-1是函数值对照表，由表3-1可看出，当$\Delta x=0.001$时，函数$\sqrt{x}$的改变量约为0.000 250 1，而切线$y=\dfrac{x}{4}+1$的改变量为0.000 250 0，这两个改变量的差值是十分微小的. 这使我们很自然地想到：在

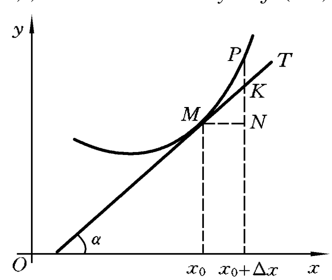


图3.16

表3-1

x	$y=\sqrt{x}$	$y=\frac{x}{4}+1$
3.996	1.998 999 7	1.999 000 0
3.997	1.999 249 8	1.999 250 0
3.998	1.999 499 9	1.999 500 0
3.999	1.999 750 0	1.999 750 0
4.000	2.000 000 0	2.000 000 0
4.001	2.000 250 1	2.000 250 0
4.002	2.000 499 9	2.000 500 0
4.003	2.000 749 9	2.000 750 0
4.004	2.000 999 8	2.001 000 0

x_0点附近,是否可以用切线来近似地代替曲线?即用切线上的函数值近似代替曲线上的函数值.

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

这就是所谓**局部线性化**.切线方程的一般形式是

$$y=ax+b.$$

用这样简单的线性函数在局部范围内去逼近一个相对来说较复杂的函数$y=f(x)$,无论在理论上还是在计算上都是十分有价值的事情.用简单的东西逼近更复杂的东西,这在数学上是十分深刻的思想.由前面所讨论的局部线性化问题,我们引进微分的概念.

定义 3.4.1(**微分**)　设$y=f(x)$在(a,b)上定义,且有

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=A\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0),\tag{3.4.1}$$

其中A与Δx无关(可以依赖于x),则称函数$f(x)$在x点**可微**,并称$A\Delta x$为函数在该点的**微分**,记作

$$\mathrm{d}y=A\Delta x\quad 或\quad \mathrm{d}f(x)=A\Delta x.$$

在Δy的分解式(3.4.1)中,第一项$A\Delta x$是Δx的线性函数,第二项是Δx的高阶无穷小量,因此Δy的值主要取决于第一项.我们称$A\Delta x$为函数改变量Δy的**线性主部**,即微分是函数改变量的线性主部.因此,当$\Delta x\to 0$时,我们可以写

$$\Delta y\approx \mathrm{d}y=A\Delta x.\tag{3.4.2}$$

联系到本节开始的讨论,在那里我们指出当Δx充分小时,有

$$PN=\Delta y\approx KN=\tan\alpha\cdot\Delta x=f'(x_0)\Delta x.$$

这里自然会问:如果$f(x)$在x_0点可微,那么A是否就是导数$f'(x_0)$呢?回答是肯定的.下面就来证明这一点.

假定函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点可微,由定义知,(3.4.1)式成立. 在(3.4.1)式两边除以 Δx,得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x},\tag{3.4.3}$$

因 A 与 Δx 无关,所以当 $\Delta x\to 0$ 时,(3.4.3)式右端第一项极限为 A,而第二项按高阶无穷小量的定义,极限为零. 既然(3.4.3)式右端的极限存在,故(3.4.3)式左端的极限也存在,且有

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A.$$

这样我们就证明了:可微必可导,且 $f(x)$ 在 x_0 的微分

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x.$$

反过来,若函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导,则它在 x_0 点也可微. 事实上,由

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

可推得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)\right)=0,$$

或

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-f'(x_0)\Delta x}{\Delta x}=0.$$

由高阶无穷小的定义,得

$$\Delta y-f'(x_0)\Delta x=o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0),$$

也就有

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0),$$

故函数可微.

综上所述,我们得到下面的结论.

定理 3.4.1　函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点可微的充要条件是:函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导.

由此,对于一元函数来说,可微与可导是同义词. Δy 的分解式是唯一的,且微分总可写成

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x\quad\text{或}\quad \mathrm{d}f(x)=f'(x)\Delta x.$$

对特殊的函数 $y=x$,因 $y'=1$,所以

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}x=1\cdot\Delta x,$$

把 x 看成函数时,它的微分就是自变量的改变量. 我们定义自变量的微分就是自变量的改变量

$$\mathrm{d}x=\Delta x.$$

于是 $\mathrm{d}y$ 又可写成

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x,\tag{3.4.4}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x).$$

导数现在可以表示成两个微分之商.所以导数亦称为**微商**.

3.4.2　微分的运算法则

由(3.4.4)式可知,要计算函数的微分,只要计算函数的导数,再乘以自变量的微分即可.因此,可直接推得下面的微分公式及微分的运算法则.

$\mathrm{d}(C)=0$;　$\mathrm{d}(\tan x)=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$;　$\mathrm{d}(x^{\alpha})=\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$;

$\mathrm{d}(\arcsin x)=\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;　$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;　$\mathrm{d}(\arctan x)=\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$;

$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$;　$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$;　$\mathrm{d}(\ln|x|)=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

设u,v是x的函数,则

$$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v;\quad \mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v;$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2};\quad \mathrm{d}f(u)=f'(u)\mathrm{d}u. \tag{3.4.5}$$

我们对(3.4.5)式作一些说明.若$y=f(u)$,$u=g(x)$,则复合函数$y=f[g(x)]$的微分为

$$\mathrm{d}y=\{f[g(x)]\}'\mathrm{d}x=f'[g(x)]g'(x)\mathrm{d}x=f'(u)\mathrm{d}u.$$

这个结果与把u看作自变量求微分的结果相同,即是说,对$y=f(u)$求微分时,不论u是自变量还是函数,所得结果是相同的.这个性质叫做**一阶微分形式的不变性**.但要注意,u是自变量时,$\mathrm{d}u=\Delta u$;而u是函数时,$\mathrm{d}u$和Δu一般来说是不同的.

例3.4.1　设$y=\mathrm{e}^{-x^2/2}$,求$\mathrm{d}y$.

解　利用微分的定义,有

$$\mathrm{d}y=(\mathrm{e}^{-x^2/2})'\mathrm{d}x=-x\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x.$$

也可利用一阶微分形式的不变性来做,即

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x^2/2})=\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}\left(\frac{-x^2}{2}\right)=-x\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x.$$ □

例3.4.2　设$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$,求$\mathrm{d}y$.

解　令$u=x+\sqrt{1+x^2}$,则$y=\ln u$,于是

$$\mathrm{d}y=\frac{1}{u}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}.$$ □

例3.4.3　$\mathrm{d}(x\mathrm{e}^x)=x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)+\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x(x+1)\mathrm{d}x$. □

3.4.3　高阶微分

与高阶导数相仿,我们可以定义函数的高阶微分.函数$y=f(x)$的**二阶微分**是一阶微分$\mathrm{d}y$的微分$\mathrm{d}(\mathrm{d}y)$,记作d^2y.而$f(x)$的n**阶微分**则定义为$(n-1)$阶微分的微分.

记作

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

由于$y=f(x)$的一阶微分是

$$dy = f'(x)dx,$$

故二阶微分为

$$d^2y = d(dy) = (f'(x)dx)'dx = (f''(x)dx + f'(x)(dx)')dx = f''(x)dx^2,$$

这里,由于x与dx是互相独立的,因此dx对x的导数$(dx)'=0$.上式中$(dx)^2$记成dx^2.如果孤立地看dx^2,也可理解为x^2求微分,但是在这个等式中,左端为d^2y,自然应将dx^2理解为$(dx)^2$.

类似有　$$d^3y = d(d^2y) = f'''(x)dx^3.$$

一般地有　$$d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

高阶导数也可表示为

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

注意,高阶微分不再具有形式不变性.

例 3.4.4　设$y=\sin x^2$,求d^2y.

解　$$dy = (\sin x^2)'dx = 2x\cos x^2 dx,$$

$$d^2y = (\sin x^2)''dx^2 = (2\cos x^2 - 4x^2\sin x^2)dx^2.$$ □

3.4.4　误差估计

利用微分可以作误差估计和近似计算.我们知道,如果函数$y=f(x)$在x_0点的导数$f'(x_0)\neq 0$,且$|\Delta x|$很小时,有

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x,$$

若记$x=x_0+\Delta x$,则有

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0). \tag{3.4.6}$$

这就是**局部线性逼近**,当$f(x_0)$,$f'(x_0)$比较容易计算时,我们可以通过(3.4.6)式近似地得到$f(x)$的值.

例 3.4.5　计算$\sqrt[3]{29}$的近似值.

解　令$f(x)=\sqrt[3]{x}$,由公式(3.4.6),得

$$\sqrt[3]{29} = \sqrt[3]{27+2} \approx \sqrt[3]{27} + f'(27)(29-27)$$

$$= 3 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{27^{2/3}}\cdot 2 = 3 + \frac{2}{27} \approx 3.0741,$$

所以　$$\sqrt[3]{29} \approx 3.0741.$$ □

我们把例 3.4.5 中的方法总结如下.

为了计算$f(b)$的近似值,

① 找一个与b很接近的数a,且$f(a)$与$f'(a)$都比较容易计算;

② 计算$\Delta x=b-a$(Δx可以为正也可以为负);

③ 计算$f(a)+f'(a)\Delta x$,于是$f(b)\approx f(a)+f'(a)(b-a)$.

例3.4.6　求$\sin 31°$的近似值.

解　令$f(x)=\sin x$,$b=31°=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}$. 取$a=30°=\frac{\pi}{6}$,则$\Delta x=1°=\frac{\pi}{180}$. 所以

$$\sin 31°=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)\approx\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180}$$

$$\approx\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0.017\,45\approx 0.515\,1.$$

注意,计算时必须把角度的单位化为弧度,因x以弧度为单位时,才有$(\sin x)'=\cos x$. 若x以度为单位,则$(\sin x)'\neq\cos x$. □

下面利用微分作误差估计.

如果要求$y=f(x)$,由于仪器的精度问题,测得的自变量恰好不是真值x,而是近似值x_0,记$x-x_0=\Delta x$. 实际上Δx也是未知的,否则由$x_0+\Delta x$即得真值x. 但根据仪器的质量,我们可以知道$|\Delta x|$的上界,这个上界称为x**的绝对误差**,记作δ_x,而称$\frac{\delta_x}{|x_0|}$为x**的相对误差**. 于是有

$$|x-x_0|\leqslant\delta_x.$$

由于x的误差,引起$f(x)$的误差

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

误差$|\Delta y|$的上界,称为y**的绝对误差**,记作δ_y,而称$\frac{\delta_y}{|f(x_0)|}$为$y$**的相对误差**.

在实际问题中,高阶无穷小量总是可以忽略不计的,所以

$$\Delta y\approx f'(x_0)\Delta x,$$

于是

$$|\Delta y|\approx|f'(x_0)||\Delta x|\leqslant|f'(x_0)|\delta_x,$$

即得y的绝对误差为

$$\delta_y=|f'(x_0)|\delta_x,$$

而y的相对误差为

$$\frac{\delta_y}{|f(x_0)|}=\left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right|\delta_x=\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln f(x_0)\right|\delta_x.$$

例3.4.7　设测量圆的半径r时绝对误差是0.1 cm,测得的r值为11.5 cm. 问圆面积的绝对误差和相对误差各是多少?

解　圆面积的公式为$A=\pi r^2$,则$A'(r)=2\pi r$. 由于$r_0=11.5$ cm,$\delta_r=0.1$ cm,故A的绝对误差和相对误差分别为

$$\delta_A = A'(r_0)\delta_r = 2\pi\times 11.5\times 0.1\ \mathrm{cm}^2 = 2.3\pi\ \mathrm{cm}^2,$$

$$\frac{\delta_A}{|A(r_0)|} = \frac{A'(r_0)}{A(r_0)}\cdot\delta_r = \frac{2}{r_0}\times 0.1 = \frac{0.2}{11.5}\approx 1.74\%.$$

(注意,相对误差通常用百分数表示). □

习 题 3.4

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 函数$f(x)$在x_0点的微分如何定义?

(2) 局部线性化的含义是什么?

(3) 函数的可微与可导是一回事吗?

(4) 什么叫一阶微分形式不变性?

(5) 什么叫做测量一个量的绝对误差和相对误差?

2. 计算下列各题:

(1) $\mathrm{d}(x^2\mathrm{e}^x)$; (2) $\mathrm{d}(\sin x - x\cos x)$; (3) $\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)$;

(4) $\mathrm{d}(\sqrt{a^2+x^2})$; (5) $\mathrm{d}(\ln(1-x^2))$; (6) $\mathrm{d}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$.

3. 在下列等式的括号中填上适当的函数:

(1) $\mathrm{d}(\quad)=\frac{\mathrm{d}x}{x}$; (2) $\mathrm{d}(\quad)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$; (3) $\mathrm{d}(\quad)=\cos x\mathrm{d}x$;

(4) $\mathrm{d}(\quad)=\sin x\mathrm{d}x$; (5) $\mathrm{d}(\quad)=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$; (6) $\mathrm{d}(\quad)=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(7) $\mathrm{d}(\quad)=\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$; (8) $\mathrm{d}(\quad)=\frac{\mathrm{d}x}{2x}$; (9) $\mathrm{d}(\quad)=4x^3\mathrm{d}x$;

(10) $\mathrm{d}(\quad)=\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$.

4. 求下列函数的微分:

(1) $y=x\ln x-x$; (2) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$; (3) $y=x^2\cos 2x$; (4) $y=5^x+\frac{1}{2}$.

5. 利用一阶微分形式的不变性求微分:

(1) $y=\arctan\mathrm{e}^x$; (2) $y=\mathrm{e}^{\sin x}$.

6. 求下列近似值:

(1) $\sin 29°$; (2) $\sqrt[3]{1.02}$.

7. 有一立方体的铁箱,其边长为(70 ± 0.1) cm,求出它的体积,并估计绝对误差和相对误差.

(B)

1. 求下列函数的二阶微分d^2y:

(1) $y=\sqrt{1+x^2}$; (2) $y=\frac{\ln x}{x}$.

2. 计算球体体积时,要求精确度在2%以内. 问这时测量直径D的相对误差不能超过多少?

答案与提示

(A)

2. (1)$e^x(2x+x^2)dx$;　(2)$x\sin x dx$;　(3)$-\dfrac{2}{x^3}dx$;　(4)$\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$;

(5)$\dfrac{2x}{x^2-1}dx$;　(6)$\dfrac{1-\ln\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$.

3. (1)$\ln x$;　(2)e^x;　(3)$\sin x$;　(4)$-\cos x$;　(5)$\arctan x$;　(6)$\arcsin x$;　(7)$\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$;

(8)$\ln\sqrt{x}$;　(9)x^4;　(10)$\tan x$.

4. (1)$\ln x dx$;　(2)$-\dfrac{\mathrm{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;　(3)$(2x\cos 2x-2x^2\sin 2x)dx$;　(4)$5^x\ln 5dx$.

5. (1)$\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}dx$;　(2)$\cos x e^{\sin x}dx$.

6. (1)0.484 9;　(2)1.007.

7. 体积$V=x^3$,相对误差为0.4%,绝对误差为1 470 cm^3.

(B)

1. (1)$\dfrac{dx^2}{(1+x^2)^{3/2}}$;　(2)$\dfrac{2\ln x-3}{x^3}dx^2$.

2. 6.7%.

3.5　微分中值定理

3.5.1　极值概念与费马定理

图3.17中$f(x_1)$虽然不是$[a,b]$上的最大值,但x_1却是研究函数性态时的一类重要的点,欲描述它,需引进两个基本概念.

定义3.5.1　设函数$f(x)$定义于区间I,x_0是I上的一点.如果$\forall x\in I$,都有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad(\text{或 } f(x)\geqslant f(x_0)),$$

则称点x_0为$f(x)$在区间I上的**最大点**(或**最小点**).数$f(x_0)$称为$f(x)$在I上的**最大值**(或**最小值**).

定义3.5.2　若存在x_0点的一个邻域$O(x_0)$,使$\forall x\in O(x_0)$,都有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad(\text{或 } f(x)\geqslant f(x_0)),$$

则称x_0是$f(x)$的**极大点**(或**极小点**),$f(x_0)$为**极大值**(或**极小值**);极大值与极小值统称为**极值**.

若上面不等式中,当$x\neq x_0$时有严格不等号成立,则称$f(x_0)$为**严格极值**.极值是一个局部概念,极值定义中只要存在一个邻域,至于邻域有多大是无关紧要的.因此我们又说极值是局部的最大、最小值.而定义3.5.1所说的区间I上的最大、最小值是

一个整体概念,是相对于区间而言的. 若最大、最小值在区间内部达到,则它也是极大、极小值;若最大、最小值在区间端点达到,则它不算极大、极小值. 如图 3.17 中 x_1、x_3 是极大点,x_2、x_4 是极小点,x_3 是最大点,a 是最小点.

定理 3.5.1(**费马定理**)　设 $f(x)$ 在 x_0 点有极值,且 $f'(x_0)$ 存在,则

$$f'(x_0)=0.$$

证　考虑 $f(x)$ 在 x_0 点有极大值的情形.

取 $\Delta x>0$,且 $x_0+\Delta x\in O(x_0)$,则有

$$f(x_0)\geqslant f(x_0+\Delta x),$$

从而有

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0,$$

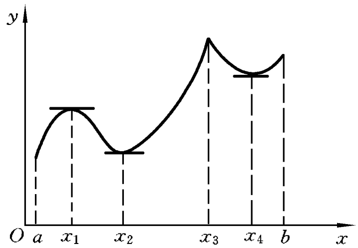


图 3.17

因此得

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0;$$

另一方面,若 $\Delta x<0$,则有

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0,$$

所以得

$$f'(x_0)=0.$$ □

对 x_0 为极小点的情形可类似证明.

费马(Fermat)定理的几何意义是非常明显的. 例如在图3.17 中,函数在 x_1、x_2、x_4 处有极值,且函数在这三个点处可微,因此在这三个点处导数取零值,即曲线在对应的点处有水平切线. 但是我们也要注意到,导数 $f'(x_3)$ 不存在,而 x_3 是函数的极大点. 这个事实告诉我们,在寻找函数的极值点时,除了在使得 $f'(x)=0$ 的点中去找之外,还应当在使得 $f'(x)$ 不存在的点中去找. 由于这个缘故,我们给这种点如下一个名称.

定义 3.5.3　使得 $f'(x)=0$ 或 $f'(x)$ 不存在的点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**临界点**,其中使 $f'(x)=0$ 的点 x_0 称为 $f(x)$ 的**驻点**,而数 $f(x_0)$ 本身称为 $f(x)$ 的**临界值**.

这里我们强调指出:费马定理的逆定理不成立,即条件 $f'(x)=0$ 并不意味着 x 为 $f(x)$ 的极值点. 例如图 3.18 中的函数 $f(x)=x^3$,$f'(0)=0$. 但 $x=0$ 显然不是极值点.

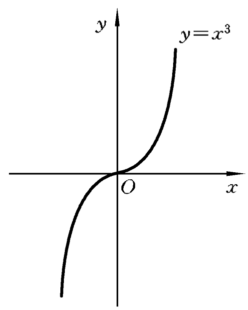


图 3.18

实际问题中要找的通常是最大值或最小值. 根据上面的讨论,可得下面的推论.

推论 3.5.1　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微,且在 $[a,b]$ 内部达到最大(最小)值,又 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内部只有一个临界点,则该临界点就是函数的最大(最小)点.

许多实际问题都符合推论中的条件. 若函数不是由实际问题提出来的,而是由式

子给出的,那么为了找出$[a,b]$上$f(x)$的最大点和最小点,必须考虑以下两种点:

① $[a,b]$内部$f(x)$的临界点;

② 端点a、b.

设x_0为$f(x)$在$[a,b]$上的最大点或最小点,则x_0必为上述两种点的一种.如果有许多属于这两种类型的点,则求$f(x)$的最大值与最小值仍可能是一个无希望的问题.但若只有几个临界点,那么求最大值与最小值的步骤是直截了当的:先求出$f(x)$的上述两种点,再算出这些点处的函数值,这些值中的最大者就是$f(x)$的最大值,而最小者就是最小值.

例3.5.1　求$f(x)=x^3-x$在区间$[-1,2]$的最大值和最小值.

解　由$f'(x)=3x^2-1=0$求得临界点

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

它们都在$[-1,2]$内部.又因为$f(x)$处处可微,所以没有导数不存在的点.最后计算函数值:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2}{3\sqrt{3}},\quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}},\quad f(-1)=0,\quad f(2)=6.$$

显然最小值是$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$,最大值是6.　□

到目前为止,我们的讨论都是用关于f的信息给出关于f'的信息,例如费马定理,尽管这个定理有时能用来确定关于f的某种信息,如极值点的位置,然而,利用f'的信息来确定f的信息仍然是有待我们去探讨的一个重要问题,我们将在后面展开这方面的讨论.

3.5.2　微分中值定理

由导数定义知道,切线是割线的极限位置.现在我们将割线AB固定,让切线T自A至B变动,我们便会发现一个有趣的事实:总存在一条切线T_0,它与割线AB(或称弦AB)是平行的(见图3.19).下面要讨论的微分中值定理,就是反映上述平行性质的定理.

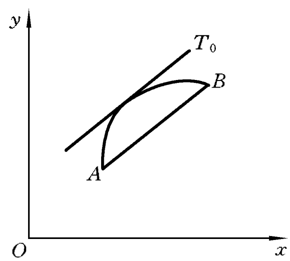


图3.19

定理3.5.2(**罗尔定理**)　设$f(x)\in C[a,b]$,$f(x)$在(a,b)内可导,且$f(a)=f(b)$.则$\exists\,\xi\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)=0.$$

证　因$f(x)\in C[a,b]$,根据连续函数的性质,$f(x)$在$[a,b]$上有最大值M,最小值m.

若$M=m$,即$f(x)$恒为常数,这时$f'(x)=0$,于是(a,b)内任何一点都可取作ξ;

若$M \neq m$,M 与 m 中至少有一个不等于 $f(a)=f(b)$,不妨设$M \neq f(a)$,且设 $f(\xi)=M$ (见图3.20). 由于$f(a) \neq M$,故$\xi \in (a,b)$,即ξ为极值点,且$f'(\xi)$存在. 由费马定理知

$$f'(\xi)=0. \qquad \square$$

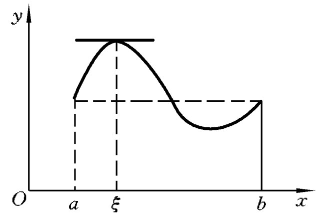


图3.20

罗尔(Rolle)定理的几何意义是:若连接曲线两端的弦是水平的,则曲线上必有一点,该点的切线是水平的. 当我们把曲线转一角度时,弦与切线的水平特性被破坏了,但切线与弦互相平行的特性仍保持着. 换句话说,曲线上总存在一点,该点的切线与连接曲线两端的弦平行. 这就是下面的定理.

定理 3.5.3(**拉格朗日中值定理**) 设$f(x) \in C[a,b]$,$f(x)$在(a,b)内可导,则$\exists \xi \in (a,b)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{3.5.1}$$

公式(3.5.1)称为**拉格朗日中值公式**.

证 弦AB 的方程是

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

因此,曲线的纵坐标与弦 AB 的纵坐标之差为(见图3.21)

$$f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right].$$

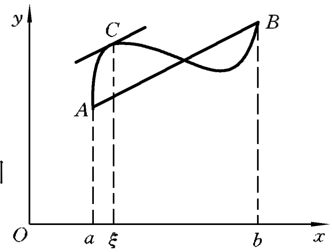


图3.21

构造辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right],$$

显然$\varphi(x) \in C[a,b]$,且在(a,b)内可导,$\varphi(a)=\varphi(b)=0$. 对$\varphi(x)$应用罗尔定理,则$\exists \xi \in (a,b)$,使得

$$\varphi'(\xi)=0,$$

即得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad \square$$

当$f(b)=f(a)$时,拉格朗日中值定理即为罗尔定理. 图3.21给出了拉格朗日中值定理的几何解释.

拉格朗日(Lagrange)定理中的ξ常可表示为

$$\xi=a+\theta(b-a),\ 0<\theta<1,$$

因此定理中的公式常写成

$$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a),\quad 0<\theta<1 \tag{3.5.2}$$

或 $$f(x+h)-f(x)=f'(x+\theta h)h,\quad 0<\theta<1. \tag{3.5.3}$$

我们知道常数函数的导数恒为零,其逆命题也成立.

推论 3.5.2　若函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内恒为零,则 $f(x)=C$ (C 为常数),$x\in(a,b)$.

证　在 (a,b) 内任取两点 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$. 由拉格朗日中值定理,$\exists\xi\in(x_1,x_2)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

由假设知,$f'(\xi)=0$,所以 $f(x_2)=f(x_1)$. 这表明在区间 (a,b) 内任意两点,$f(x)$ 的值是相同的,即 $f(x)$ 在 (a,b) 上为常数:$f(x)=C$ (C 为常数).

推论 3.5.3　若在 (a,b) 上成立 $f'(x)=g'(x)$,则 $f(x)=g(x)+C$ (C 为常数).

这显然是推论 3.5.2 的直接推论.

例 3.5.2　对函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 在区间 $[-1,1]$ 上验证罗尔定理.

解　$f(-1)=0=f(1)$,$f(x)\in C[-1,1]$,而 $f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $(-1,1)$ 内存在. 因此,由罗尔定理知,$\exists\xi\in(-1,1)$,使得 $f'(\xi)=0$. 我们可以求出这个 ξ:

$$-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=0\Rightarrow\xi=0.$$ □

例 3.5.3　设 $f(x)\in C[0,1]$,在开区间 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=1$,$f(1)=0$. 证明:至少存在一点 $x_0\in(0,1)$,使得 $f'(x_0)=-\dfrac{f(x_0)}{x_0}$.

证　作辅助函数 $F(x)=xf(x)$,则 $F(x)\in C[0,1]$,在 $(0,1)$ 内可导,且 $F(0)=F(1)=0$,故 $F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的条件,因此,存在点 $x_0\in(0,1)$,使得 $F'(x_0)=0$. 而

$$F'(x)=xf'(x)+f(x),$$

故 $$x_0f'(x_0)+f(x_0)=0.$$

即得所证. □

例 3.5.4　证明:对任何实数 a,b,恒有

$$|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|. \tag{3.5.4}$$

证　设 $f(x)=\arctan x$,容易验证 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件,从而存在一点 $\xi=a+\theta(b-a)$,$0<\theta<1$,使得

$$\arctan a-\arctan b=\frac{1}{1+\xi^2}(a-b). \tag{3.5.5}$$

因为 $1+\xi^2\geqslant1$,所以由(3.5.5)式能推得(3.5.4)式成立. □

注意,在证明过程中,不需确定 a,b 中哪一个大,哪一个小,这是拉格朗日中值公式的特点之一. 事实上,不论 a 与 b 的大小如何,量

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

总是表示连接$A(a,f(a))$与$B(b,f(b))$的弦的斜率. 所以拉格朗日中值定理也可以叙述成:$f(x)$在区间上连续、可导,a、b为区间上任意两点,则有

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)\quad 或\quad f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$

这里ξ介于a和b之间.

定理3.5.4 设$f(x)\in C(a,b)$,除$x_0\in(a,b)$外,导数$f'(x)$存在,且$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=A$也存在,则$f'(x_0)$也存在,且

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}f'(x)=A.$$

证 由定义$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$,我们要证明右端的极限存在且等于$A$. 对于充分小的$h>0$,$f(x)$在$[x_0,x_0+h]$上连续,在$(x_0,x_0+h)$内可微(对于充分小的$h<0$,类似的结论也成立). 由拉格朗日中值定理知,$\exists\xi\in(x_0,x_0+h)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

因为$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=A$存在,故$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使当$0<|x-x_0|<\delta$时,有

$$|f'(x)-A|<\varepsilon.$$

又因$h\to 0$时,$\xi\to x_0$,所以对上述δ,当$|h|$充分小时,必有$0<|\xi-x_0|<\delta$,从而有

$$|f'(\xi)-A|<\varepsilon.$$

这表明

$$\lim_{h\to 0}f'(\xi)=A,$$

也就有

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}f'(\xi)=A. \qquad \square$$

定理3.5.4告诉我们,连续函数$f(x)$的导函数$f'(x)$在x_0点有极限,则$f(x)$在x_0的导数$f'(x_0)$存在并且就等于该极限值. 但反过来是不对的,即若$f'(x_0)$存在,但$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$未必存在. 读者可以通过例子

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

来检验.

定理3.5.5(**柯西中值定理**) 设$f(x)$、$g(x)\in C[a,b]$,且在(a,b)内可导,$g'(x)\neq 0$. 则$\exists\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证 首先由拉格朗日中值定理知

$$g(b)-g(a)=g'(\eta)(b-a)\neq 0.$$

故定理中的公式有意义. 构造辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)[g(b)-g(a)]-g(x)[f(b)-f(a)],$$

显然 $\varphi(x)\in C[a,b]$,在 (a,b) 内可导,且

$$\varphi(a)=\varphi(b)=f(a)g(b)-g(a)f(b).$$

由罗尔定理知, $\exists\,\xi\in(a,b)$,使得

$$\varphi'(\xi)=0,$$

或

$$f'(\xi)[g(b)-g(a)]-g'(\xi)[f(b)-f(a)]=0.$$

整理即得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

□

例3.5.5　设 $f(x)\in C[a,b]\,(a>0)$,且在 (a,b) 内可导. 证明存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)-f(a)=\xi\ln\frac{b}{a}\cdot f'(\xi).$$

证　令 $g(x)=\ln x$,则 $g\in C[a,b]$,在 (a,b) 内可导,且 $g'(x)=\dfrac{1}{x}\neq 0$, $g(a)\neq g(b)$. 由柯西中值定理推得必存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{1/\xi}.$$

上式整理后即得所要证的等式.　□

3.5.3　洛必达法则

如果当 $x\to a$(或 $x\to\infty$)时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 都趋于零或都趋于无穷大,则极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$(或 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$)可能存在,也可能不存在. 我们称这种类型的极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的不定式. 由柯西(Cauchy)中值定理可推出求这类极限的洛必达(L' Hospital)法则.

定理 3.5.6(**洛必达法则**)　设

(1) $f(x)$、$g(x)$ 在 a 的某空心邻域 $O_0(a,\delta)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$(或 ∞);

(2) $f(x)$、$g(x)$ 在 $O_0(a,\delta)$ 上可导,且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$($l$ 为有限或 $\pm\infty$),则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$.

证　只证不定式为 $\dfrac{0}{0}$ 型的情形. 补充定义

$$f(a)=g(a)=0,$$

则函数 $f(x)$、$g(x)\in C(a-\delta,a]$,且在 $(a-\delta,a)$ 上可导. $\forall\,x\in(a-\delta,a)$,对函数 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 $[x,a]$ 上应用柯西中值定理,存在 $\xi\in(x,a)$,使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

当 $x\to a$ 时,显然 $\xi\to a$,由条件(3)知

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=l,$$

因此
$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

同理可证
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

合起来得
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$ □

我们指出,洛必达法则对于 a 取 a^+、a^-,或者 a 取 ∞、$+\infty$、$-\infty$ 均成立.下面通过例子说明洛必达法则的应用.

例 3.5.6 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$.

解 这是 $\dfrac{0}{0}$ 型.用洛必达法则得

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1}=1.$$ □

例 3.5.7 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1.$$

□

例3.5.7 给出的极限是 $\infty\cdot 0$ 型的,把它转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型之后便可以应用洛必达法则.

例 3.5.8 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}(\alpha>0)$.

解 这是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的极限,用洛必达法则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$$ □

例 3.5.9 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$($n$ 为正整数).

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$ □

除了 $\dfrac{0}{0}$ 与 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 这两种基本的不定式外,还有其他类型的不定式,如 $\infty\cdot 0$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 等,我们总可以将它们化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式,再利用洛必达法则求极限.

例 3.5.10 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x$.

解　这是$0\cdot\infty$型不定式,将其转化为$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式来计算极限.

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0.$$ □

例3.5.11　求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

解　这是不定式$\infty-\infty$,由
$$\sec x-\tan x=\frac{1-\sin x}{\cos x},$$
可把原式化为$\dfrac{0}{0}$型不定式极限. 于是得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$ □

例3.5.12　求$\lim\limits_{x\to0^+}x^x$.

解　这是0^0型不定式极限. 函数$f(x)=x^x$可写成
$$f(x)=x^x=e^{x\ln x},$$
由例3.5.10的结果及函数e^u的连续性,得
$$\lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to0^+}e^{x\ln x}=\exp\{\lim_{x\to0^+}x\ln x\}=e^0=1.$$ □

这里记号$\exp\{x\}$表示函数e^x.

例3.5.13　求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$,其中$a_i>0,i=1,2,\cdots,n$.

解　这是1^∞型极限,用取对数的方法化为$\dfrac{0}{0}$型,再用洛必达法则求极限. 因

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}\cdot\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{n}\right)\\&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n)}{n},\end{aligned}$$

故
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}.$$ □

习　题　3.5

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 极值与最大、最小值有什么区别?

(2) 什么叫做函数的临界点? 临界点一定是极值点吗? 为什么?

(3) 函数的临界值与极值有什么区别?

(4) 求函数在区间上的最大、最小值有哪几个基本步骤?

(5) 罗尔定理中的条件可以去掉其中的一条吗? 若不能,你能否举个例子说明?

(6) 拉格朗日中值定理中的“中值”是指什么?

(a) 中值是指区间$[a,b]$的中点$\left(\xi=\dfrac{a+b}{2}\right)$吗?

(b) 中值是f在$[a,b]$上的平均变化率吗?

(7) 拉格朗日中值定理结论中的中值点ξ是唯一的吗? 当区间端点a或b改变时,中值点ξ是否一定随之改变?

(8) 若$f'(x_0)$存在,那么极限$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$是否必存在? 为什么?

(9) 哪些类型的极限是称为不定式的? 这里的“不定”是指什么?

(10) 满足什么条件的极限问题,可应用洛必达法则求解?

(11) 怎样把求下列类型不定式极限:$\infty-\infty, 0\cdot\infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$转化为求$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式极限问题?

2. 求出下列函数的临界点:

(1) $y=2x^3+3x^2-36x+5$;　(2) $y=3x^4-4x^3+6$;　(3) $y=(x^2-4)^7$;

(4) $y=(x^3-8)^4$;　(5) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$;　(6) $y=2x^2e^{5x}+1$.

3. 求下列函数在指定区间上的最大值:

(1) $f(x)=x^2-4x+6,\quad -3\leqslant x\leqslant 10$;　(2) $f(x)=|x^2-3x+2|,\quad -10\leqslant x\leqslant 10$;

(3) $f(x)=x^2\sqrt{a^2-x^2},\quad 0\leqslant x\leqslant a$;　(4) $f(x)=x^n(1-x)^m,\quad 0\leqslant x\leqslant 1$, n和m为正整数;

(5) $f(x)=x^2e^{-3x},\quad x\geqslant 0$;　(6) $f(x)=x^2\ln\dfrac{1}{x},\quad x>0$.

4. 求下列函数在指定区间上的最小值:

(1) $f(x)=x^2-3x-7,\quad -1\leqslant x\leqslant 5$;　(2) $f(x)=2^x,\quad -1\leqslant x\leqslant 5$;

(3) $f(x)=x+\dfrac{1}{x},\quad 0.01\leqslant x\leqslant 100$;　(4) $f(x)=\sqrt{5-4x},\quad -1\leqslant x\leqslant 1$;

(5) $f(x)=x^2-\dfrac{16}{x},\quad x<0$;　(6) $f(x)=x+\sqrt{1-x},\quad -1\leqslant x\leqslant 1$.

5. 拉格朗日中值定理证明的关键是构造辅助函数,试利用下列辅助函数来证明这个定理:

(1) $\Phi(x)=[f(x)-f(a)](b-a)-(x-a)[f(b)-f(a)]$;

(2) $\Phi(x)=f(x)(b-a)-x[f(b)-f(a)]$.

6. (1) 证明:如果$\forall x\in[a,b]$,有$f'(x)\geqslant m$,m是某常数,则有$f(b)\geqslant f(a)+m(b-a)$;

(2) 证明:如果$\forall x\in[a,b]$,有$f'(x)\leqslant M$,M是某常数,则有$f(b)\leqslant f(a)+M(b-a)$;

(3) 如果$\forall x\in[a,b]$,有$|f'(x)|\leqslant M$,试写出一个类似的定理.

7. 证明:无论m是什么数,多项式函数$f(x)=x^3-3x+m$在$[0,1]$内决不会有两个零点.

8. 设$f(x)\in C[0,1]$且可微;对于每个x,$f(x)$的值都在$(0,1)$内;并且$\forall x\in(0,1)$,$f'(x)\neq 1$.求证:存在唯一的一个数$x_0\in(0,1)$,使得$f(x_0)=x_0$.(这一题有一半在习题2.8(A)第6题中已完成.)

9. 设对一切实数x,有$f'(x)>g'(x)$,且$f(a)=g(a)$.证明:当$x>a$时,$f(x)>g(x)$;而当$x<a$时,$f(x)<g(x)$.

10. 证明不等式：

(1) $|\sin b-\sin a|\leqslant|b-a|$;　　(2) $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$　$(a>b>0)$.

11. 证明：若 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导，则必存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

12. 设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$. 求证：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

13. 设 $ab>0$，证明 $ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b)$，其中 ξ 介于 a 和 b 之间.

14. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$;　(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}(a>0,n>0)$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$;　(5) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\tan nx}{\tan mx}$（$n,m$ 为自然数）;　(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

(7) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$;　(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

15. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$;　(2) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]$;　(3) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$;　(5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$;　(6) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{x}}$;　(8) $\lim\limits_{x\to0}x\cot 2x$.

16. 下面各题应用洛必达法则错在何处：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+1}{2x-3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x}{2}=3$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\sin x}{\sin x}=-1$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$ 不存在. 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ 不存在.

(B)

1. 求下列函数的极值点：

(1) $f(x)=\begin{cases}x, & x\neq3,5,7,9,\\ 5, & x=3,\\ -3, & x=5,\\ 9, & x=7,\\ 7, & x=9;\end{cases}$　(2) $f(x)=\begin{cases}x, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数};\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}1, & x=\dfrac{1}{n},n\text{ 为自然数},\\ 0, & x\neq\dfrac{1}{n};\end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 }x\text{ 的十进制小数表示包含一个5时},\\ 0, & \text{其他地方}.\end{cases}$

2. 设函数 $f(x)$ 满足 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|^n$，$n>1$，通过考虑 f' 证明 f 是常数.

3. 证明：若$\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$，则对于区间$[0,1]$内的某个$x$，有$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$.
4. 求证：方程$e^x=ax^2+bx+c$的根不超过三个.
5. 设不恒为常数的函数$f(x)\in C[a,b]$，在(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)$. 证明：至少有一点$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)>0$.
6. 设$f(x)$可导，求证：在$f(x)$的两个零点之间必有$f(x)+f'(x)$的零点.
7. 设函数$f(x)\in C[0,1]$，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0,f(1)=1$. 又设$f(x)$是x的非线性函数. 求证：在$(0,1)$内至少存在一点ξ，使得$f'(\xi)>1$.
8. 证明拉格朗日中值定理的一个推广：设$f(x)$在(a,b)上连续且可微，并且$f(a^+)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$与$f(b^-)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$均存在，则必存在一点$\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b^-)-f(a^+)}{b-a}.$$

9. 设$f(x)$、$g(x)\in C[a,b]$，在(a,b)内可微，并且$\forall x\in(a,b)$，$g'(x)\neq0$. 求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}.$$

10. 设$h>0$，$f'(x)$在$(a-h,a+h)$内存在. 求证：

(1) $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=f'(a+\theta h)+f'(a-\theta h)\quad(0<\theta<1)$;

(2) $\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h}=f'(a+\theta h)-f'(a-\theta h)\quad(0<\theta<1)$.

11. 由拉格朗日中值定理知，$\ln(1+x)-0=x\cdot\frac{1}{1+\theta x}\quad(0<\theta<1)$，证明 $\lim\limits_{x\to0}\theta=\frac{1}{2}$.
12. 设$f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$并设$g(0)=g'(0)=0$，$g''(0)=17$. 求$f'(0)$.
13. 利用本节定理3.5.4证明：在导数处处存在的前提下，一个函数的导函数不可能有第一类间断点.
14. 设$f(x)$一阶可导，且$f''(x_0)$存在. 求证：

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2}=f''(x_0).$$

答案与提示

(A)

2. (1) $x_1=2,x_2=-3$; (2) $x_1=0,x_2=1$; (3) $x_1=0,x_2=2,x_3=-2$;

(4) $x_1=0,x_2=2$; (5) $x_1=-1,x_2=1$; (6) $x_1=0,x_2=-\frac{2}{5}$.

3. (1) 66; (2) 132; (3) $\frac{2a^3}{3\sqrt{3}}$; (4) $\frac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n}}$; (5) $\frac{4}{9e^2}$; (6) $\frac{1}{2e}$.
4. (1) $-\frac{37}{4}$; (2) $\frac{1}{2}$; (3) 2; (4) 1; (5) 12; (6) $\sqrt{2}-1$.
7. 用反证法及罗尔定理.
10. 分别对函数$\sin x$、$\ln x$在适当的区间上用拉格朗日中值定理.

12. 对$F(x)=\frac{f(x)}{x}$,$G(x)=\frac{1}{x}$在适当的区间上用柯西中值定理.

14. (1) 2;　(2) $\frac{1}{2}$;　(3) 0;　(4) $\frac{1}{2}$;　(5) $\frac{n}{m}$;　(6) $\cos a$;　(7) $\frac{m}{n}a^{m-n}$;　(8) 1.

15. (1) 0;　(2) $\frac{1}{2}$;　(3) $\frac{2}{\pi}$;　(4) 1;　(5) 2;　(6) $e^{-\frac{1}{2}}$;　(7) 1;　(8) $\frac{1}{2}$.

(B)

1. (1) 3,7为极大点;5,9为极小点;　(2) 一切正无理数为极小点;一切负无理数为极大点;
   (3) $\forall n$,$\frac{1}{n}$为极大点;其余的x为极小点;　(4) 当x的十进制小数表示包含数字5时,x为极大点;当x的十进制小数表示不包含数字5时,x为极小点.

2. 考虑$0\leqslant\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\leqslant(x-y)^{n-1}$.

7. 注意到在(0,1)内至少有一点c,使$f(c)\neq c$.

10. (1)考虑辅助函数$g(x)=f(a+x)-f(a-x)$.

12. $f'(0)=\frac{17}{2}$.

3.6　泰勒公式

局部线性化只给出了函数的一阶多项式逼近.本节将介绍用高阶多项式来逼近具有一定可微性的函数,即泰勒公式,它在理论研究和近似计算中都有广泛的应用.

3.6.1　泰勒公式

我们在本章3.4.1中已经指出,如果函数$f(x)$在点x_0有导数,则当$x-x_0\to 0$时,

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0).\tag{3.6.1}$$

当$|x-x_0|$很小时,根据这个公式,我们就可以把$f(x)$近似地表示为x的线性函数:

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

并且这个近似等式的误差就是$o(x-x_0)$.换句话说,当$|x-x_0|$充分小时,不仅这个误差本身很小,而且它与$|x-x_0|$比起来也非常小.这一点对于近似计算有相当大的价值.我们马上就要看到,上述事实还是今后理论的进一步发展的出发点.

让我们还是再回到计算$f(x)$的近似值的问题上来.对公式(3.6.1)中的量$o(x-x_0)$,我们没有关于它的更精确的信息,只知道它是比$x-x_0$更高阶的无穷小量.那么,在略去$o(x-x_0)$时,所得到的近似值是否符合预先的精确程度的要求呢?有时会遇到这种情形,比如说,我们必须计算到与$x-x_0$相比是二阶的无穷小量(也就是必须计算到$(x-x_0)^2$),但是高于二阶的量(也就是$o((x-x_0)^2)$)倒可以忽略不计.于是,我们就想到,是否可以建立一个更精确的公式:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2),$$

其中a_0、a_1、a_2都是与$x-x_0$无关的常数.换句话说.就是要用一个二次三项式来逼近$f(x)$:

$$f(x) \approx a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2,$$

并且其误差是一个$o((x-x_0)^2)$形式的量.

很自然地,我们可以提出一个更一般的问题:是否可以找到一个n次多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

(其系数与$x-x_0$无关),使当$x-x_0 \to 0$时,有

$$f(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n). \tag{3.6.2}$$

如果$P_n(x)$存在,那么它的系数怎样求? 如果以上两个问题能够得到肯定的解决,则多项式$P_n(x)$就是对$f(x)$的一个很好的逼近,并且可以精确到我们所需要的程度.

考虑代数多项式

$$P_n(x) = a_n(x-x_0)^n + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \cdots + a_1(x-x_0) + a_0.$$

仿照本章例3.2.12的做法,我们可以将这个多项式表示成

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{1}{1!}P_n'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}P_n''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}P_n^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

于是,如果给定了一个在点x_0处有n阶导数的函数$f(x)$,那么我们可以随即写出多项式

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n, \tag{3.6.3}$$

这个多项式在点x_0处的不超过n阶的导数与$f(x)$在点x_0处的同阶导数相同.

定义3.6.1　由关系式(3.6.3)给出的多项式称为函数$f(x)$在点x_0处的n阶**泰勒**(Taylor)**多项式**.

我们感兴趣的是量

$$f(x) - P_n(x) = R_n(x-x_0), \tag{3.6.4}$$

即多项式$P_n(x)$与函数$f(x)$的偏差. 我们称公式

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x-x_0) \tag{3.6.5}$$

为n阶**泰勒公式**,称$R_n(x-x_0)$为n阶余项.

下面给出带皮亚诺(Peano)余项的泰勒公式.

定理3.6.1(**带皮亚诺余项的泰勒公式**)　假设

(1) 函数$f(x)$在x_0点的某个邻域$O(x_0)$内有定义;

(2) 在此邻域内$f(x)$有直到$(n-1)$阶导数;

(3) $f(x)$在x_0点的n阶导数存在.

则
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n). \tag{3.6.6}$$

证　令$h=x-x_0$,证明(3.6.6)式等价于证明极限
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\left\{f(x_0+h)-\left[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2\right.\right.$$
$$\left.\left.+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n\right]\right\}=0. \tag{3.6.7}$$

为此,根据定理的假设条件,可以对(3.6.7)式左端连续应用$(n-1)$次洛必达法则:
$$左端=\lim_{h\to 0}\frac{1}{nh^{n-1}}\left\{f'(x_0+h)-\left[f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{1!}h\right.\right.$$
$$\left.\left.+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1}\right]\right\}=\cdots$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-[f^{(n-1)}(x_0)+f^{(n)}(x_0)h]}{n!h}$$
$$=\frac{1}{n!}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-f^{(n-1)}(x_0)}{h}-f^{(n)}(x_0)\right]=0.$$

最后一个等号成立可以根据导数定义得到. 证毕. □

公式(3.6.6)称为**带皮亚诺余项的泰勒公式**,其中的系数
$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\quad(k=0,1,\cdots,n)$$
称为**泰勒系数**. 定理3.6.1给出了函数在一点附近用多项式逼近的问题,对于误差只给出了定性的描述,不能具体估计误差的大小. 如果要具体计算函数值并达到预先给定的误差,就需要进一步讨论函数在区间上用多项式逼近,并给出误差项一个定量的公式. 下面带拉格朗日余项的泰勒公式就可解决这个问题.

定理3.6.2(**带拉格朗日余项的泰勒公式**)　假设

(1)函数$f(x)$在$[a,b]$上有定义;

(2)在闭区间$[a,b]$上有直到n阶的连续导数;

(3)在开区间(a,b)内有$(n+1)$阶导数.

则对$\forall x_0\in[a,b]$,有
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{3.6.8}$$
其中ξ介于x与x_0之间.

证明(梗概)　对辅助函数

$$F(t)=f(x)-\left[f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right],$$

$$G(t)=(x-t)^{n+1}$$

在区间$[x_0,x]$上应用柯西中值定理即得. 证明的细节留作习题请读者完成. □

当$n=0$时,公式(3.6.8)变成拉格朗日中值公式:

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0).$$

因此,定理3.6.2是拉格朗日中值定理的推广,常称为**泰勒中值定理**.

当$x_0=0$时,泰勒公式(3.6.8)变成

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$(0<\theta<1). \qquad (3.6.9)$$

公式(3.6.9)常称为**带拉格朗日余项的麦克劳林(Maclaurin)公式**.

而当$x_0=0$时,泰勒公式(3.6.6)变成

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n). \qquad (3.6.10)$$

公式(3.6.10)称为**带皮亚诺余项的麦克劳林公式**.

3.6.2　几个基本初等函数的麦克劳林公式

下面利用公式(3.6.9)或(3.6.10)求出几个常用初等函数的麦克劳林公式.

例3.6.1　设$f(x)=\mathrm{e}^x$,求它的麦克劳林公式.

解　因$f^{(k)}(x)=\mathrm{e}^x$, $f^{(k)}(0)=1$,

$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{1}{k!}\quad(k=0,1,2,\cdots,n).$$

所以

$$\mathrm{e}^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n).$$

□

例3.6.2　设$f(x)=\sin x$,求麦克劳林公式.

解　因$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)$,故

$$f^{(2k)}(0)=0,\quad f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k\quad(k=0,1,\cdots,n).$$

于是得

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n}).$$

类似可得

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}).$$

□

例3.6.3　设$f(x)=\ln(1+x)$,求麦克劳林公式.

解　因为$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$,故

$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{(-1)^{k-1}}{k}\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

所以
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n).$$
□

例3.6.4　设$f(x)=(1+x)^\alpha$,求麦克劳林公式.

解　$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$,故

$$a_0=1,\quad a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}(k=1,2,\cdots,n).$$

因此

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$$
□

例3.6.5　将函数$f(x)=\ln(1+\sin^2x)$在$x=0$点展开到x^4次项.

解　利用$\ln(1+x)$的展开式可得

$$\ln(1+\sin^2x)=\sin^2x-\frac{1}{2}\sin^4x+o(\sin^4x),$$

再将$\sin x$的展开式代入上式得

$$\begin{aligned}\ln(1+\sin^2x)&=\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right]^2-\frac{1}{2}[x+o(x)]^4+o(x^4)\\&=x^2-\frac{5}{6}x^4+o(x^4).\end{aligned}$$
□

从上面几个例子中可以看出,利用带皮亚诺余项的麦克劳林公式,我们可以分离出无穷小量的主部,例如,当$x\to0$时,

$$e^x-1\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\quad \ln(1+\sin^2x)\sim x^2,$$

$$\sin x\sim x,\quad \ln(1+x)\sim x,\quad (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x,$$

等等.利用这些事实,我们可以很方便地计算某些极限.

例3.6.6　求极限$I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+\alpha x)^\beta-(1+\beta x)^\alpha}{x^2}$.

解　由例3.6.4中的公式,有

$$(1+\alpha x)^\beta=1+\beta\alpha x+\frac{\beta(\beta-1)}{2}\alpha^2x^2+o(x^2),$$

$$(1+\beta x)^\alpha=1+\alpha\beta x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\beta^2x^2+o(x^2).$$

因此有

$$I=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1+\beta\alpha x+\dfrac{\beta(\beta-1)}{2}\alpha^2x^2+o(x^2)}{x^2}-\frac{1+\alpha\beta x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}\beta^2x^2+o(x^2)}{x^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[\beta(\beta-1)\alpha^2-\alpha(\alpha-1)\beta^2]=\frac{\alpha\beta(\beta-\alpha)}{2}.$$ □

例 3.6.7　求极限 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

解　$I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}-x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{x\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]-x\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)+1-o(1)\right]=1.$$ □

例 3.6.8　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}x^{(x^x-1)}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}x^{(x^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\exp[(x^x-1)\ln x]=\exp[\lim\limits_{x\to 0}(e^{x\ln x}-1)\ln x]$

$$=\exp[\lim_{x\to 0}(x\ln x+o(x\ln x))\ln x]=e^0=1.$$ □

以上麦克劳林公式中均采用皮亚诺余项,若采用拉格朗日余项,相应的麦克劳林公式为

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$
$$(-\infty<x<+\infty,0<\theta<1);\tag{3.6.11}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$
$$(-\infty<x<+\infty,0<\theta<1);\tag{3.6.12}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$
$$(-\infty<x<+\infty,0<\theta<1);\tag{3.6.13}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$
$$(x>-1,0<\theta<1);\tag{3.6.14}$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}\quad(x>-1,0<\theta<1).\tag{3.6.15}$$

例 3.6.9　记公式(3.6.8)中的余项为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

则由 $\sin x$ 的展开式(3.6.12)知，其余项有如下的估计：

$$|R_{2m}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}, \tag{3.6.16}$$

当 $m=1$ 时，有 $$\sin x \approx x,$$

其误差为 $$|\sin x - x| = |R_2(x)| \leqslant \frac{|x|^3}{3!} = \frac{|x|^3}{6}.$$

如要求误差不超过 10^{-3}，即要求 $\frac{|x|^3}{6} < 10^{-3}$，只要

$$|x| < 0.181\,7.$$

这就是说，大约在原点左右10°范围内用 x 来逼近 $\sin x$ 时，其误差不超过 10^{-3}.

当 $m=2$ 时，即在(3.6.12)式中用三次多项式逼近正弦函数：

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \tag{3.6.17}$$

如果仍然要求误差不超过 10^{-3}，那么由(3.6.16)式应有

$$\frac{|x|^5}{5!} < 10^{-3},$$

因此有 $$|x| < 0.654\,4.$$

即在原点左右37°30′范围内(3.6.17)式的误差不超过 10^{-3}.

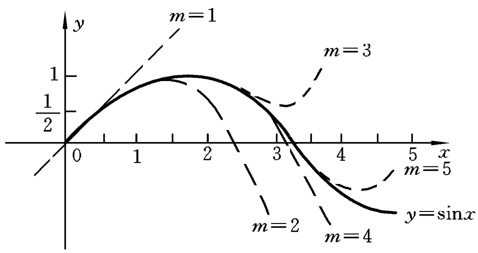


图3.22

进一步讨论还可说明，用高阶泰勒多项式逼近函数时，不仅能提高精确度，而且能在更大范围内表示所讨论的函数. 图3.22给出了正弦函数 $\sin x$ 与其泰勒多项式($m=1,2,3,4,5$)在原点附近的差异情况. □

习　题　3.6

(A)

1. 回答下列问题：
   (1) 泰勒公式与拉格朗日中值公式有什么关系？
   (2) 泰勒公式的皮亚诺余项与拉格朗日余项有什么差别？
   (3) 什么叫麦克劳林公式？
2. 按 x 的正整数幂，写出下列函数的展开式至含有指定阶数的项(带皮亚诺余项)：
   (1) $\frac{1}{1-x}$ 到含 x^7 的项；　　(2) $\arctan x$ 到含 x^4 的项；
   (3) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ 到含 x^4 的项；　　(4) $\tan x$ 到含 x^4 的项.
3. 按 $(x+1)$ 的乘幂展开多项式 $P(x)=1+3x+5x^2-2x^3$.
4. 写出 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $x_0=-1$ 的 n 阶泰勒公式，要求写出拉格朗日余项.

5. 求函数 $f(x)=xe^x$ 的 n 阶麦克劳林公式,带拉格朗日余项.

6. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$;　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}}{x^3}$;　(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{(\sin2x)^6}$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$;　(5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;　(6) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}$.

(B)

1. 对于下列各题,假定 $P_2(x)=a+bx+cx^2$ 是函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近的二阶泰勒多项式. 若 $f(x)$ 的图形如图 3.23 所示,你能说出 a,b,c 的符号吗?

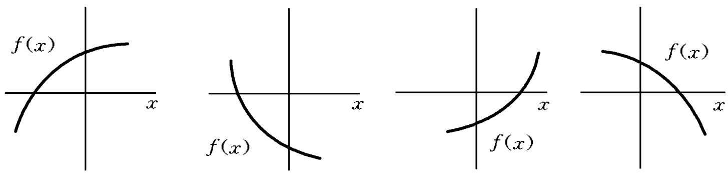


图 3.23

2. 钟摆运动的模型为 $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=-\dfrac{g}{l}\sin\theta$,其中 θ 为钟摆与垂直方向的夹角. 这个方程可以用下列方程代替:$\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=-\dfrac{g}{l}\theta$. 试说明在何种条件下,作这样的代换是合理的.

3. 利用三阶泰勒公式求下列各数的近似值,并估计误差:

(1) $\sqrt[3]{30}$;　(2) $\sin18°$.

4. 验证当 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,按公式 $e^x\approx1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时,所产生的误差小于 0.01,并求 $\sqrt{e}$ 的近似值,使误差小于 0.01.

5. 试完成定理 3.6.2 的证明.

6. 试在区间 $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上画出用泰勒多项式 $P_2(x)$ 及 $P_8(x)$ 逼近 $y=\cos x$ 的大致图形.

答案与提示

(A)

2. (1) $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+o(x^7)$;　(2) $\arctan x=x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^4)$;

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3\cdot1}{2^3}x^2-\dfrac{5\cdot3\cdot1}{2^4\cdot3}x^3+\dfrac{7\cdot5\cdot3\cdot1}{2^5\cdot4\cdot3}x^4+o(x^4)$;

(4) $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^6)$.

3. $P(x)=5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3$.

4. $\dfrac{1}{x}=-1-(x+1)-(x+1)^2-\cdots-(x+1)^n+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x+1)^{n+1}$,　($\xi$ 介于 x 与 -1 之间).

5. $xe^x = x + x^2 + \dfrac{x^3}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{(n-1)!} + \dfrac{n+1+\theta x}{(n+1)!}e^{\theta x}x^{n+1} \quad (0<\theta<1).$

6. (1) $\dfrac{1}{2}$；　(2) $\dfrac{1}{6}$；　(3) $\dfrac{1}{128}$；　(4) 1；　(5) $\dfrac{1}{2}$；　(6) -3.

(B)

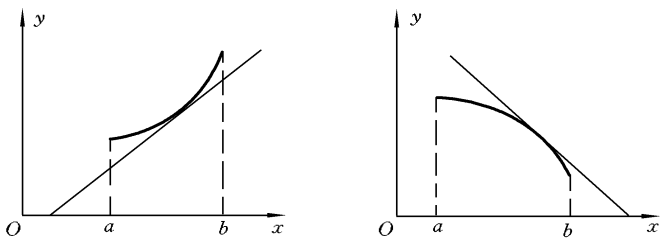
3. (1) $\sqrt[3]{30} \approx 3.1072, \Delta < 1.88\times 10^{-5}$；　(2) $\sin 18° \approx 0.308991, \Delta < 2.55\times 10^{-6}$.

4. $\sqrt{e} \approx 1.645$.

3.7　函数性态的研究

3.7.1　函数的单调性

曲线的升降与切线的斜率密切相关.曲线沿 x 轴正向上升时,切线的斜率为正;而当曲线沿 x 轴正向下降时,切线的斜率为负(见图3.24).因此,我们可以用导数的符号来判定函数的单调性.



曲线上升时,切线斜率为正.　　　曲线下降时,切线斜率为负.

图3.24

定理3.7.1　设 $f(x)\in C[a,b]$,在 (a,b) 内可导,则

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加的充要条件是 $f'(x)\geqslant 0, x\in(a,b)$;

(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少的充要条件是 $f'(x)\leqslant 0, x\in(a,b)$.

证　只证明(1).对(2)可类似证明.

必要性　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加,则 $\forall x, x+\Delta x\in(a,b)$,有

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geqslant 0,$$

所以
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

充分性　$\forall x_1, x_2\in[a,b]$,且 $x_1<x_2$,在 $[x_1,x_2]$ 上应用拉格朗日中值定理得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\quad(x_1<\xi<x_2).$$

因 $f'(\xi)\geqslant 0$,所以有
$$f(x_2)\geqslant f(x_1).$$

这正说明$f(x)$在$[a,b]$上单调增加. □

推论 3.7.1 设$f(x)\in C[a,b]$,在(a,b)内可导,且$f'(x)\geqslant 0(f'(x)\leqslant 0)$,又设$f'(x)$在$(a,b)$的任一子区间上不恒为零,则函数在$[a,b]$上严格递增(严格递减).

证 由定理3.7.1知,$f(x)$单调增加,因此对一切$x_1<x<x_2$,有

$$f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2).$$

如果$f(x_1)=f(x_2)$,则$f(x)\equiv f(x_1)$,$x\in(x_1,x_2)$. 于是,$\forall x\in(x_1,x_2)$,有$f'(x)=0$. 这说明$f'(x)$在子区间(x_1,x_2)上恒为零,这与假设矛盾. 矛盾说明,$\forall x\in(x_1,x_2)$有$f(x_1)<f(x_2)$,即$f(x)$在$[a,b]$上严格递增.

对于$f(x)$严格递减的情形,可类似证明. □

例 3.7.1 判定函数$f(x)=x+\cos x$在区间$[0,2\pi]$上的单调性.

解 显然$f(x)\in C[0,2\pi]$,且

$$f'(x)=1-\sin x\geqslant 0,\quad x\in(0,2\pi),$$

由定理3.7.1的(1)知,$x+\cos x$在$[0,2\pi]$上单调增加. □

例 3.7.2 讨论函数$f(x)=e^x-x-1$的单调性.

解 $f'(x)=e^x-1$,$f'(0)=0$.

当$x\leqslant 0$时,$f'(x)\leqslant 0$,函数在$(-\infty,0]$上单调减少;

当$x\geqslant 0$时,$f'(x)\geqslant 0$,函数在$[0,+\infty)$上单调增加.

由于$f'(x)$仅在$x=0$处等于零,故由推论可知,$f(x)=e^x-x-1$在$(-\infty,0]$上严格递减,在$[0,+\infty)$上严格递增. □

例 3.7.3 确定函数$f(x)=3x-x^3$的单调区间.

解 $f'(x)=3-3x^2=3(1-x)(1+x)$,$f'(x)=0$的根为$x=\pm 1$. 因此,$f'(x)$分别在区间$(-\infty,-1)$,$(-1,1)$,$(1,+\infty)$保持定号. 为了确定$f(x)$在$(-\infty,-1)$中的符号,可采用所谓代点法,即在$(-\infty,-1)$中任取一点,例如$x=-2$,代入得$f'(-2)=-9<0$,因此,$f'(x)$在$(-\infty,-1)$内小于零,从而$f(x)$在$(-\infty,-1]$上严格递减. 类似可推知$f(x)$在$[-1,1]$上严格递增,在$[1,+\infty)$上严格递减. 于是$f(x)$的单调区间为$(-\infty,-1]$,$[-1,1]$和$[1,+\infty)$(见图3.25). □

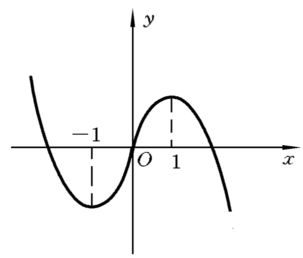


图3.25

例 3.7.4 证明$e^x>1+x\ (x\neq 0)$.

证 令$f(x)=e^x-(1+x)$,要证明$f(x)>0=f(0)$. 根据例3.7.2的结论知,

$$x>0\text{时},f(x)>f(0);\quad x<0\text{时},f(x)>f(0),$$

即当$x\neq 0$时,恒有$e^x>1+x$. □

例 3.7.5 证明方程$x-\dfrac{1}{2}\sin x=0$只有一个根$x=0$.

证　令 $f(x)=x-\frac{1}{2}\sin x$，则 $f(0)=0$. 而

$$f'(x)=1-\frac{1}{2}\cos x>0\quad(-\infty<x<+\infty),$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调上升，故 $x=0$ 是它的唯一零点. □

3.7.2　函数极值的判定

费马定理告诉我们，若函数在 x_0 可导，则在 x_0 处取得极值的必要条件是 $f'(x_0)=0$，但这不是一个充分条件. 下面给出判定极值的两个充分条件.

定理 3.7.2（**极值的第一充分条件**）　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $O(x_0,\delta)$ 上定义且连续，$f'(x)$ 在空心邻域 $O_0(x_0,\delta)$ 上存在，则

(1) 若 $f'(x)(x-x_0)<0$，则 $f(x_0)$ 为严格极大值；

(2) 若 $f'(x)(x-x_0)>0$，则 $f(x_0)$ 为严格极小值.

证　(1) 由条件 $f'(x)(x-x_0)<0$，得出 $f'(x)$ 的符号左正右负（以 x_0 为分界点），所以函数 $f(x)$ 为左增右减，故 $f(x_0)$ 为严格极大值.

同理可证(2)（参见图3.26）. □

若定理3.7.2中的严格小于号改为小于等于号，则结论中的严格极值相应地改为极值.

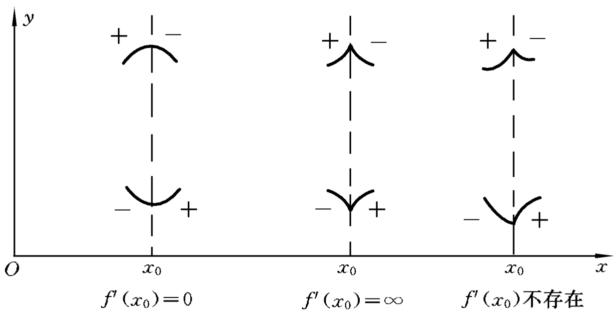


图3.26

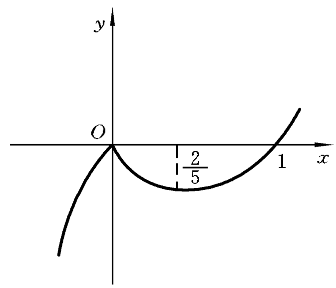


图3.27

例 3.7.6　求 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值点和极值.

解　$f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(x-1)x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5x-2}{3x^{\frac{1}{3}}}$,

$x=\frac{2}{5}$ 是 $f(x)$ 的驻点，而 $x=0$ 是 $f'(x)$ 不存在的点. 所以函数只可能在这两点有极值. 下面列表讨论（见图3.27）：

因此，函数的极大点为 $x=0$，极小点为 $x=\frac{2}{5}$，而极大值和极小值分别为

$$f(0)=0,\quad f\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}.$$ □

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{2}{5}\right)$	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值0	↘	极小值$-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$	↗

定理3.7.3(**极值的第二充分条件**)　设函数$f(x)$在x_0的某邻域$O(x_0,\delta)$上可导,且$f'(x_0)=0$,$f''(x_0)$存在.

(1)若$f''(x_0)<0$,则$f(x_0)$为严格极大值;

(2)若$f''(x_0)>0$,则$f(x_0)$为严格极小值.

证　由泰勒公式,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2),$$

再由$f'(x_0)=0$,得

$$f(x)=f(x_0)+\left[\frac{f''(x_0)}{2}+o(1)\right](x-x_0)^2.$$

因$x\to x_0$时,$o(1)$是无穷小量,因此$\exists\,\delta_1>0$,当$x\in O_0(x_0,\delta_1)$时,因子$\frac{f''(x_0)}{2}+o(1)$的符号与$f''(x_0)$的符号相同.故当$f''(x_0)>0$时,有

$$f(x)>f(x_0),\quad\forall x\in O_0(x_0,\delta_1),$$

即$f(x_0)$为严格极小值;当$f''(x_0)<0$时,有

$$f(x)<f(x_0),\quad\forall x\in O_0(x_0,\delta_1),$$

即$f(x_0)$为严格极大值.证毕. □

对于例3.7.6,我们也可以用二阶导数来判定驻点$x=\frac{2}{5}$的性质:

$$f''(x)=\frac{10x+2}{9x^{4/3}},\quad f''\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{5}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^{1/3}>0,$$

所以$x=\frac{2}{5}$是函数的极小点.

3.7.3　函数的凹凸性

在中学,我们讨论二次函数图形时,很重要一点是判定它的“口”的朝向.虽然“口”的朝向的说法不规范,但它却决定了抛物线的形状及极值点的类型.因此,对于一般函数,数学中也相应地给出函数凸性的概念,它在函数的作图、极值判定及其他方面都有重大作用.

定义 3.7.1　设 $f(x)$ 定义于区间 $[a,b]$，若 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$，连接 $(x_1,f(x_1))$ 和 $(x_2,f(x_2))$ 两点的线段在 $f(x)$ 的图形的上方(或下方)，则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是**凸函数**(**或凹函数**)(见图3.28).

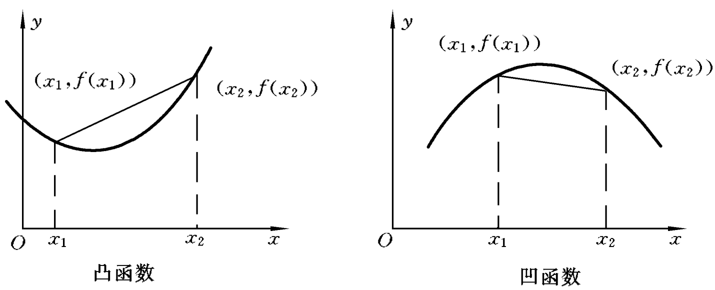


图3.28

连接点 x_1 与 x_2 的直线段上的点可以表示为

$$x=tx_1+(1-t)x_2\quad(0\leqslant t\leqslant 1).$$

因此，上述几何上的凹凸定义可以等价地叙述如下：

定义 3.7.2　设 $f(x)$ 定义于区间 $[a,b]$. 若 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$，有

$$f(tx_1+(1-t)x_2)\leqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2)\quad(0<t<1),\tag{3.7.1}$$

则称 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的**凸函数**. 若公式(3.7.1)中为严格不等号，则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的**严格凸函数**.

类似可以定义**凹函数**和**严格凹函数**.

对于连续函数，其凸性定义较为简单：

定义 3.7.3　设 $f(x)\in C[a,b]$，若 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\quad\left(\text{或 } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\right)\tag{3.7.2}$$

则称 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的**凸**(**或凹**)**函数**.

对于可微函数，我们可以利用二阶导数刻画其凸性.

定理 3.7.4　设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内二阶可导，则

(1) 若在 (a,b) 内，$f''(x)\geqslant 0$，则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的凸函数；

(2) 若在 (a,b) 内，$f''(x)\leqslant 0$，则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的凹函数.

证　根据定义3.7.3，在情形(1)，我们只要证明 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$，不等式

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\tag{3.7.3}$$

成立. 为此，不妨设 $x_1<x_2$，令 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$h=x_2-x_0=x_0-x_1$，则 $x_1=x_0-h$，$x_2=x_0+h$.

于是,所要证的不等式变形为

$$f(x_0) \leqslant \frac{1}{2}[f(x_0-h)+f(x_0+h)],$$

或
$$[f(x_0+h)-f(x_0)]+[f(x_0-h)-f(x_0)] \geqslant 0. \tag{3.7.4}$$

根据拉格朗日中值公式,有

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(\xi_1)h \quad (x_0<\xi_1<x_0+h),$$
$$f(x_0-h)-f(x_0)=-f'(\xi_2)h \quad (x_0-h<\xi_2<x_0),$$

于是得

$$[f(x_0+h)-f(x_0)]+[f(x_0-h)-f(x_0)]=[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]h,$$

再用一次拉格朗日中值公式,得

$$[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]h=f''(\eta)(\xi_1-\xi_2)h \quad (\xi_2<\eta<\xi_1).$$

依假设,$f''(\eta)\geqslant 0$,而$\xi_1-\xi_2>0$,$h>0$,所以可以推得(3.7.4)式成立,也就是(3.7.3)式成立.

对情形(2)可类似证明. □

函数图形的凸性常会随区间发生变化,下面给出对这种变化的一种刻画.

定义 3.7.4(**拐点**) 设$f(x)$在x_0的某个邻域内连续,如果$f(x)$在x_0的左、右侧的凹凸性正好相反,则称x_0为函数$f(x)$的**拐点**,而点$(x_0,f(x_0))$则称为曲线$y=f(x)$上的拐点(图3.29).

如果函数$f(x)$在(a,b)上定义,那么根据拐点的定义及定理3.7.4,我们可以按以下步骤来求出$f(x)$的拐点:

(1) 求出$f''(x)$在所给区间(a,b)内的所有零点以及$f''(x)$不存在的点;

(2) 对于上述的每一个点x_0,考察$f''(x)$在x_0左、右侧邻近的符号.如果$f''(x)$在x_0左右两侧邻近分别保持一定的符号,则当两侧的符号相反时,x_0是$f(x)$的拐点;当两侧的符号相同时,x_0不是$f(x)$的拐点.

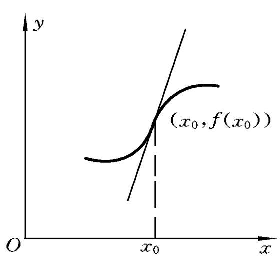


图3.29

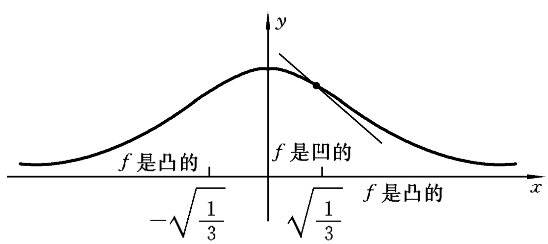


图3.30

例 3.7.7 求函数$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$的凹凸区间及拐点.

解　$f'(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$，$f''(x)=\dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$.

显然$f''(x)$是连续的，$f''(x)=0$的根只有两个，即$x=1/\sqrt{3}$和$x=-1/\sqrt{3}$. 于是$f''(x)$必在下列每一区间内保持相同的符号：$(-\infty,-1/\sqrt{3})$，$(-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$，$(1/\sqrt{3},+\infty)$. 由于$f''(-1)=1/2>0$，$f''(0)=-2<0$，$f''(1)=1/2>0$，所以可以断定，在$(-\infty,-1/\sqrt{3})$与$(1/\sqrt{3},+\infty)$上，$f''>0$，$f(x)$是凸函数；在$(-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$上，$f''<0$，$f(x)$是凹函数. 在点$x=-1/\sqrt{3}$及$x=1/\sqrt{3}$的左、右两侧，函数的凸性发生改变，因此这两个点都是$f(x)$的拐点(见图3.30).

我们还注意到一个特点：在拐点处的切线穿过图形，使得曲线在切线的两侧的凹凸方向正好相反. □

应当指出，条件$f''(x_0)=0$并不保证x_0是$f(x)$的拐点. 比如$f(x)=x^4$，$f''(0)=0$，但$f(x)$的图形在整个区间$(-\infty,+\infty)$上都是凸的.

例3.7.8　求$f(x)=\sqrt[3]{x}$的拐点.

解　显然$f(x)\in C(-\infty,+\infty)$. 当$x\neq0$时，

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}},$$

当$x=0$时，f'，f''都不存在，因此二阶导数在$(-\infty,+\infty)$上不连续且没有零点. 但是，容易算出：在$(-\infty,0)$上，$f''>0$，$f(x)$是凸函数；在$(0,+\infty)$上，$f''<0$，$f(x)$是凹函数，$x=0$是$f(x)$的一个拐点. □

根据以上对函数性态的研究，我们可以作出具体函数的图形，这对分析问题和解决问题会有很大帮助. 函数作图大致可按以下几个主要步骤进行.

① 求出函数的定义域；

② 考察函数的奇偶性、周期性；

③ 求出$f(x)$的所有临界点，用列表法确定函数的升降区间与极值点；

④ 求出方程$f''(x)=0$的根，用列表法确定函数的凹凸区间与拐点；

⑤ 求出函数的斜渐近线、水平渐近线与垂直渐近线；

⑥ 必要时计算几个点的函数值.

注意，如果函数有间断点，或导数不存在的点，则这些点也要作为划分部分区间的分点.

通过上述步骤，即可画出函数的大致图形. 并不是每个函数都必须有这几个步骤，可视具体情况灵活掌握.

最后让我们以一个例子结束本节.

例3.7.9　画出函数$y=(2+x)e^{\frac{1}{x}}$的图形.

解　函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 由

$$y' = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}(x+1)(x-2) = 0,$$

求得临界点 $x=-1, x=2$. 列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	−	−	0	+
y	↗	极大点, e^{-1}	↘	↘	极小点, $4\sqrt{e}$	↗

由 $y''=\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(5x+2)=0$, 求得 $x=-\frac{2}{5}$. 列表如下：

x	$(-\infty,-\frac{2}{5})$	$-\frac{2}{5}$	$(-\frac{2}{5},0)$	$(0,+\infty)$
y''	−	0	+	+
y	凹	拐点, $\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}$	凸	凸

由

$$\lim_{x\to 0^+}(2+x)e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

得出 $x=0$ 为垂直渐近线. 由

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2+x)e^{\frac{1}{x}}}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\infty}[f(x)-x] = 3$$

得出斜渐近线 $y=x+3$. 没有水平渐近线.

再算几个点的函数值：

$$y(-1) = \frac{1}{e}, \quad y(2) = 4\sqrt{e},$$

$$\lim_{x\to 0^-}(2+x)e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

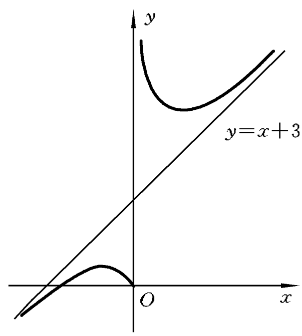


图3.31

这样便可画出函数的图形，如图3.31所示. □

习　题　3.7

(A)

1. 回答下列问题：

(1) 若在 (a,b) 内 $f'(x)\geqslant 0$，且 $f'(x)=0$ 的根至多有限个，则 $f(x)$ 是否必在 (a,b) 严格单调？

(2) 函数的单调性与其导数的单调性一致吗？

(3) 怎样利用 $f(x)$ 的一阶导数判定 $f(x)$ 的极值？

(4) 凸函数与凹函数是怎样定义的？

(5) 什么是拐点？其几何特征如何？

(6) 怎样利用二阶导数判定函数的极值？

(7) 你能总结出函数取极值的必要条件和充分条件吗?

2. 求下列函数的严格单调区间:

(1) $y=2x^3-9x^2+12x-3$;　(2) $y=2x+\dfrac{8}{x}\ (x>0)$;

(3) $y=xe^{-x}\ (x\geqslant 0)$;　(4) $y=x^2-\ln x^2$.

3. 证明函数 $y=x+\sin x$ 严格上升.

4. 图3.32是导函数 $f'(x)$ 的图形,试指出哪些点是 $f(x)$ 的临界点,其中又有哪些临界点是极大值或极小值点?

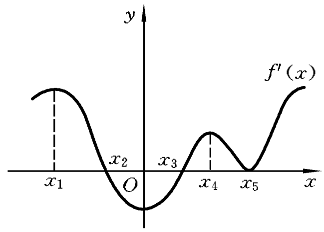


图3.32

5. 在下列各题中,求出函数的一切临界点,并利用一阶导数判定这些临界点是否为极大点或极小点.

(1) $f(x)=2x^3+3x^2-36x+5$;　(2) $f(x)=3x^4-4x^3+6$;

(3) $f(x)=(x^2-4)^7$;　(4) $f(x)=(x^3-8)^4$;

(5) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$;　(6) $f(x)=2x^2e^{5x}+1$.

6. 设 $f(x)=x-\ln x\ (0.1\leqslant x\leqslant 2)$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值点,并指出是极大点还是极小点;

(2) 求 $f(x)$ 在所给区间上的最大值及最小值(如果存在的话).

7. 设 $f(x)=axe^{bx}$,试确定常数 a,b,使得 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=1$,且函数在 $x=\dfrac{1}{3}$ 处有极大值.

8. 证明下列不等式:

(1) $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x\quad\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$;　(2) $\cos x>1-\dfrac{x^2}{2}\quad(x\neq 0)$;

(3) $x>\ln(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}\quad(x>0)$;　(4) $\ln(1+x)\geqslant\dfrac{\arctan x}{1+x}\quad(x\geqslant 0)$.

9. (1) 证明: $\forall x>0, x>2\ln x$;

(2) 利用上述结果证明: $\forall x>0, e^x>x^2$;

(3) 不等式 $x>3\ln x$ 是否对一切 $x>0$ 成立?

10. 图3.33是二阶导函数 $f''(x)$ 的图形. 根据这个图形指出函数 $f(x)$ 的拐点.

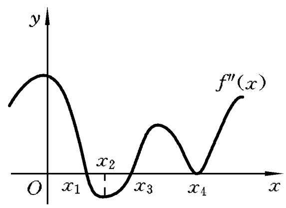


图3.33

11. 根据图3.32,指出函数 $f(x)$ 的拐点.

12. 判定下列函数的凹凸性:

(1) $y=x^{\alpha}\ (\alpha>1$ 及 $0<\alpha<1, x>0)$;　(2) $y=e^x\ (x>0)$;

(3) $y=\ln x\ (x>0)$;　(4) $y=x\ln x\ (x>0)$.

13. 讨论下列函数的凹凸区间及拐点:

(1) $y=3x^2-x^3$;　(2) $y=\dfrac{4}{4+x^2}$;

(3) $y=xe^{-x}$;　(4) $y=x+\sin x$.

14. 设 $f(x)=x^3+3ax^2+3bx+c$. 若已知 $x=-1$ 为函数的极大点,$(0,3)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的拐点. a,b,c 应取何值?

15. 找出下列函数的一切临界点,并利用二阶导数判定这些临界点是否为极大点或极小点.

(1) $f(x)=x^3-9x^2-48x+52$;　(2) $g(x)=xe^{-x}$;　(3) $h(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

16. 图 3.34 给出了函数 $f(x)$ 的图形:

(1) 画出 $f'(x)$ 的图形;

(2) $f'(x)$ 在什么地方变号?

(3) $f'(x)$ 在什么地方有局部极大值或极小值?

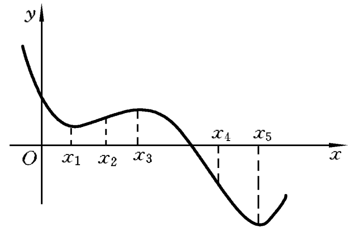


图 3.34

17. 指出下列函数的极值点及拐点:

(1) $y=0.5xe^{-10x}$;

(2) $y=2+3\cos x\ (0\leqslant x\leqslant 6\pi)$;

(3) $y=3x^5-5x^3\quad(|x|\leqslant 1.5)$;

(4) $y=\sin x+\cos x\ (0\leqslant x\leqslant 6\pi)$.

18. 试画出下列函数的图形:

(1) $y=\dfrac{x^2}{1+x}$;　　(2) $y=e^{-x^2}$.

(B)

1. 方程 $x^5+x+7=0$ 有多少个实根? 你是怎样知道的?

2. 设 $f(x)$ 处处可微,且恰有一个临界点 $x=3$. 在下面(1)—(4)中,附加一些条件. 试在每一种情况中判定 $x=3$ 是否为极大点,或极小点,或不是极值点. 并画出这四种情况的可能的图形.

(1) $f'(1)=3$ 且 $f'(5)=-1$;

(2) $f(1)=1, f(2)=2, f(4)=4, f(5)=5$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$;

(4) $f'(2)=-1, f(3)=1, \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$.

3. 利用函数的凹凸性证明下列不等式:

(1) $\ln x\leqslant x-1(x>0)$;

(2) $2\arctan\dfrac{a+b}{2}\geqslant\arctan a+\arctan b\ (a,b\geqslant 0)$;

(3) $1+x^2\leqslant 2^x\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$;

(4) $\dfrac{x^n+y^n}{2}>\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n(x>0,y>0,x\neq y,n>1)$.

4. 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内有三阶连续导数,若 $f'(x_0)=0, f''(x_0)=0$,而 $f'''(x_0)\neq 0$,试问 $x=x_0$ 是否为极值点? 是否为拐点? 为什么?

5. 设函数 $p(x)=x^3-ax$,其中 $a>0$ 是常数.

(1) 求出 $p(x)$ 的极大值和极小值.

(2) 当参数 a 的值增加时,对极大值和极小值的位置有什么影响?

(3) 在同一坐标系下,对 a 的三个正值画出函数 $p(x)$ 的图形.

6. 设函数 $f(x)=x^2+2ax$,当 a 的值增加时,对 $f(x)$ 的图形有什么影响? 考虑 $f(x)$ 的零点、极大值、极小值的变化情况,a 取正或负值两种情形都讨论.

7. 设有曲线族 $y=a(1-e^{-bx})$, a 与 b 均取正值.

(1) 画出 $y=2(1-e^{-x})$ 的图形;

(2) 固定 a,让 b 变化,试画出 b 很小以及 b 很大时的函数图形.

答案与提示

(A)

2. (1) 在$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$严格上升,在$(1,2)$内严格下降;

   (2) 在$(2,+\infty)$内严格上升,在$(0,2)$内严格下降;

   (3) 在$(0,1)$内严格上升,在$(1,+\infty)$内严格下降;

   (4) 在$(-1,0)\cup(1,+\infty)$内严格上升,在$(-\infty,-1)\cup(0,1)$内严格下降.

4. x_2 是极大点,x_3 是极小点,x_5 不是极值点.

5. (1) $x_1=-3$ 是极大点,$x_2=2$ 是极小点; (2) $x_2=1$ 是极小点,$x_1=0$ 不是极值点;

   (3) $x_1=0$ 是极小点,$x_2=-2$ 与 $x_3=2$ 不是极值点; (4) $x_1=2$ 是极小点,$x_2=0$ 不是极值点;

   (5) $x_1=-1$ 是极小点,$x_2=1$ 是极大点; (6) $x_1=-\dfrac{2}{5}$是极大点,$x_2=0$ 是极小点.

6. (1) $x=1$ 是极小点; (2) 最小值为1,最大值为$0.1+\ln 10$.

7. $a=3e,b=-3$.

10. x_1,x_3 是拐点,x_4 不是拐点.

11. x_1,x_4,x_5 是拐点.

12. (1) $\alpha>1$ 时凸,$0<\alpha<1$ 时凹; (2) 凸; (3) 凹; (4) 凸.

13. (1) 在$(-\infty,1)$内凸,在$(1,+\infty)$内凹,$x=1$ 是拐点;

    (2) $|x|<\dfrac{2}{\sqrt{3}}$时凹,$|x|>\dfrac{2}{\sqrt{3}}$时凸,$x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$是拐点;

    (3) 在$(-\infty,2)$内凹,在$(2,+\infty)$内凸,$x=2$ 是拐点;

    (4) 当$2k\pi<x<(2k+1)\pi$时凹,当$(2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi$时凸,$x=k\pi$是拐点,k 为整数.

14. $a=0,b=-1,c=3$.

15. (1) $x_1=8$ 为极小点,$x_2=-2$ 为极大点; (2) $x=1$ 为极大点; (3) $x_1=-1$ 为极大点,$x=1$ 为极小点.

17. (1) $x_1=0.1$ 为极大点,$x_2=0.2$ 为拐点;

    (2) $x=\pi,3\pi,5\pi$ 为极小点,$x_2=2\pi,4\pi$ 为极大点;$x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k=0,1,\cdots,5)$为拐点;

    (3) $x=-1$ 为极大点,$x=1$ 为极小点;$x=0$ 及 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$为拐点;

    (4) $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{9\pi}{4},\dfrac{17\pi}{4}$为极大点,$x=\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{13\pi}{4},\dfrac{21\pi}{4}$为极小点;$x=k\pi-\dfrac{\pi}{4}(k=1,2,\cdots,6)$均为拐点.

(B)

1. 只有一个实根.

2. (1)$x=3$ 是极大点; (2)$x=3$ 不是极值点; (3)$x=3$ 是极小点; (4)$x=3$ 是极小点.

5. (1)极小值为$p\left(\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)=\left(\dfrac{a}{3}\right)^{3/2}-\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$,极大值为$p\left(-\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)=-\left(\dfrac{a}{3}\right)^{3/2}+\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$;

   (2)当a 值增加时,极小点往右移,极大点往左移.

3.8 最优化问题数学模型

在实际应用中到处都可以碰到求某些量的最大值与最小值的问题. 例如,工程师想从一根圆木上切割一根强度最大的梁;科学家想计算在给定的温度下,什么样的波长使辐射最强;而城市的设计者则希望设计出一种使得阻塞达到最低程度的交通模式. 这类问题称为**最优化问题**. 在数学上,这类问题常归结为求某函数(称为**目标函数**)的最大值或最小值的问题. 本节将通过具体实例讨论如何利用导数来解决这类最优化问题.

3.8.1 横梁强度模型

从直径为 d 的圆形树干上切出横断面为矩形的梁,此矩形的底等于 b,高等于 h. 若梁的强度与 bh^2 成比例,问梁的尺寸为何时,其强度最大(见图 3.35)?

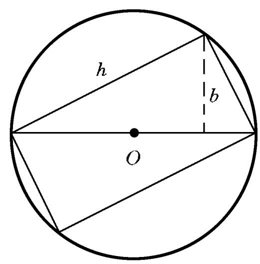


图 3.35

解 因为 $h^2=d^2-b^2$,所以问题就是求目标函数

$$f(b)=bh^2=b(d^2-b^2)\qquad(0<b<d)$$

的最大值.

根据本章 3.5.1 中所指出的求函数最大值和最小值的方法,我们首先计算导数

$$f'(b)=d^2-3b^2,$$

由 $f'(b)=0$ 求得区间 $(0,d)$ 内部唯一的临界点 $b=\dfrac{d}{\sqrt{3}}$. 由

$$f(0)=f(d)=0,\quad f\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2d^3}{3\sqrt{3}}>0,$$

可知 $b=\dfrac{d}{\sqrt{3}}$是函数 $f(b)$的最大点,此时 $h=d\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. 因此,所求的矩形的底 $b=\dfrac{d}{\sqrt{3}}$,高 $h=d\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. □

3.8.2 用料最省模型

要生产一种容积为 100 cm^3 的圆柱形有盖罐头盒,问怎样设计罐头盒的尺寸可使用料最省?

解 设圆柱形罐头盒的高为 h,底半径为 r. 那么整个罐头盒的表面积就是(见图 3.36)

$$S=2\times\text{底面积}+\text{侧面积}=2\pi r^2+2\pi rh.$$

而罐头盒的体积为 πr^2h. 依题意, 有

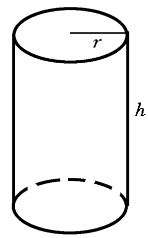


图3.36

$$\pi r^2 h = 100, \quad 故 \quad h = \frac{100}{\pi r^2},$$

于是表面积S 是r 的函数：

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{100}{\pi r^2},$$

或

$$S = S(r) = 2\pi r^2 + \frac{200}{r} \quad (r > 0)$$

问题归结为求目标函数$S(r)$的最小值. 先求临界点. 由

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{200}{r^2} = 0$$

求得唯一的临界点$r = \sqrt[3]{50/\pi}$. 由实际问题的意义知,这就是$S(r)$的最小点. 因此,当罐头盒的底半径和高分别为

$$r = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} \approx 2.52\ (\mathrm{cm}), \quad h = \frac{100}{\pi(2.52)^2} \approx 5.01\ (\mathrm{cm})$$

时,用料最省. □

从上面的例子可以看出,一个最优化问题首先需要解决的是建立数学模型,给出目标函数. 一旦明确了是某个目标函数的最大值或最小值问题,后面的步骤就是直截了当的. 但是怎样建立最优化问题的数学模型呢?

最优化问题建模的几个步骤

① 仔细考察给出的问题,弄清楚什么量或函数是最优化的对象;

② 如果可能,画出草图,并标明问题中出现的一些量,考察它们之间的关系;

③ 利用前面步骤中给出的量,设法写出最优化的目标函数. 如果必要,把目标函数写成一个变量的函数,并验明这个变量的变化范围——即目标函数的定义域;

④ 应用本章3.5.1的方法求出目标函数的最大值或最小值.

3.8.3 最优路径模型

小张想尽可能快地走到公共汽车站,这个公共汽车站在一个公园的另一侧,从小张所在的位置算起,往西走有60 m 长,往北走有20 m 宽. 小张可沿着公园边上的人行道行走,速度是0.2 m/s;她也可以穿过公园走到汽车站去,但速度只有0.12 m/s. 试问小张沿着什么样路径行走可以最快地到达公共汽车站?

解 假定小张选择走一条最短的路径,由于这条路径完全位于公园之中,这样她走得是比较慢的(见图3.37(a)). 这样走的距离是$\sqrt{60^2+20^2}$ m ≈ 63.24 m,大约需走527 s. 她也可以像图3.37(b)中所示那样,先在公园边的人行道上走60 m,然后往北穿过公园到达汽车站. 这样走则需要$\left(\frac{60}{0.2}+\frac{20}{0.12}\right)$ s ≈ 467 s. 还可以选择这样的路径:先在人行道上往西走30 m,再穿过公园径直走到汽车站(如图3.37(c)). 不难算

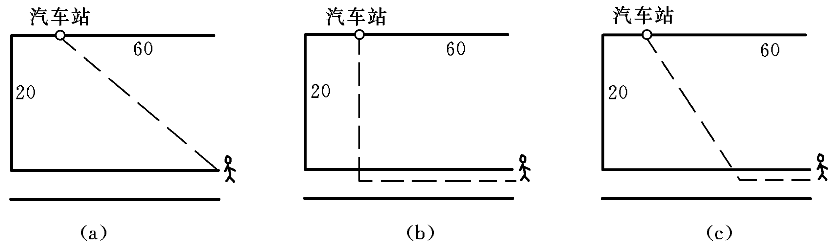


图 3.37　到达公共汽车站的三种可能路径

出,这样走所需时间约为 450 s.

现在我们对这个问题建立一个数学模型. 设小张沿人行道往西走的距离是 x,穿过公园所走的距离为 y,如图 3.38 所示. 那么,到达汽车站所需的总时间为

$$t = t_{人行道} + t_{公园}.$$

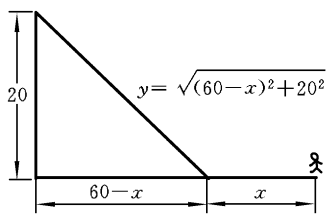


图 3.38

因此
$$t = \frac{x}{0.2} + \frac{y}{0.12},$$

即

$$t = \frac{x}{0.2} + \frac{\sqrt{(60-x)^2+20^2}}{0.12} \quad (0 < x < 60).$$

这就是这个问题的最优化模型,即时间 t 表示为 x 的函数. 我们要求目标函数 $t = t(x)$ 的最小值点. 剩下的问题请读者自己完成. 解答是 $x = 45$ (m). □

3.8.4　运河行船模型

向宽为 a (m)的河修建一宽为 b (m)的运河,二者成直角相交. 问能驶进这运河的船,其最大长度是多少?

解　我们先来画图分析一下. 直线段 $\overline{BAC}$ 表示船体. 从图 3.39 可以观察到,当 $\overline{BAC}$ 转过拐角 A 处时,$\overline{BAC}$ 的长度由递减变成递增,能容许这线段通过的最小长度

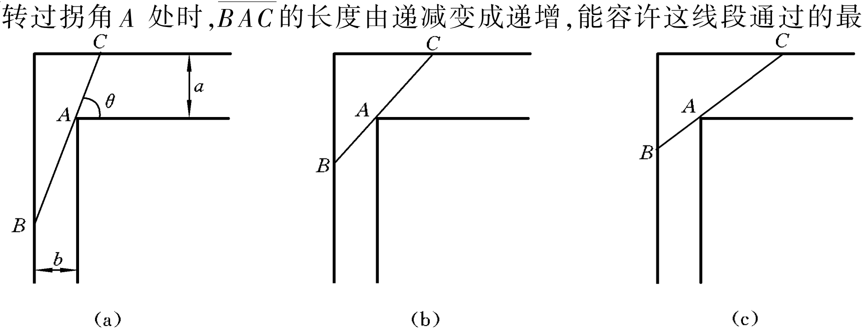


图 3.39

正是能驶进运河的船的最大长度. 于是问题转化成求$\overline{BAC}$的最小长度. 如图3.39(a)所示设置θ角,则$\overline{BAC}$的长l可表示为θ的函数:

$$l=\frac{a}{\sin\theta}+\frac{b}{\cos\theta},\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

问题就是求目标函数$l(\theta)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上的最小值. 求解的细节仍然留给读者,答案是:船的最大长度为$\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. □

习　题　3.8

(A)

1. 铁路上AB段的距离为100 km,工厂C与A相距40 km,AC垂直于AB. 今要在AB之间一点D向工厂C修一条公路(图3.40),使从原料供应站B运货到工厂C所用运费最省. 问D点应该设在何处? 已知每公里的铁路运费和公路运费之比是3∶5.

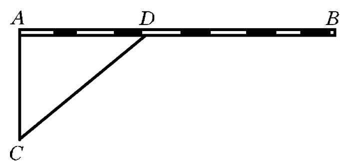


图3.40

2. 设炮口的仰角为α,炮弹的初速为v_0(m/s),炮口取作原点,发炮时间取作$t=0$,不计空气阻力时,炮弹的运动方程为
$$\begin{cases}x=tv_0\cos\alpha,\\ y=tv_0\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2.\end{cases}$$
若初速v_0不变,问如何调整炮口的仰角α,使炮弹射程最远.
3. 设在4 m高的石柱上有一高为3 m的塑像. 试问一人应离石柱多远才能使塑像对此人的眼睛所张的角(此人的眼睛离地面1.7 m高)为最大.
4. 在某产品的制造过程中,次品率y依赖于日产量x,即$y=y(x)$. 已知
$$y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{101-x} & (0\leqslant x\leqslant 100),\\ 1 & (x>100),\end{cases}$$
其中x为正整数. 又该厂每生产出一件产品可得盈利A(元),但每生产出一件次品就要损失$\frac{A}{3}$(元). 问为了获得最大盈利,该厂的日产量应定为多少?
5. 轮船的燃料成本(元/小时)与速度的立方成正比. 假设某轮船时速为10海里,燃料成本为每小时100元. 如果除开燃料成本之外,其他成本为每小时675元. 问什么时速可使每海里的总成本达到最小?
6. 求从点$M(p,p)$到抛物线$y^2=2px$的最短距离.
7. 从面积为常数S的一切矩形中,求其周长为最小者.
8. 在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$中,嵌入有最大面积而边平行于椭圆轴的矩形,求此矩形的边长.

(B)

1. 设有光强度为a与b的两个光源,它们之间的距离是d. 假定照度与光强度成正比而与距离的平方成反比. 试问在两光源的连接线上什么地方其光的照度最小?

2. 小王在水里游泳,想在最短时间到达岸边某一指定地点. 假定此岸是直线,游速为常值a,他沿岸跑动的速度为常值b,且$b>a$. 试求小王在最短时间到达目的地的路径(讨论一切可能的情形).
3. 从南至北的铁路经过B城,某工厂A距此铁路的最短距离为a(km),距北面之B城b(km). 为了从A到B运输货物最经济,从工厂建设一条侧轨(见图3.41),若每吨货物沿侧轨运输的价格是p(元/km),而沿铁路为q(元/km). 问侧轨应向铁路取怎样的角度φ?

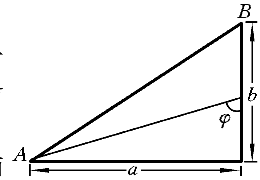


图3.41

4. 将长为a的铁丝切成两段,一段围成正方形,另一段围成圆形. 问这两段铁路各长为多少时,正方形与圆形的面积之和为最小?
5. 求由y轴上的一个给定点$(0,b)$到抛物线$x^2=4y$上的点的最短距离.
6. 在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的第一象限部分求一点$P$,使该点处的切线、椭圆及两坐标轴所围图形的面积为最小(其中$a>0,b>0$).

答案与提示

(A)

1. D点应设在距A点30 km处.
2. $\alpha=\frac{\pi}{4}$.
3. 此人离石柱应有约3.5 m远.
4. 每天生产89件产品可获得最大盈利.
5. 时速为15海里/小时.
6. $p(\sqrt[3]{2}-1)\sqrt{\frac{\sqrt[3]{2}+2}{2}}$.
7. 一边长为$\sqrt{S}$的正方形.
8. 矩形的边长分别为$a\sqrt{2}$和$b\sqrt{2}$.

(B)

1. 设两光源所在点分别为A,B,M为连接线上一点. 当$AM=d\left(1+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^{-1}$时,$M$处的照度最小.
2. 令P为岸边的目的地,O是离小王最近的靠岸处. 若OP对小王的眼睛所张的角为φ,且$\sin\varphi<\frac{a}{b}$,则最短时间是直线游向P处. 若$\sin\varphi>\frac{a}{b}$,则最短时间的路径分为两段:第一段先游至岸上Q处,其中OQ对眼睛所张的角为$\arcsin\frac{a}{b}$;然后从Q沿岸跑至P.
3. 所需运费为$M=(b-a\cot\varphi)q+\sqrt{a^2+a^2\cot^2\varphi}\cdot p$,当$\arccos\frac{q}{p}\geqslant\arctan\frac{a}{b}$时,$\varphi=\arccos\frac{q}{p}$,相应的运费最省;当$\arccos\frac{q}{p}<\arctan\frac{a}{b}$时,$\varphi=\arctan\frac{a}{b}$,相应的运费最省.
4. 令x表示圆形的周长,则目标函数为$A(x)=\left(\frac{a-x}{4}\right)^2+\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$. 当$x=\frac{\pi a}{4+\pi}$时,$A$的值最小.
5. 设(x,y)为抛物线上任一点,则问题可归结为求目标函数$f(x)=x^2+\left(\frac{x^2}{4}-b\right)^2$在$(-\infty,+\infty)$

上的最小值. 所求最短距离为$d=\begin{cases}|b|, & 若b\leqslant 2,\\ 2\sqrt{b-1}, & 若b>2.\end{cases}$

6. 所求点为$\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

3.9　求函数零点的牛顿法

很多数学问题具有这样的形式:求某个方程

$$f(x)=0 \tag{3.9.1}$$

的根. 满足方程(3.9.1)的根称为**函数$f(x)$的零点**. 有时我们希望在一个指定的区间内找出f的一个零点,而有时则想找出f在某个区间的全部零点.

什么叫做“求”函数的零点呢?这就是要设计一个程序,它能给出函数f的零点x^*的近似值,并达到我们所希望的近似程度.

下面介绍另一种求f零点近似值的方法. 如果$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数,$f(a)\cdot f(b)<0$,且$f'(x)$与$f''(x)$在$[a,b]$上分别保持定号,这时,方程$f(x)=0$在(a,b)内仅有一个实根x^*. 下面来求x^*的近似值. 这个方法的基本步骤是:从f的零点的某个较好的近似值出发,设法做出另一个好得多的近似值. 假如这个结果的近似程度还不够,我们就不断地重复这个基本步骤,直到得出按前面两种准则的任何一种来衡量可认为足够满意的近似解时才停止. 我们先从几何上描述这个方法.

用x_1表示开始的近似值,并假设$f'(x_1)\neq 0$,这个假设对于使用这个方法来说是非常重要的. 它可以保证f的图形在$(x_1,f(x_1))$点的切线不平行于x轴,因而与x轴相交于某点(见图3.42). 交点就是新的近似值x_2. 现在我们来算x_2.

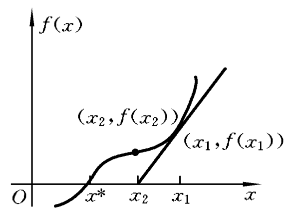


图3.42

切线的斜率是$f'(x_1)$,故有

$$f'(x_1)=\frac{f(x_1)}{x_1-x_2}.$$

由此定出

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \tag{3.9.1}$$

这样作法的理论根据在于:若f的图形是直线,则x_2就是f的精确零点. 实际上如果f的图形不是直线时,但若f是可微的,则它在一个很小的区间上的图形近似于直线,所以当区间(x^*,x_1)充分小时,可以指望x_1是真正零点x^*的一个精确近似值.

现在再用分析的语言进行推导,而不必参照f的图形. 我们的基本出发点是**局部线性逼近**

$$f(x)\approx f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1).$$

设 x_2 为右端近似线性函数的真正零点,我们希望 x_2 是 f 的真正零点的一个好的近似值. 显然 x_2 由公式(3.9.1)给出.

若 x_2 的精确度不足,再在 $(x_2, f(x_2))$ 点作切线,重复上面的步骤,确定出下一个近似值.

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

还可以继续作下去,得到

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{3.9.2}$$

这样可以一直计算到近似程度满意为止. 上述方法是牛顿提出的,因而称为**牛顿迭代法**,公式(3.9.2)称为**牛顿迭代公式**.

读者可能会产生这样的疑问:最初选取 x_1 时有没有什么原则? 是不是随便取一个 x_1 就可以作下去呢? 迭代序列 $\{x_n\}$ 是否真的能逼近真正零点 x^*?

下面用几个图形来回答头两个问题. 如图3.43所示,初始值 x_1 的选取原则是:$x_1 \in (a, b)$ 必须满足

$$f(x_1)f''(x_1) > 0,$$

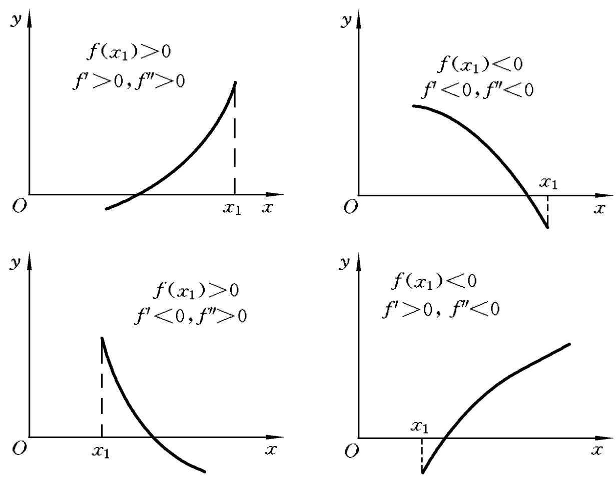


图3.43

否则就不能保证切线与 x 轴交点的横坐标 x_2 比原来的近似值 x_1 更接近于 f 的真正零点 x^*(读者可自己画图试试看).

至于前面提到的 $\{x_n\}$ 的收敛性问题,下面给出一个定理而不加证明(读者在后续课程《计算方法》中将学习到更详尽的知识).

定理3.9.1(**牛顿法的收敛定理**) 设 $f(x)$ 是二次可微函数,x^* 是 $f(x)$ 的一个零

点,且$f'(x^*)\neq 0$. 用牛顿迭代公式(3.9.2)反复进行迭代产生一个近似序列$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$,若初始值$x_1$与$x^*$靠得足够近,则这个序列收敛到$x^*$.

例3.9.1　求函数$f(x)=x^3+3x-5$在区间$[1,2]$内的近似零点,使误差不超过0.000 1.

解　因为$f(1)=-1<0$,$f(2)=9>0$,$f'(x)=3x^2+3$,$f''(x)=6x$,所以有

$$f(2)f''(2)>0.$$

因$f(2)$与$f''(x)$同号,因此取$x_1=2$为迭代初值. 下面计算x_n:

$$x_2=2-\frac{f(2)}{f'(2)}=1.4,\quad x_3=1.4-\frac{f(1.4)}{f'(1.4)}=1.181,$$

$$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}=1.1545,\quad x_5=x_4-\frac{f(x_4)}{f'(x_4)}=1.15417,$$

$$x_6=x_5-\frac{f(x_5)}{f'(x_5)}=1.15417.$$

由于x_5与x_6的前五位数字相同,且

$$f(1.1541)\approx -0.0005<0,$$

$$f(1.1542)\approx 0.0002>0,$$

$$1.1542-1.1541=0.0001,$$

因此取1.154 1作为$f(x)$的零点的近似值时,误差不超过0.000 1. □

习　题　3.9

1. 求方程$x^2-2=0$的近似根,准确到10^{-8}.
2. 证明函数$f(x)=x^3-3x^2+6x-1$在区间$(0,1)$有唯一的零点,并求近似零点,使误差不超过0.01.

答案与提示

1. 1.414 213 56.
2. 0.182.

总 习 题 (3)

1. 选择题(四个答案中只有一个是正确的):

(1) 设$f(x)$在$x=a$的某邻域内有定义,则$f(x)$在$x=a$处可导的一个充分条件是(　　).

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在;　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在;

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在;　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在.

(2) 设$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f(0), & x=0,\end{cases}$其中$f(x)$在$x=0$处可导,$f(0)=0$,$f'(0)\neq 0$. 则$x=0$是$F(x)$的

(　　).

(A) 连续点;　　(B) 第一类间断点;

(C) 第二类间断点;　　(D) 连续点或间断点不能确定.

(3) 设$f(x)$对任意x均满足等式$f(1+x)=af(x)$,且$f'(0)=b$,其中a,b为非零常数,则(　　).

(A) $f(x)$在$x=1$处不可导;　　(B) $f(x)$在$x=1$处可导,且$f'(1)=a$;

(C) $f(x)$在$x=1$处可导,且$f'(1)=b$;　　(D) $f(x)$在$x=1$处可导,且$f'(1)=ab$.

(4) 设$f(x)$在区间$(-\delta,\delta)$内有定义,若当$x\in(-\delta,\delta)$时,恒有$|f(x)|\leqslant x^2$,则$x=0$必为$f(x)$的(　　).

(A) 间断点;　　(B) 连续而不可导的点;

(C) 可导的点,且$f'(0)=0$;　　(D) 可导的点,且$f'(0)\neq 0$.

(5) 设$f(x)=2^x+3^x-2$,则当$x\to 0$时,$f(x)$(　　).

(A) 与x是同阶但非等价无穷小;　　(B) 与x是等价无穷小;

(C) 是比x较高阶的无穷小;　　(D) 是比x较低阶的无穷小.

2. 设$f(x)$在$x=0$处连续,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在,证明:$f(x)$在$x=0$可导.

3. 设a,b为已知常数,试确定常数A和B,使得函数

$$f(x)=\begin{cases}(x-a), & x<a,\\ A(x-a)(x-b)(x-B), & a\leqslant x\leqslant b,\\ 2(x-b), & x>b\end{cases}$$

在$x=a$及$x=b$点均可导.

4. 过抛物线的焦点引弦垂直于抛物线的轴,该弦与抛物线相交于两点,过交点引抛物线的切线,试证这两条切线相交成直角.

5. 求下列函数的导数:

(1) $y=\sin^2\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)$,求$y'$;　　(2) $y=x+x^x+x^{x^x}$,求y';

(3) $y=\dfrac{(x+1)^2\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$,求$y'$;　　(4) $y\sin x-\cos(x-y)=0$,求$\dfrac{dy}{dx}$;

(5) $e^{\arctan\frac{y}{x}}=\sqrt{x^2+y^2}$,求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$;　　(6) $\begin{cases}x=t^2-1,\\ y=t^3-t,\end{cases}$求$\dfrac{d^3y}{dx^3}$;

(7) $y=f(\sin^2x)+f(\cos^2x)$,f是可微函数,求$\dfrac{dy}{dx}$;

(8) 已知$y=f(x)$,求其反函数的二阶导数$\dfrac{d^2x}{dy^2}$(用y',y''等表示);

(9) $y=\ln(ax+b)$,求$y^{(n)}$;　　(10) $y=x(\sin^4x+\cos^4x)$,求$y^{(n)}$.

6. 求下列函数的微分:

(1) $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$,求dy;　　(2) $y=\ln\sin\dfrac{x}{2}$,求$dy\big|_{x=\frac{\pi}{3},dx=\frac{\pi}{12}}$;

(3) $y=\arctan x$,求d^2y;　　(4) $y=\sqrt{1+x^2}$,求$d^2y\big|_{x=0}$.

7. 选择题(四个答案中只有一个是正确的):

(1) 设$f(x)$处处可导,则(　　).

(A) 当$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,必有$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$;

(B) 当$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$,必有$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$;

(C) 当$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,必有$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$;

(D) 当$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$,必有$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

(2) 已知$f(x)$在$x=0$的某邻域内连续,且$f(0)=0$,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$,则在点$x=0$处$f(x)$(　　).

(A) 不可导;　　(B) 可导且$f'(0)\neq0$;

(C)取得极大值;　　(D) 取得极小值.

(3) 设$f(x)$与$g(x)$都在$x=a$处取得极大值,则函数$F(x)=f(x)g(x)$在$x=a$处(　　).

(A) 必取极大值;　　(B) 必取极小值;

(C) 不可能取极值;　　(D) 是否取极值不能确定.

(4) 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导,且$\forall x_1,x_2$,当$x_1>x_2$时都有$f(x_1)>f(x_2)$,则(　　).

(A)对任意x,$f'(x)>0$;　　(B)对任意x,$f'(-x)\leqslant0$;

(C)函数$f(-x)$单调增加;　　(D)函数$-f(-x)$单调增加.

(5) 设$f'(x_0)=f''(x_0)=0$,$f'''(x_0)>0$,则下列选项正确的是(　　).

(A) $f'(x_0)$是$f'(x)$的极大值;　　(B) $f(x_0)$是$f(x)$的极大值;

(C) $f''(x_0)$是$f(x)$的极小值;　　(D) $(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点.

8. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$其中$g''(x)$连续,且$g(0)=1$,$g'(0)=-1$.

(1)求$f'(x)$;　(2)讨论$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的连续性.

9. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上可微,且满足条件$0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}$　$(0\leqslant x<+\infty)$. 求证:存在$\xi>0$,使得$f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

10. 设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上存在二阶导数,并且$g''(x)\neq0$,$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$. 证明:

(1) 在开区间(a,b)内$g(x)\neq0$;

(2) 至少有一点$\xi\in(a,b)$,使得$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

11. 设$f(x)$定义在区间$[0,c]$上,$f(0)=0$,$f'(x)$是$[0,c]$上的递减函数. 求证:对于$[0,c]$上的任意两点a和b,$0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$,有$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$.

12. 写出$f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$在$x=0$处的带拉格朗日余项的n阶泰勒展开式.

13. 设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$,且$f''(x)>0$,证明$f(x)\geqslant x$.

14. 设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导,且满足条件$|f(x)|\leqslant a$,$|f''(x)|\leqslant b$,其中a和b为非负常数. 设c是$(0,1)$内任一点.

(1) 写出$f(x)$在$x=c$处带拉格朗日余项的一阶泰勒公式;

(2) 证明$|f'(c)|\leqslant2a+\dfrac{b}{2}$.

15. 证明:当 $x\geqslant 1$ 时,有 $\arctan x-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{4}$.

16. 求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a^x-b^x}{x^2}-\dfrac{\ln a-\ln b}{x}\right]$; (5) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^n\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^2,(n>0)$.

17. 设 $f(x)\in C^{(2)}$,且 $f(a)=0$,$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-a}, & x\neq a,\\ f'(a), & x=a.\end{cases}$ 求 $g'(x)$,并证明 $g'(x)$ 在 $x=a$ 连续.

18. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的邻域内二阶可导,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}=0$. 求 $f(0)$,$f'(0)$,$f''(0)$ 的值.

19. 选择题(四个答案中只有一个是正确的):

(1) 设 $f(x)\in C^{(2)}$,且 $f'(0)=0$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$,则( ).

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值;

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值;

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点;

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(2) 若 $f(x)=-f(-x)$,在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0$,$f''(x)>0$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内( ).

(A) $f'(x)<0$,$f''(x)<0$; (B) $f'(x)<0$,$f''(x)>0$

(C) $f'(x)>0$,$f''(x)<0$; (D) $f'(x)>0$,$f''(x)>0$.

(3) 设在区间 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$,则 $f'(0)$,$f'(1)$,$f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是( ).

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$; (B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$;

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$; (D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

20. 求下列函数的增减区间:

(1) $y=\dfrac{10}{4x^3-9x^2+6x}$; (2) $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}$ $(a>0)$.

21. 下列命题是否正确? 正确的予以证明,不正确的举出反例.

(1) 单调函数的导函数必为单调函数;

(2) 若 $f(x)$ 在 x_0 点取极大值,则 $f(x)$ 在 x_0 某左邻域递增,在 x_0 某右邻域递减;

(3) 若 $f(x)\in C[a,b]$,且只有一个极值点,则它必是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的最大或最小值点.

22. 求下列函数的极值:

(1) $y=\mathrm{e}^x\sin x$,$x\in(0,2\pi)$; (2) $y=\cos x+\dfrac{1}{2}\cos 2x$,$x\in(0,2\pi)$.

23. 当 α 为何值时,方程 $\mathrm{e}^x-2x-\alpha=0$ 有实根?

24. 试确定曲线方程 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a,b,c,d,使点 $(-2,44)$ 为其临界点,点 $(1,-10)$ 为其拐点.

25. 设 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$,求(1) 函数的增减区间与极值;(2) 函数图形的凹凸区间与拐点;(3) 渐近线;(4) 作出函数图形.

26. 作半径为r的球的外切圆锥，问此圆锥的高h为何值时，其体积最小，并求出此最小值.

27. 证明下列不等式：

(1) $\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1}>\dfrac{x_2}{x_1}\quad\left(0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}\right)$；

(2) $x^p+(1-x)^p\geqslant\dfrac{1}{2^{p-1}}\quad(p>1,x\in[0,1])$；

(3) $\dfrac{1}{2}(\cos x_1+\cos x_2)<\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}\quad\left(-\dfrac{\pi}{2}<x_1,x_2<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(4) $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}\quad(-\infty<x<+\infty)$.

28. 设函数$f(x)$对一切实数x满足方程$xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$.

(1) 若$f(x)$在点$x=c(c\neq 0)$有极值，证明它是极小值.

(2) 若$f(x)$在点$x=0$有极值，它是极大值还是极小值？

(3) 若$f(0)=f'(0)=0$，求最小的常数k，使得$\forall x\geqslant 0$，都有$f(x)\leqslant kx^2$.

答案与提示

1. (1)(D)；(2)(B)；(3)(D)；(4)(C)；(5)(A).

2. 先证明$f(0)=0$.

3. $A=\dfrac{3}{(a-b)^2},B=\dfrac{2a+b}{3}$.

5. (1)$\dfrac{\ln x-2}{x^2}\sin\dfrac{2(1-\ln x)}{x}$；(2)$1+x^x(\ln x+1)+x^{x^x}[x^x(\ln x+1)\ln x+x^{x-1}]$；

(3)$y\left[\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{3x-2}-\dfrac{2}{3(x-3)}\right]$；(4)$\dfrac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$；(5)$\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$；

(6)$\dfrac{-3}{8t^2}\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$；(7)$\sin 2x[f'(\sin^2x)-f'(\cos^2x)]$；(8)$-\dfrac{y''}{(y')^3}$；

(9)$\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,a^n}{(ax+b)^n}$；(10)$4^{n-1}x\cos\left(4x+\dfrac{n}{2}\pi\right)+n4^{n-2}\cos\left(4x+\dfrac{n-1}{2}\pi\right)$.

6. (1) $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$；(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{24}\pi$；(3) $-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}dx^2$；(4) dx^2.

7. (1) (D)；(2) (D)；(3) (D)；(4) (D)；(5) (D).

9. 可用费马定理，也可用罗尔定理.

10. (1) 用反证法；(2) 对$\varphi(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$在$[a,b]$上用罗尔定理.

11. 可利用拉格朗日中值定理，也可利用函数$F(x)=f(x+b)-f(x)$的严格递减性.

12. $f(x)=1-2x+2x^2+\cdots+(-1)^n2x^n+(-1)^{n+1}\dfrac{2x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}$，其中$0<\theta<1$.

13. 考察$f(x)$在$x=0$的泰勒公式

16. (1) 1；(2) $-\dfrac{e}{2}$；(3) $e^{-\frac{1}{6}}$；(4) $\dfrac{1}{2}[\ln^2a-\ln^2b]$；(5) 0.

18. $f(0)=-1,f'(0)=0,f''(0)=\dfrac{1}{3}$.

19. (1) (B)；(2) (C)；(3) (B).

20. (1) 在$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$内上升；在$(-\infty,0)\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$下降；

(2) 在$\left(-\infty,\frac{a}{2}\right)\cup\left(\frac{a}{2},\frac{2a}{3}\right)\cup(a,+\infty)$上升;在$\left(\frac{2a}{3},a\right)$下降.

21. (1) 错; (2) 错; (3)对.

22. (1) 极大值为$y\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$,极小值为$y\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$;

(2) 极大值为$y(\pi)=-\frac{1}{2}$,极小值为$y\left(\frac{2\pi}{3}\right)=y\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{3}{4}$.

23. $\alpha\geqslant 2-2\ln 2$.

24. $a=1,b=-3,c=-24,d=16$.

25. (1) 在$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$上升,在$(0,2)$内下降,$x=2$为极小值点;

(2) 在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$内是下凸的,无拐点; (3) 渐近线为$x=0,y=x$.

26. 最小值为$V(4r)=\frac{8\pi r^3}{3}$.

28. (1) 验证$f''(c)>0$; (2) $x=0$为极小点; (3) 利用泰勒公式$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$,估计出$f''(x)\leqslant 1$(当$x\geqslant 0$时),最小常数$k=\frac{1}{2}$.

第 4 章　一元函数积分学

在第 3 章我们研究了这样的问题:若物体的运动规律由方程 $s=f(t)$ 给出,其中 t 是时间, s 是物体走过的路程,则对函数求导就可得到在已知时刻的瞬时速度 $v=f'(t)$. 但是,在力学中常常遇到的是这种问题的反问题,即已知在任一时刻 t 物体的速度是 $v=v(t)$,要找出该物体的运动规律. 进而可求出物体在某段时间内所走过的路程. 这样的问题将导出一个重要的概念——**定积分**. 利用定积分,可以从函数的变化率计算出该函数改变的**总量**. 我们将会发现,有许多“求总量”的问题都可以用定积分加以解决,例如曲边梯形的面积,物体的质量等等.

定积分主要用牛顿-莱布尼兹公式(见本章 4. 2. 1)计算,这就涉及到求导问题的反问题. 因此,本章还将介绍原函数和不定积分的概念,接着介绍定积分和不定积分的计算方法,最后通过例子介绍定积分在几何上及物理上的一些应用.

4. 1　定积分的概念与性质

4. 1. 1　定积分的定义

在中学的几何课程中,我们学会了如何计算由直线段和圆弧所围成的平面图形的面积. 计算由任意形状的曲线所围成的平面图形的面积,虽是一般的几何问题,但这个问题只有用微积分的方法才能解决. 我们先考察两个求总量的例子.

(1) **曲边梯形的面积**

任意一条曲线围成的图形(见图 4. 1)通常可以用两组互相垂直的直线将它分成若干部分,每一个部分都是一个“曲边梯形”. 所谓“曲边梯形”是指这样的图形,它有三条边是直线,其中两条互相平行,第三条与前面两条互相垂直(见图4. 2),而第四条

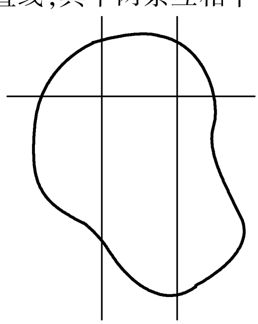


图4. 1

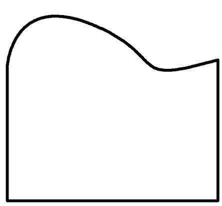


图4. 2

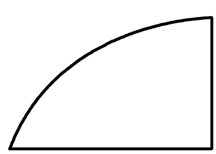


图4. 3

边是一条曲线的一段弧,它与任一条平行于它的邻边的直线至多只交于一点.这里不排除一种特殊情形:两条平行的边中有一条缩成了一点(见图4.3),此时曲边梯形变成了曲边三角形.这样一来,我们的问题便化成了求曲边梯形的面积的问题.

我们不妨先讨论一个较简单的问题.

例4.1.1 求由抛物线$y=x^2$,x轴及直线$x=1$所围成的曲边三角形的面积(见图4.4).

在初等几何中,圆的面积定义为多边形面积的极限,而多边形的面积用初等几何的方法就可以算出来.我们把这种处理方法移植过来.为此,将区间$[0,1]$ n等分,即插入分点:

$$0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<1.$$

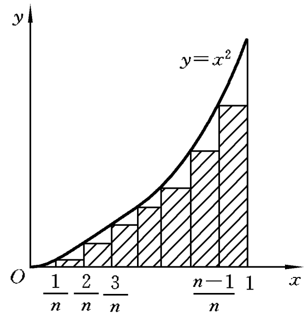


图4.4

以每一个小区间为下底作矩形,使矩形的左上角正好与抛物线$y=x^2$相交.于是可得到n个小矩形(图4.4中阴影部分),它们的面积之和为

$$S_n=0\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}=\frac{2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{6}.$$

容易看出,当$n\to\infty$时,$\frac{1}{n}\to0$,$\frac{1}{n^2}\to0$,所以

$$S_n\to\frac{1}{3}\ (n\to\infty).$$

另一方面,如果作出的小矩形,其右上角恰好与抛物线相交,那么,也得到n个小矩形(见图4.5中阴影部分),它们的面积之和则为

$$S_n'=\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+1^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}=\frac{2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{6}\to\frac{1}{3}\ (n\to\infty).$$

当n充分大时,我们将S_n看作是所求面积的不足近似值,而S_n'则是过剩近似值.现在,当$n\to+\infty$时,S_n与S_n'都趋向于$\frac{1}{3}$,可见,这个曲边三角形的面积也应该是$\frac{1}{3}$.

在每一个小区间$\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$$(1\leqslant k\leqslant n)$上,用小矩形面积去近似地代替小曲边梯形的面积,实际上就是在局部以“直”代“曲”,每一个代替所得到的面积是近似的.然后把这些小矩形的面积加起来以后,令$n\to\infty$,就得到了曲边三角形面积的精确值$\frac{1}{3}$.

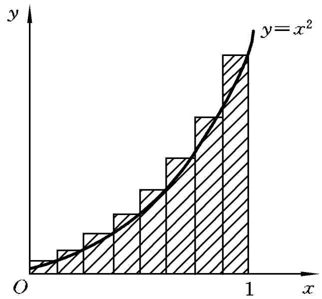


图4.5

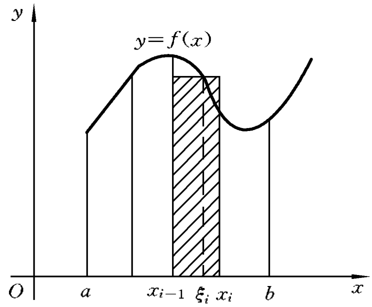


图4.6

受到这个问题的启发,我们来探讨一般曲边梯形面积的求法.

设曲边梯形由曲线$y=f(x)$,x 轴及直线$x=a$,$x=b$ 围成(见图4.6),$f(x)\geqslant 0$ 且$f(x)\in C[a,b]$. 现在用上述思想来求这个曲边梯形的面积.

给区间$[a,b]$一个分法P:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

小区间$[x_{i-1},x_i]$和它的长度都记作Δx_i. 这里Δx_i 的大小是任意的,一般来说,它们彼此不一定相等.

任取一点$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$($1\leqslant i\leqslant n$),以$f(\xi_i)$为高、Δx_i 为底的小矩形面积近似代替$[x_{i-1},x_i]$上小曲边梯形的面积,也就是局部"以直代曲"(如图4.6所示). 于是所有这些小矩形面积之和就是整个曲边梯形面积A 的近似值,即

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\approx A.$$

和数σ是与$[a,b]$的分法、ξ_i 的取法有关的. 但是,当分法无限地加细时,不论ξ_i 怎么取,我们可以直观地想像和数σ能够任意地逼近曲边梯形的面积A(即在整体上,"直"又回到了"曲"). 用极限概念来刻画这个事实,那就是:令λ表示所有小区间长度中最大者,即$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$,则$\lambda\to 0$ 就意味着$[a,b]$的无限细分. 如果在这个过程中,σ有极限(并且这个极限与$[a,b]$的分法、ξ_i 的取法都无关),那么这个极限就定义为曲边梯形面积A 的值,即

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

(2) 变速直线运动的路程

某物体沿直线运动,其速度$v=v(t)\in C[\alpha,\beta]$且$v(t)\geqslant 0$. 求物体从$t=\alpha$到$t=\beta$这段时间内经过的路程$s$. 这是第3章开始时求瞬时速度的反问题.

我们知道,对于匀速直线运动,有公式

$$\text{路程}=\text{速度}\times\text{时间}.$$

而这里讨论的是非匀速运动,不能直接套用这个公式. 但是,当时间间隔非常之小时,可以把运动近似地看作是匀速的,也就是局部以“匀速”代“非匀速”. 这就使得我们可以借鉴上面的方法来解这个问题.

给区间$[\alpha,\beta]$一个分法P:

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta,$$

小区间$[t_{i-1},t_i]$的长度记作Δt_i. 在每个小区间$[t_{i-1},t_i]$上任取一点τ_i,用τ_i时刻的速度$v(\tau_i)$代替$[t_{i-1},t_i]$上各个时刻的速度. 也就是说,在小的时间间隔$[t_{i-1},t_i]$上,我们把运动近似地看作是匀速的,于是得到部分路程Δs_i的近似值,即

$$\Delta s_i \approx v(\tau_i)\Delta t_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

从而有

$$s = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i.$$

令$\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta t_i$,则当$\lambda \to 0$时,如果和数$\sum\limits_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$有极限,且这个极限与$[\alpha,\beta]$的分法以及$\tau_i$的取法无关,那么就将这个极限值称为物体作非匀速直线运动所经过的路程s,即

$$s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i.$$

上面我们讨论了来自几何、物理的两个不同的问题,但它们都能用一个统一的方法来解决. 还有其他很多实际问题,如变力作功,物体的质量等,也可以用这样的统一方法加以解决. 现在我们将这种方法抽象出来,就可以得到定积分的概念.

定义 4.1.1 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有定义,用分法P:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将$[a,b]$分成n个小区间. 令$\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i$,其中$\Delta x_i$表示小区间$[x_{i-1},x_i]$的长度. 在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点$\xi_i$,并作和数

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

称这个和数为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的**积分和**(或**黎曼和**). 如果,$\lambda\to 0$时,和数σ的极限I存在且与分法P及ξ_i的选取无关,则称极限I为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的**定积分**,记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中a和b分别称为定积分的**下限**和**上限**,$f(x)$称为**被积函数**,x称为**积分变量**,而$f(x)\mathrm{d}x$称为**被积表达式**.

用“ε-δ”语言表达就是:$\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta > 0$,不管分法P及点$\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$如何取,当$\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i < \delta$时,都有

$$|\sigma - I| < \varepsilon.$$

如果函数$f(x)$在$[a,b]$上有定积分,我们就说它在$[a,b]$上**黎曼可积**,简称**可积**.由定义知,定积分的值与积分变量无关,它仅由被积函数及积分区间决定,所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u=\cdots$$

根据上述定义,例4.1.1中曲边三角形的面积可用定积分表示为

$$S=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x,$$

而一般的曲边梯形面积A可用定积分表示为

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

变速直线运动的路程则可表示为

$$s=\int_\alpha^\beta v(t)\mathrm{d}t.$$

用定积分求某个总体量的过程大致可归结为以下的四步:

分割→近似代替→求和→取极限.

但是,在具体求定积分值时,并不是每一次都必须计算这个和数的极限.我们将要研究定积分的性质,发展一些方法,利用这些方法可以比较容易地计算定积分的值.

最后,我们指出**定积分的几何意义**.如果在$[a,b]$上$f(x)\geqslant 0$,则定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$表示曲线$y=f(x)$,直线$x=a$,$x=b$及x轴所围成的曲边梯形的面积(见图4.7(a));如果在$[a,b]$上$f(x)\leqslant 0$,由曲线$y=f(x)$,直线$x=a$,$x=b$及x轴所围成的曲边梯形位于x轴下方,则定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$表示该曲边梯形面积的相反数(见图4.7(b));如果在$[a,b]$上$f(x)$既取正值又取负值,定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$表示介于x轴,曲线$y=f(x)$及直线$x=a$,$x=b$各部分面积的代数和(见图4.7(c)).

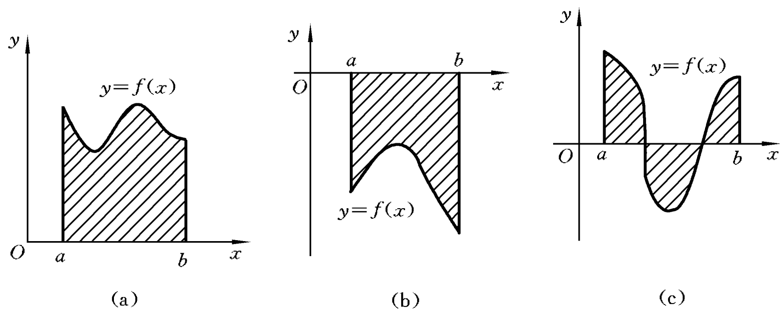


图4.7

4.1.2　可积函数类

前面我们对区间$[a,b]$上的函数$f(x)$给出了定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的定义.那么,函数$f(x)$要满足什么条件才在$[a,b]$上可积呢?可积函数又有什么性质呢?下面我们给出有关的结论,但不作深入的讨论.

定理 4.1.1　设函数$f(x)\in C[a,b]$,则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

定理 4.1.2　设$f(x)$在区间$[a,b]$上有界,且只有有限个间断点,则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

实际上,可以证明,有更多的函数在有界闭区间上是可积的.设$f(x)$定义在有界闭区间$[a,b]$上,$f(x)$的不连续点的全体组成的集合记为E.如果不连续点集E的“长度”为零,则称f为在$[a,b]$上**几乎处处连续**的函数.直观上,几乎处处连续的函数就是不连续点“很少”的函数,“少”即集合E的“长度”为零.这类函数表达了黎曼可积函数的最主要特征,这个特征由下述定理加以刻画.

勒贝格(Lebesgue)**定理**　$f(x)$在$[a,b]$上可积的充要条件是$f(x)$为$[a,b]$上的几乎处处连续的函数.

那么,什么叫做一个点集的“长度”呢?这涉及到测度理论(已超出了本书的范围).在这里我们只给读者一个粗略的直观的描述,例如,在某种意义的点集“长度”下,有限个点的集合,全体自然数的集合,以及全体有理数的集合,其“长度”都是零.有兴趣的读者可参阅实变函数论方面的书籍.

定理 4.1.3　若函数$f(x)$在$[a,b]$上可积,则$f(x)$在$[a,b]$上有界.

由定理4.1.1知,若$f(x)\in C[a,b]$,则$f(x)$在$[a,b]$可积,因而$\forall x\in[a,b]$,积分

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

总是有意义的,它是定义在区间$[a,b]$上的一个函数,称为**变上限的积分**.可以证明,若$f(x)\in C[a,b]$,则上式给出的函数$F(x)$是$[a,b]$上的可导函数,且$F'(x)=f(x)$.为了证明这个结论,我们需要先研究定积分的性质.

4.1.3　定积分的基本性质

设函数$f(x)$在$[a,b]$上可积.规定

① $a=b$时$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$;

② $a>b$时$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

从定积分的概念可以看出,这样的规定是合理的,今后不再限制定积分上下限的大小.下面介绍定积分的基本性质.

定理4.1.4　设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上可积,则$f(x)\pm g(x)$也在$[a,b]$上可积,且有

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{4.1.1}$$

证　函数$f(x)\pm g(x)$在区间$[a,b]$上的积分和为

$$\sum_{i=1}^n [f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\pm\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i$$

由极限运算法则,有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n [f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\pm\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i$$

即

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

□

定理4.1.5　设$f(x)$在$[a,b]$上可积,C为常数,则$Cf(x)$也在$[a,b]$上可积,且有

$$\int_a^b Cf(x)\mathrm{d}x=C\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.1.2}$$

证　由$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在,知

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n Cf(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to 0}C\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=C\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

即

$$\int_a^b Cf(x)\mathrm{d}x=C\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

□

定理4.1.4和定理4.1.5表明,定积分是一种**线性运算**,即函数的线性组合的定积分等于函数的定积分的线性组合:

$$\int_a^b [C_1f(x)+C_2g(x)]\mathrm{d}x=C_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+C_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

定理4.1.6　设$a<c<b$,$f(x)$在$[a,b]$上可积,则$f(x)$在$[a,c]$及$[c,b]$上也可积,且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.1.3}$$

证　首先,由$f(x)$在$[a,b]$上的可积性可得到$f(x)$在$[a,c]$及$[c,b]$上的可积性(证明略).

因$f(x)$在$[a,b]$上可积,所以无论怎样分割$[a,b]$,积分和的极限总不变.因此,我们在分割区间时,可以使c点永远是个分点,从而$[a,b]$上的积分和等于$[a,c]$上的积分和加上$[c,b]$上的积分和,记为

$$\sum_{[a,b]}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{[a,c]}f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{[c,b]}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

令$\lambda\to 0$,上式两端同时取极限,得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

□

这个性质叫做定积分对积分区间的**可加性**.实际上,对任意的数a,b,c,(4.1.3)

式总是成立的.读者可以自行验证这个事实.

定理4.1.7 设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上可积,则$f(x)g(x)$也在$[a,b]$上可积(证明略).

定理4.1.8 设$f(x)$在$[a,b]$上可积,$f(x)\geqslant 0(x\in[a,b])$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

证 由$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$直接得到. □

推论4.1.1 若$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上可积,且$f(x)\leqslant g(x)(x\in[a,b])$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{4.1.4}$$

事实上,对函数$F(x)=g(x)-f(x)$利用定理4.1.8及定理4.1.4即得.

定理4.1.9 设$f(x)$在$[a,b]$上可积,则函数$|f(x)|$在$[a,b]$上也可积,且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x. \tag{4.1.5}$$

证 为使证明简单,不妨设$f(x)\in C[a,b]$,于是$|f(x)|\in C[a,b]$,从而可积(实际上这个性质对一般可积函数均成立).由

$$-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|$$

以及推论4.1.1,得

$$-\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x,$$

所以

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$$ □

定理4.1.10(**积分中值定理**) 设函数$f(x)\in C[a,b]$,则$\exists\,\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a). \tag{4.1.6}$$

证 因$f(x)\in C[a,b]$,所以$f(x)$在$[a,b]$上有最大值M及最小值m,故

$$m\leqslant f(x)\leqslant M\quad(\forall x\in[a,b]).$$

由推论4.1.1得

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a),$$

即

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}\leqslant M.$$

根据连续函数的介值定理(第2章2.8.3),必存在一点$\xi\in[a,b]$,使得

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a},$$

由此即得(4.1.6)式. □

当$f(x)$为正值函数时，积分中值定理中的积分中值公式(4.1.6)的几何意义可由图4.8说明，即在$[a,b]$上至少存在一点ξ，使得以区间$[a,b]$为底边、以曲线$y=f(x)$为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为$f(\xi)$的一个矩形的面积.

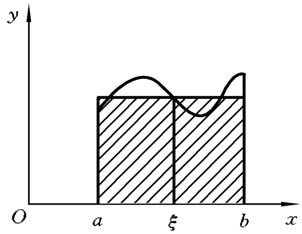


图4.8

$$\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}$$

称为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的**平均值**.

定理4.1.11(积分中值定理的一般形式)　设$f(x)\in C[a,b]$，$g(x)$在$[a,b]$上可积且不变号. 则必存在一点$\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{4.1.7}$$

例4.1.2　求函数$\sin x$在下列区间上的平均值：

(1) $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$；　　(2) $[0,2\pi]$.

解　(1) $\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{2}{\pi}\approx 0.64.$

(2) $\dfrac{1}{2\pi-0}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}(-\cos x)\Big|_0^{2\pi}=\frac{0}{2\pi}=0.$ □

例4.1.3　估计积分$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+0.5\cos x}$的值.

解　由于

$$\frac{1}{1+0.5}\leqslant\frac{1}{1+0.5\cos x}\leqslant\frac{1}{1-0.5},$$

即

$$\frac{2}{3}\leqslant\frac{1}{1+0.5\cos x}\leqslant 2.$$

据定理4.1.8，有

$$\frac{4\pi}{3}\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+0.5\cos x}\leqslant 4\pi,$$

因此有

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+0.5\cos x}=\frac{8\pi}{3}\pm\frac{4\pi}{3}\theta\quad(|\theta|<1).$$ □

例4.1.4　设$f(x),g(x)\in C[a,b]$，求证**柯西-许瓦兹不等式**：

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}. \tag{4.1.8}$$

证　对一切实数t，显然有$[tf(x)+g(x)]^2\geqslant 0$. 由定积分的定理4.1.8，有

$$\int_a^b [tf(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

即

$$t^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2t\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

上式左端为关于t的二次三项式，它的判别式必满足

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\leqslant 0,$$

由此即得不等式(4.1.8). □

习　题　4.1

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 试归纳出求曲边梯形面积的四个主要步骤.

(2) 在求曲边梯形面积的过程中,“近似代替”的依据是什么?

(3) 在求非匀速直线运动的路程时,所采用的方法与求曲边梯形面积的方法有什么相同之处?在这里的“近似代替”是什么意思?

(4) 你能将本节的两个问题所使用的方法统一起来吗? 试叙述你的步骤.

(5) 定积分的概念是怎样的?

(6) 定积分与积分变量有关吗?

(7) 用定积分求某个总体量的基本步骤是什么?

(8) 定积分的几何意义是什么?

(9) 定积分有哪些基本性质?

(10) 积分中值定理及其一般形式是怎样的?

2. 求由直线 $y=x$, x 轴及直线 $x=a$, $x=b$ 所围成的面积,其中 $0<a<b$.

3. 把区间 $[-1,4]$ 分为 n 个相等的小区间,并取这些小区间的中点的坐标作自变量 ξ_i 的值($i=1,2,\cdots,n$). 试写出函数 $f(x)=x+1$ 在此区间上的积分和 σ.

4. 按定义判断下列函数在给定区间上是否可积? 如果可积,试求出其定积分值.

(1) $f(x)=1$,在 $[-1,1]$;　　(2) $f(x)=x$,在 $[-1,1]$.

5. 试确定下列定积分的符号:

(1) $\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2\ln x\,\mathrm{d}x$.

6. 确定下列各题中,哪个积分较大?

(1) $\int_0^{\pi/2}\sin^{10}x\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$;　　(3) $\int_0^{\pi/2} x\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\pi/2}\sin x\,\mathrm{d}x$.

7. 试估计下列积分的值:

(1) $\int_1^4 (x^2+1)\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$.

8. 求下列函数在给定区间上的平均值:

(1) $f(x)=x^2$, $[1,3]$;　　(2) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $[1,3]$;　　(3) $f(x)=\sin 2x$, $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

9. 求初速度为 v_0 的自由落体的速度之平均值.

(B)

1. 已知下列函数可积,用定义求下列积分,分法任意($b>a>0$).

(1)$\int_a^b x\mathrm{d}x$(按算术平均值取点)；　(2)$\int_a^b \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$(按几何平均值取点).

2. 利用定积分的几何意义,求下列定积分:

(1)$\int_a^b x\mathrm{d}x$；　(2)$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\mathrm{d}x$；　(3)$\int_a^b \left|x-\frac{a+b}{2}\right|\mathrm{d}x$.

3. 设$f(x),g(x)\in C[a,b]$,求证:

(1) 若$f(x)\geqslant 0,\forall x\in[a,b]$,且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$,则在区间$[a,b]$上$f(x)\equiv 0$;

(2) 若$f(x)\leqslant g(x),\forall x\in[a,b]$,且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,则在区间$[a,b]$上$f(x)\equiv g(x)$.

4. 设$f(x)\in C^{(1)}[0,1]$,即$f'(x)\in C[0,1]$,且$f(1)-f(0)=1$,证明$\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant 1$.

5. 应用柯西-许瓦兹不等式证明:

(1) $\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$；　(2) $\ln\frac{p}{q}\leqslant\frac{p-q}{\sqrt{pq}}$,其中$p\geqslant q>0$.

6. 设函数$f(x)\in C[0,1]$,在$(0,1)$内可导,且$3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x=f(0)$. 证明:$\exists c\in(0,1)$,使得$f'(c)=0$.

答案与提示

(A)

1. (1) 分割→局部近似代替→求和→取极限.

2. $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$.

3. $\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}\left\{1+\left[-1+\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{5}{n}\right]\right\}\frac{5}{n}$.

4. (1) $\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=2$；　(2)$\int_{-1}^1 x\mathrm{d}x=0$.

5. (1)$\int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x>0$；　(2)$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\ln x\mathrm{d}x<0$.

6. (1)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x$；　(2)$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x<\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$；　(3)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$.

7. (1) $6\leqslant\int_1^4(x^2+1)\mathrm{d}x\leqslant 51$；　(2) $0\leqslant\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x\leqslant 1/\sqrt{2}$.

8. (1) $\frac{13}{3}$；　(2) $\frac{1}{3}$；　(3) $\frac{2}{\pi}$.

9. $v_0+\frac{1}{2}gt_0$.

(B)

1. (1) $\sigma=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i-1}+x_i}{2}(x_i-x_{i-1})\to\frac{1}{2}(b^2-a^2)$；　(2) $\sigma=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_{i-1}x_i}(x_i-x_{i-1})\to\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$.

2. (1) $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$；　(2) $\frac{\pi}{8}(b-a)^2$；　(3) $\frac{1}{4}(b-a)^2$.

6. 利用积分中值定理和罗尔定理.

4.2 微积分基本定理

4.2.1 牛顿-莱布尼兹公式

在本章4.1.2中我们已经看到,如何由速度函数的定积分表示物体所经过的路程.假如$v(t)$是速度,$s(t)$是距离,那么$v(t)=s'(t)$,并且我们知道

$$\Delta s=s(b)-s(a)=\int_a^b s'(t)\mathrm{d}t.$$

本节将把这个结果推广,证明对任何量的变化率的积分将得出这个量的变化总量.

设$F(t)$的变化率为$F'(t)$,t表示时间.现在求$F(t)$在$t=a$与$t=b$之间的变化总量.给出区间$[a,b]$的一个分法:

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b.$$

在每个小区间$[t_{i-1},t_i]$上,任取一点τ_i,用$F'(\tau_i)$近似$F(t)$在$[t_{i-1},t_i]$上的变化率,则$F(t)$在小区间上的变化总量为

$$\Delta F_i\approx F'(\tau_i)\Delta t_i,$$

于是$F(t)$在从$t=a$到$t=b$这段时间内的变化总量

$$\Delta F=\sum_{i=1}^n\Delta F_i\approx\sum_{i=1}^n F'(\tau_i)\Delta t_i.$$

而$F(t)$在$t=a$到$t=b$之间的变化总量可以写成$F(b)-F(a)$,因此,当$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta t_i\to 0$时,有

$$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(t)\mathrm{d}t. \tag{4.2.1}$$

由于公式(4.2.1)将导数与定积分联系在一起,因而这个结果成为微积分学中最重要的结果之一,它被称为**微积分基本定理**.下面给出该定理正式的叙述和严格的证明.

定理4.2.1(微积分基本定理) 设函数$f(x)\in C[a,b]$,又设$F(x)\in C[a,b]$,并且在(a,b)内有$f(x)=F'(x)$,则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b. \tag{4.2.2}$$

换句话说:函数$F(x)$的变化率在$[a,b]$上的定积分等于该函数在$[a,b]$上的变化总量.

证 任取$[a,b]$的一个分法P:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

则利用拉格朗日中值定理得

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=f(\xi_i)\Delta x_i.$$

由于$f(x)$在$[a,b]$上连续,从而可积,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})]$$
$$= \lim_{\lambda\to 0}[F(x_n) - F(x_0)] = F(b) - F(a).$$

公式(4.2.2)得证. □

公式(4.2.2)又称为**牛顿-莱布尼兹**(Newton-Leibniz)**公式**.这个公式揭示了积分与导数之间的简单而重要的联系,通过这个联系,定积分的计算问题将获得圆满的解决.因此,可以这样说,微积分基本定理是整个高等数学中最重要的一个定理.

例4.2.1 求$\int_1^3 2x\mathrm{d}x$.

解 设$F(x)=x^2$,则$F'(x)=2x$,由牛顿-莱布尼兹公式(4.2.1),有

$$\int_1^3 2x\mathrm{d}x = F(3) - F(1) = 3^2 - 1^2 = 8.$$ □

例4.2.2 求$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

解 因为$\left(-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}$,所以

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_1^2 = -\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.$$ □

例4.2.3 求$\int_a^b \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解 因$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$,故

$$\int_a^b \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\bigg|_a^b = \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a.$$ □

例4.2.4 求$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x$.

解 因$(\sin x)'=\cos x$,故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x = \sin x\bigg|_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - 0 = 1.$$ □

4.2.2 变限的定积分与原函数的存在性

我们首先给出原函数的定义.

定义4.2.1(**原函数**) 设函数$f(x)$定义于区间I上,若存在函数$F(x)$,使得$\forall x\in I$,都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x,$$

则称$F(x)$在区间I上是$f(x)$的**原函数**.

由微积分基本定理(牛顿-莱布尼兹公式)知,若$f(x)\in C[a,b]$,$F(x)$在$[a,b]$上是$f(x)$的原函数,则$\forall x\in[a,b]$,有

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a). \tag{4.2.3}$$

下面将证明,只要$f(x)\in C[a,b]$,则变上限的定积分

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \tag{4.2.4}$$

是可导的,且$F'(x)=f(x)$,从而证明连续函数存在原函数.

定理4.2.2　设函数$f(x)$在$[a,b]$上可积,则$\forall x\in[a,b]$,

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

是x的连续函数.

证　由本章4.1.3定理4.1.3知,可积函数$f(x)$在$[a,b]$有界,故可设

$$|f(x)|\leqslant M \quad (\forall x\in[a,b]).$$

$\forall x_0\in[a,b]$,应用定积分的性质,有

$$|F(x)-F(x_0)|=\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant M|x-x_0|.$$

由此推得

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=F(x_0),$$

所以$F(x)$在x_0点连续.　□

定理4.2.3　设$f(x)\in C[a,b]$,则函数$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$[a,b]$可导,且

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x) \quad (\forall x\in[a,b]). \tag{4.2.5}$$

证　由$F(x)$的定义知

$$F(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t,$$

于是函数的增量为

$$\Delta F=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t.$$

应用积分中值定理,得

$$\Delta F=f(\xi)\Delta x \quad (\xi\text{介于}x\text{与}x+\Delta x\text{之间}).$$

上式两端除以Δx,得

$$\frac{\Delta F}{\Delta x}=f(\xi).$$

依假设,$f(x)\in C[a,b]$,而$\Delta x\to 0$时,$\xi\to x$,因此$\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(x)$.由此推得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(x).$$

这表明$F(x)$的导数存在,且

$$F'(x)=f(x).$$　□

由原函数的定义.我们可由定理4.2.3直接得到下面的原函数存在定理.

定理4.2.4　设$f(x)\in C[a,b]$,则函数$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数.

在解决了连续函数的原函数的存在性之后,如果能进一步解决原函数的求法,我们就可以获得计算定积分的一条方便途径.这个问题将在下节展开讨论.

我们也可以讨论变下限的定积分

$$G(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$$

以及积分限是函数的情形

$$\Phi(x)=\int_0^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\quad(\text{设 }\varphi'(x)\text{ 存在}).$$

例4.2.5　求$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)$.

解　令$\varphi(u)=\int_0^u\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,u=x^2$.利用复合函数求导的链式法则,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)=\left.\frac{\mathrm{d}\varphi(u)}{\mathrm{d}u}\right|_{u=x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\left.\mathrm{e}^{-u^2}\right|_{u=x^2}\cdot 2x=2x\mathrm{e}^{-x^4}.\qquad\square$$

一般,若$\varphi(x)$是可微函数,f连续,则用例4.2.5的方法容易证

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)=f[\varphi(x)]\varphi'(x).\tag{4.2.6}$$

例4.2.6　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x}$.

解　由于被积函数$\cos t^2$连续,所以变上限积分$\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t$是$x$的连续且可导的函数.于是这个极限是$\dfrac{0}{0}$型的不定式.由洛必达法则,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1}=\cos 0=1.\qquad\square$$

习　题　4.2

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 微积分基本定理的内容是什么?

(2) 函数$F(t)$的变化率$F'(t)$与该函数在某个区间$a\leqslant t\leqslant b$上的变化总量是什么关系?

(3) $f(x)$满足什么条件时$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是x的连续函数?

(4) $f(x)$满足什么条件时$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是$f(x)$的原函数?

2. 设$F(t)=t\ln t-t$,那么$f(t)=F'(t)=\ln t$,试求$\int_{10}^{12}\ln t\mathrm{d}t$.
3. 一杯温度为90℃的茶水放在室温为20℃的房间里,开始时刻为$t=0$.设茶水温度的变化率为
$$r(t)=-7\mathrm{e}^{-0.1t}(℃/\mathrm{s}).$$
试估计在$t=10$ s时,茶水的温度是多少(计算到小数点后一位数).
4. 全世界的石油消费量是连续地增长的.假设增长的变化率由函数$r=f(t)$表示(以每年多少个十亿桶计),其中t以年计,$t=0$表示1990年初.
(1) 写出从1990年初到1995年初所消耗的石油总量;
(2) 设$r=32\mathrm{e}^{0.05t}$.求出从1990年初到1995年初石油的消耗总量.
5. 求导数:
(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t\right)$; (2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x+a}^{x+b}(t+1)^2\mathrm{d}t\right)$.
6. 求$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b\sin x^2\mathrm{d}x$; $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_a^b\sin x^2\mathrm{d}x$; $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\int_a^b\sin x^2\mathrm{d}x$.
7. 求极限:
(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\sqrt{t+\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}{x\sqrt{x}}$.

(B)

1. 已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t=1$,求$a$、$b$.
2. 证明:当$x\to+\infty$时$\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\sim\dfrac{1}{2x}\mathrm{e}^{x^2}$.
3. 设$f(x)$连续,$F(x)=\int_{1/x}^{\ln x}f(t)\mathrm{d}t$,求$F'(x)$.
4. 设$f(x)\in C[0,+\infty)$,并且$x\in[0,+\infty)$时,$f(x)>0$.证明函数$F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$在$(0,+\infty)$内为单调增加的函数.

答案与提示

(A)

2. $12\ln12-10\ln10-2$.
3. 45.8℃.
4. (1)$\int_0^5 f(t)\mathrm{d}t$; (2)$640(\mathrm{e}^{1/4}-1)$.
5. (1)$2x\sqrt{1+x^4}$; (2)$(x+b+1)^2-(x+a+1)^2$.
6. $0,-\sin a^2,\sin b^2$.
7. (1)$\dfrac{\pi^2}{4}$; (2)$\dfrac{2}{3}$.

(B)

1. $a=4,b=1$.

3. $F'(x)=\frac{1}{x}f(\ln x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$.

4. 证明$F'(x)\geqslant 0(x\in(0,+\infty))$.

4.3　不定积分

用定积分的定义来求积分值是非常困难的,甚至是不可能的. 牛顿-莱布尼兹公式的建立给定积分计算开辟了新的途径,它把定积分计算转化为求被积函数的原函数. 为此先讨论不定积分及其计算方法.

4.3.1　不定积分的概念与性质

我们知道,如果$F(x)$在$[a,b]$上是$f(x)$的原函数,则在区间$[a,b]$上有

$$F'(x)=f(x).$$

现设$f(x)$是已知函数,要求$f(x)$的原函数. 例如:

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right)=x^2\Rightarrow f(x)=x^2$ 的原函数是$F(x)=\frac{1}{3}x^3$.

$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x\Rightarrow f(x)=\cos x$ 的原函数是$F(x)=\sin x$.

$\frac{d}{dx}(x\ln x-x)=\ln x\Rightarrow f(x)=\ln x$ 的原函数是$F(x)=x\ln x-x$.

这里我们用"视察法"得到了这些原函数;也就是说,依靠求导数的反推而获得了反问题的解答:"微分什么函数之后可以得到……"我们很容易列出一张表,上面有函数及其导数,然后就可以求出已知函数的原函数,而这只要$f(x)$在这张导数表之中. 那么,如果$f(x)$不在这张表中,又该怎么办呢? 我们将在下节开始详细讨论这个问题. 目前先引出不定积分的概念.

由于常数的导数为零,所以如果$f(x)$有一个原函数$F(x)$,那么它就有一族原函数$F(x)+C$,C是任意常数. 于是我们可以得到下面的结论.

定理4.3.1　设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数,则$f(x)$的全部原函数就是$F(x)+C$,C为任意常数.

证　首先,因为

$$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x),$$

所以,对任何常数C,$F(x)+C$为$f(x)$的原函数. 再证它是全部原函数,即$f(x)$的任一原函数总可表示成$F(x)+C$的形式. 设$G(x)$为$f(x)$的另一原函数,即$G'(x)=f(x)$. 则

$$(G(x)-F(x))'=f(x)-f(x)=0.$$

因此有$G(x)-F(x)=C$(C 为某一常数),或

$$G(x)=F(x)+C,$$

这表明$f(x)$的任一原函数总可由$f(x)$加某一常数得到,所以把C 看作任意常数,$F(x)+C$ 就是$f(x)$的全部原函数. 证毕. □

定义 4.3.1(不定积分) $f(x)$的全部原函数,称为$f(x)$的**不定积分**,记作$\int f(x)\mathrm{d}x$,其中x 称为**积分变量**,$f(x)$称为**被积函数**,$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**.

若$F(x)$是$f(x)$的一个原函数,则定理4.3.1 的结论可表示为

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

其中任意常数C 称为**积分常数**. 由此可见,求函数的不定积分,只要求出一个原函数就可以了. 例如

$$\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C,\quad \int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C,\quad \int \ln x\mathrm{d}x=x\ln x-x+C.$$

从几何的观点来看,求原函数的问题就是:给定曲线在每一点的切线斜率$f(x)$,求该曲线. 如果曲线$y=F(x)$满足要求,那么将曲线$y=F(x)$向上或向下平移一距离C后,显然横坐标相同的点,两曲线的斜率相同,即曲线$y=F(x)+C$ 也符合要求(见图4.9). 可见每点具有给定斜率的曲线不止一条,而有无穷多条. 当常数C 变动时,我们就得**一族**曲线. 但是,在具体实际问题中,C 并不是任意的,而是由具体条件确定的.

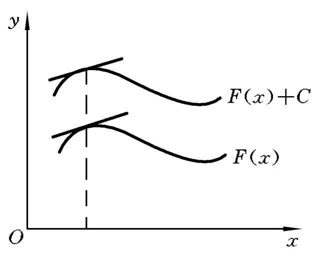


图4.9

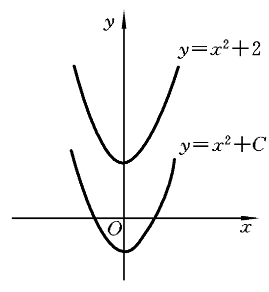


图4.10

例4.3.1 求经过点(1,3),且切线斜率为$2x$ 的曲线方程.

解 由于$(x^2)'=2x$,故$\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$. $y=x^2+C$ 便是斜率为$2x$ 的曲线族. 将$x=1$,$y=3$ 代入曲线族方程,得$C=2$,因此$y=x^2+2$ 便是所求的曲线方程(见图4.10). □

由不定积分的定义知,求导数与求不定积分是两种互逆的运算,前者是由原函数求导函数,而后者是由导函数求原函数. 不定积分的下述性质进一步揭示了这种互逆特性.

定理 4.3.2　(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$;　　(2) $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$.

定理 4.3.3　设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的原函数存在, k 为常数, 则有

$$\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x; \int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 4.3.3 表明, 不定积分也是一种线性运算. 定理 4.3.2 和定理 4.3.3 的证明请读者自行给出.

4.3.2　基本积分表

下面我们给出一个基本积分表, 它是根据基本导数公式得到的.

$\mathrm{d}x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$;　　$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$;

$\mathrm{d}\ln|x| = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$;　　$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$;

$\mathrm{d}a^{x} = a^{x}\ln a\,\mathrm{d}x$;　　$\int a^{x}\mathrm{d}x = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$;

$\mathrm{d}\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$;　　$\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$;

$\mathrm{d}\sin x = \cos x\,\mathrm{d}x$;　　$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$;

$\mathrm{d}\cos x = -\sin x\,\mathrm{d}x$;　　$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$;

$\mathrm{d}\tan x = \dfrac{1}{\cos^{2}x}\mathrm{d}x$;　　$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^{2}x} = \tan x + C$;

$\mathrm{d}\cot x = -\dfrac{1}{\sin^{2}x}\mathrm{d}x$;　　$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^{2}x} = -\cot x + C$;

$\mathrm{d}\sec x = \sec x\tan x\,\mathrm{d}x$;　　$\int \sec x\tan x\,\mathrm{d}x = \sec x + C$;

$\mathrm{d}\csc x = -\csc x\cot x\,\mathrm{d}x$;　　$\int \csc x\cot x\,\mathrm{d}x = -\csc x + C$;

$\mathrm{d}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x$;　　$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^{2}} = \arctan x + C$;

$\mathrm{d}\arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x$;　　$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2}}} = \arcsin x + C$;

$\mathrm{d}\sinh x = \cosh x\,\mathrm{d}x$;　　$\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + C$;

$\mathrm{d}\cosh x = \sinh x\,\mathrm{d}x$;　　$\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + C$.

以上基本积分公式, 是求不定积分的基础, 必须熟记.

例 4.3.2　求 $\int x^{2}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

解 $\int x^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\int x^{5/2}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}+C=\dfrac{2}{7}x^{7/2}+C.$ □

例 4.3.3 求积分 $\int\dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

解 利用不定积分运算的线性性质(定理 4.3.3),我们可分项积分.

$$\int\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x-2\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C.$$ □

例 4.3.4 求积分 $\int\tan^2x\,\mathrm{d}x.$

解 $\int\tan^2x\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{\sin^2x}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1-\cos^2x}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2x}-\int 1\cdot\mathrm{d}x=\tan x-x+C.$ □

例 4.3.5 求积分 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2x\cos^2x}.$

解 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2x\cos^2x}=\int\dfrac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2x}+\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2x}=\tan x-\cot x+C.$ □

习　题　4.3

(A)

1. 回答下列问题:

(1) “不定积分”与“原函数”这两个概念有什么区别? 有什么联系?

(2) 若 $F(x)$ 与 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数,试问它们之间有什么关系?

(3) 下列等式是否正确? 为什么?

(A) $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$;　(B) $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$;

(C) $\int\mathrm{d}f(x)=f(x)$;　(D) $\mathrm{d}\int\mathrm{d}f(x)=\mathrm{d}f(x)$.

(4) 不定积分的几何意义是什么?

2. 求出下列函数的原函数:

(1) $f(x)=5$;　(2) $f(x)=5x$;　(3) $f(x)=x^3$;

(4) $g(t)=t^2+t$;　(5) $h(t)=\cos 2t$;　(6) $g(z)=\sqrt{z}\ (z>0)$;

(7) $h(z)=\dfrac{3}{z}\ (z>0)$;　(8) $r(t)=\dfrac{1}{t^2}$;　(9) $g(z)=\dfrac{1}{z^3}$;

(10) $f(x)=\mathrm{e}^x$;　(11) $g(t)=\sin\dfrac{t}{2}$;　(12) $f(t)=2t^2+3t^2$;

(13) $p(t)=t^3-\dfrac{t^2}{2}-t$;　(14) $g(y)=y^4+\dfrac{1}{y}\ (y>0)$;　(15) $f(x)=5x-\sqrt{x}\ (x>0)$;

(16) $f(t)=\dfrac{t^2+1}{t}$;　(17) $p(\theta)=2\sin 2\theta$;　(18) $r(t)=\mathrm{e}^t+5\mathrm{e}^{5t}$;

(19) $g(t)=(t+1)^2$;　(20) $f(x)=e^{5x}$;　(21) $f(x)=xe^{x^2}$;

(22) $p(t)=\cos t+\dfrac{1}{\cos^2 t}$;　(23) $f(x)=x\cos x^2$;　(24) $r(t)=3t^2\cos(t^3+7)$;

(25) $g(\theta)=\sin\theta+\dfrac{1}{1+\theta^2}$;　(26) $f(y)=e^2+2^y$;

(27) $f(x)=6\sqrt{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{10}{x}\ (x>0)$;　(28) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{1+x^2}$.

3. 在下列各题中,求函数$F(x)$,使得$F'(x)=f(x)$且$F(0)=2$.

(1) $f(x)=3$;　(2) $f(x)=e^x$;　(3) $f(x)=x^2$;

(4) $f(x)=\cos x$;　(5) $f(x)=\sin x$;　(6) $f(x)=(x-1)^2$.

(B)

1. 求下列不定积分:

(1)$\displaystyle\int\left(e^x-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$;　(2)$\displaystyle\int\frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx$;　(3)$\displaystyle\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$;

(4)$\displaystyle\int\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$;　(5)$\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$;　(6)$\displaystyle\int\frac{2x^2}{\sqrt{x}}dx$;

(7)$\displaystyle\int(x^2-1)^2dx$;　(8)$\displaystyle\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$;　(9)$\displaystyle\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$;

(10)$\displaystyle\int(2^x+3^x)dx$;　(11)$\displaystyle\int\frac{3x^2}{1+x^2}dx$;　(12)$\displaystyle\int\frac{dx}{x^4(1+x^2)}$.

2. 求下列不定积分:

(1)$\displaystyle\int\cos(t+1)dt$;　(2)$\displaystyle\int(2\sin\theta-3\cos\theta)d\theta$;　(3)$\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\sin^2x\cos^2x}dx$;

(4)$\displaystyle\int\frac{dt}{\sin^2\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}}$;　(5)$\displaystyle\int\sqrt{1-\sin 2\theta}\,d\theta$;　(6)$\displaystyle\int\frac{3+\sin^2x}{\cos^2x}dx$;

(7)$\displaystyle\int\cos^2\frac{t}{2}dt$;　(8)$\displaystyle\int\frac{dx}{1+\cos 2x}$;　(9)$\displaystyle\int\sec x(\sec x-\tan x)dx$;

(10)$\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$;　(11)$\displaystyle\int 3^xe^xdx$;　(12)$\displaystyle\int\frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}dx$.

3. 池塘里的水以速率$\dfrac{dy}{dt}=k\sqrt{t}$结冰,其中y表示在时刻t冰的厚度,以每小时多少米度量,k是常数.试求函数$y(t)$.

4. 波音727喷气式飞机必须有时速320 km才能起飞.如果它在30 s内速度可以从0增加到320 km/h,试问跑道要有多长?(假设加速度是常数.)

答案与提示

(A)

2. (1) $5x+C$;　(2) $\dfrac{5}{2}x^2+C$;　(3) $\dfrac{1}{4}x^4+C$;　(4) $\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{1}{2}t^2+C$;　(5) $\dfrac{1}{2}\sin 2t+C$;

(6) $\dfrac{2}{3}z^{3/2}+C$;　(7) $3\ln z+C$;　(8) $-\dfrac{1}{t}+C$;　(9) $-\dfrac{1}{2z^2}+C$;　(10) e^x+C;

(11) $-2\cos\dfrac{t}{2}+C$;　(12) $\dfrac{2}{3}t^3+\dfrac{3}{4}t^4+C$;　(13) $\dfrac{1}{4}t^4-\dfrac{1}{6}t^3-\dfrac{1}{2}t^2+C$;

(14) $\frac{1}{5}y^5+\ln y+C$; (15) $\frac{5}{2}x^2-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$; (16) $\frac{1}{2}t^2+\ln|t|+C$;

(17) $-\cos 2\theta+C$; (18) $e^t+e^{5t}+C$; (19) $\frac{1}{3}(t+1)^3+C$; (20) $\frac{1}{5}e^{5x}+C$; (21) $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$;

(22) $\sin t+\tan t+C$; (23) $\frac{1}{2}\sin x^2+C$; (24) $\sin(t^3+7)+C$; (25) $-\cos\theta+\arctan\theta+C$;

(26) $\frac{2^y}{\ln 2}+e^2y+C$; (27) $4x\sqrt{x}+\frac{1}{x}+10\ln x+C$; (28) $\arcsin x+\arctan x+C$.

3. (1) $3x+2$; (2) $1+e^x$; (3) $\frac{1}{3}x^3+2$; (4) $\sin x+2$; (5) $3-\cos x$;

(6) $\frac{1}{3}(x-1)^3+\frac{7}{3}$.

(B)

1. (1) $e^x-3x^{2/3}+C$; (2) $\arctan x+\ln|x|+C$; (3) $\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C$;

(4) $\frac{4}{7}x^{7/4}+C$; (5) $-\frac{2}{3}x^{-3/2}+C$; (6) $\frac{4}{5}x^{5/2}+C$; (7) $\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x+C$;

(8) $2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$; (9) $x-e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$; (10) $\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{3^x}{\ln 3}+C$;

(11) $3(x-\arctan x)+C$; (12) $\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\arctan x+C$.

2. (1) $\sin(t+1)+C$; (2) $-2\cos\theta-3\sin\theta+C$; (3) $-\tan x-\cot x+C$;

(4) $2\tan\frac{t}{2}-2\cot\frac{t}{2}+C$; (5) $(\cos\theta+\sin\theta)\cdot\operatorname{sgn}(\cos\theta-\sin\theta)+C$; (6) $4\tan x-x+C$;

(7) $\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\sin t+C$; (8) $\frac{1}{2}\tan x+C$; (9) $\tan x-\frac{1}{\cos x}+C$; (10) $\sin x-\cos x+C$;

(11) $\frac{3^xe^x}{1+\ln 3}+C$; (12) $2x-\frac{5\cdot 2^x}{3^x(\ln 2-\ln 3)}+C$.

3. $y(t)=\frac{2k}{3}t^{3/2}+C$.

4. 约1 341 m.

4.4 换元积分法

我们在第3章中学习了复合函数的求导法则——链式法则:

$$\frac{d}{dx}(f[g(x)])=f'[g(x)]\cdot g'(x). \tag{4.4.1}$$

那么,对于求原函数是否也有类似的规则呢?本节将引进两种求原函数的方法:第一换元法(又称凑微分法)和第二换元法,这些方法都是由链式法则出发而引进的.

4.4.1 第一换元法

由一阶微分形式的不变性(第3章3.3.2)知,当u是自变量时,若有

$$dF(u)=f(u)du,$$

则当$u=g(x)$时,也有

$$\mathrm{d}[F(u)]=\mathrm{d}[F(g(x))]=f[g(x)]\mathrm{d}g(x)=f(u)\mathrm{d}u.$$

将这个性质转换成积分法则,即为**第一换元法**.

定理4.4.1(第一换元法)　若u是自变量时,有

$$\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C,$$

则u是x的可微函数$u=g(x)$时,也有

$$\int f[g(x)]\mathrm{d}g(x)=F[g(x)]+C,$$

其中记号$\int f[g(x)]\mathrm{d}g(x)$约定是$\int f[g(x)]g'(x)\mathrm{d}x$的一种记法.

证　由条件得　$\mathrm{d}F(u)=f(u)\mathrm{d}u$,

根据一阶微分形式的不变性得

$$\mathrm{d}F[g(x)]=f[g(x)]\mathrm{d}g(x)=f[g(x)]\cdot g'(x)\mathrm{d}x,$$

再根据积分是求导的逆运算即知定理成立.　□

在具体计算时,首先要将被积表达式凑成如下的形式:

$$f[g(x)]\cdot g'(x)\mathrm{d}x=f[g(x)]\mathrm{d}g(x),$$

然后作变量代换(即“换元”)

$$u=g(x),$$

于是所要计算的积分

$$\int f[g(x)]\cdot g'(x)\mathrm{d}x \tag{4.4.2}$$

就转化成

$$\int f(u)\mathrm{d}u. \tag{4.4.3}$$

当然,(4.4.3)式的积分要比较好算,比方说是积分表上可以查到的形式,作这样的换元才有价值.

例4.4.1　求$\int 3x^2\cos x^3\mathrm{d}x$.

解　$\int 3x^2\cos x^3\mathrm{d}x=\int \cos x^3\mathrm{d}(x^3)\xlongequal{(u=x^3)}\int \cos u\mathrm{d}u=\sin u+C=\sin x^3+C.$

当我们运算较熟练时,中间的换元步骤可以省略,而直接写成:

$$\int 3x^2\cos x^3\mathrm{d}x=\int \cos(x^3)\mathrm{d}(x^3)=\sin x^3+C.$$　□

例4.4.2　求$\int t\mathrm{e}^{(t^2+1)}\mathrm{d}t$.

解　$\int t\mathrm{e}^{(t^2+1)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{(t^2+1)}\mathrm{d}(t^2+1)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{(t^2+1)}+C.$　□

例4.4.3　求$\int x^3\sqrt{x^4+5}\mathrm{d}x$.

解　$\int x^3\sqrt{x^4+5}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int (x^4+5)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(x^4+5)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1/2+1}(x^4+5)^{\frac{1}{2}+1}+C$

$$= \frac{1}{6}(x^4+5)^{3/2}+C.$$ □

例 4.4.4 求 $\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$ □

例 4.4.5 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}\ (a\neq 0)$.

解 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$$ □

例 4.4.6 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}\ (a\neq 0)$.

解 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a-x)(a+x)} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2a}\int \frac{\mathrm{d}(a+x)}{a+x} - \frac{1}{2a}\int \frac{\mathrm{d}(a-x)}{a-x} = \frac{1}{2a}\ln|a+x| - \frac{1}{2a}\ln|a-x|+C$$
$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C.$$ □

例 4.4.7 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$.

解 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C.$$ □

例 4.4.8 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.

解法一 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1-\sin^2 x} \xlongequal{\text{(参见例 4.4.6)}} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|^2+C = \ln|\sec x+\tan x|+C.$$

解法二 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}} = 2\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)} = 2\int \frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$
$$= \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$ □

例 4.4.8 中,两种解法得到了两种形式不同的答案,请读者给出解释.

例 4.4.9 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\ln x)}$.

解 $\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)}=\int \frac{d(\ln x)}{1+2\ln x}=\frac{1}{2}\int \frac{d(1+2\ln x)}{1+2\ln x}=\frac{1}{2}\ln(1+2\ln x)+C.$ □

例 4.4.10 求 $\int \cos 3x\cos 2x\,dx$.

解 由三角函数的积化和差公式,有

$$\cos 3x\cos 2x=\frac{1}{2}(\cos x+\cos 5x),$$

故 $\int \cos 3x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int (\cos x+\cos 5x)dx=\frac{1}{2}\left(\int \cos x\,dx+\frac{1}{5}\int \cos 5x\,d(5x)\right)$

$$=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{10}\sin 5x+C.$$ □

4.4.2 第二换元法

在公式 $$\int f[g(x)]g'(x)dx \xlongequal{(g(x)=u)} \int f(u)du$$

中,若利用右端积分来求左端积分,即为第一换元法;若利用左端积分来求右端积分,即为第二换元法. 令 x 为所要求的积分的积分变量,t 则表示变换后的积分变量.

定理 4.4.2(第二换元法) 设变换函数 $x=x(t)$在开区间上的导数保持定号,若

$$\int f[x(t)]x'(t)dt=G(t)+C, \tag{4.4.4}$$

则

$$\int f(x)dx=G[t(x)]+C, \tag{4.4.5}$$

其中 $t=t(x)$为 $x=x(t)$的反函数.

定理也常写成变换形式:

$$\int f(x)dx \xlongequal{(x=x(t))} \int f[x(t)]x'(t)dt=G(t)+C$$

$$\xlongequal{(t=t(x))} G[t(x)]+C.$$

证 由(4.4.4)式知

$$G'(t)=f[x(t)]x'(t).$$

又$x'(t)$保持定号,故$x(t)$连续且严格单调(第3 章3.3.1),从而反函数$t=t(x)$存在,并且也连续、严格单调,其导数为

$$t'(x)=\frac{1}{x'[t(x)]} \quad 或 \quad t'(x)\cdot x'[t(x)]=1.$$

由此推得

$$\frac{d}{dx}G[t(x)]=G'[t(x)]\cdot t'(x)=f(x)\cdot x'[t(x)]\cdot t'(x)=f(x),$$

这表明$G[t(x)]$是$f(x)$的原函数,故(4.4.5)式成立. 证毕. □

第二换元法主要用来求无理函数的积分,即设法作变换消去根号,变成较容易计

算的积分.

例 4.4.11 求$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解 令 $x=t^6$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}\mathrm{d}t=6\int\frac{t^3\mathrm{d}t}{1+t}=6\int\frac{t^3+1-1}{1+t}\mathrm{d}t$$

$$=6\int\left[t^2-t+1-\frac{1}{1+t}\right]\mathrm{d}t=2t^3-3t^2+6t-6\ln|1+t|+C$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|1+\sqrt[6]{x}|+C.$$ □

例 4.4.12 求$\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

解 令 $x=a\sin t$, $|t|<\dfrac{\pi}{2}$,则

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\int a^2\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C$$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

其中利用了图 4.11 将新变量 t 返回到原变量 x:

$$\sin t=\frac{x}{a},\quad \cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}.$$ □

例 4.4.13 求$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}\ (a>0,\ |x|>a)$.

解 令 $x=a\sec t\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\sec t\cdot\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos t}\xlongequal{(\text{参见例 4.4.8})}\ln|\sec t+\tan t|+C_1$$

$$\xlongequal{(\text{参见图 4.12})}\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$$ □

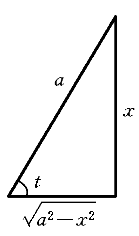


图 4.11

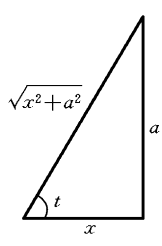


图 4.12

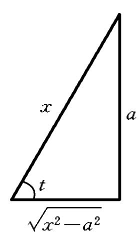


图 4.13

例4.4.14　求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}\ (a>0)$.

解　令 $x=a\tan t$，则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int \frac{dt}{\sec t\cdot\cos^2 t}=\int \frac{dt}{\cos t}=\ln|\sec t+\tan t|+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C_1 \xlongequal{(参见图4.13)} \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.\ \square$$

4.4.3　定积分的换元法

利用牛顿-莱布尼兹公式计算定积分，只要求出被积函数的原函数即可．如果被积函数比较复杂，可以采用换元法先求出不定积分，用原来的变量表示原函数，然后按牛顿-莱布尼兹公式将原变量的上下限代入即得．

例4.4.15　求 $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

解　令 $x=\sin t$，则

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{(\sin t+\cos t)'}{\sin t+\cos t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}(t+\ln|\sin t+\cos t|)+C=\frac{1}{2}(\arcsin x+\ln|x+\sqrt{1-x^2}|)+C.$$

故

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}(\arcsin x+\ln|x+\sqrt{1-x^2}|)\Big|_0^{1/2}$$

$$=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{3}}{2}.\qquad\square$$

然而，在许多理论和实际问题中，如果直接采用定积分的换元法，则计算要简单得多．

定理4.4.3　设 $f(x)\in C[a,b]$，$x=\varphi(t)$ 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数 $\varphi'(t)$．当 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 时，$a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$，且 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$．则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.\tag{4.4.6}$$

证　由 $f(x)$ 连续知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $G(x)$，因此由牛顿-莱布尼兹公式，有

$$\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a).$$

又由
$$\frac{d}{dt}G[\varphi(t)]=G'[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$$

知，$G[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的原函数，所以

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt=G[\varphi(\beta)]-G[\varphi(\alpha)]=G(b)-G(a),$$

于是(4.4.6)式得证. □

例 4.4.16 求 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx\ (a>0)$.

解 像例 4.4.12 那样作变换 $x = a\sin t$,则当 $x=0$ 时 $t=0$;当 $x=a$ 时 $t=\frac{\pi}{2}$. 于是

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

在这里我们看到,采用换元法计算定积分时,不必返回到原变量 x 即可求得结果. 但应注意把原积分变量的上下限换为新变量的上下限. □

例 4.4.17 求 $\int_{-2a}^{-a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4}\,dx$.

解 仿例 4.4.13,可令 $x = a\sec t\left(\frac{\pi}{2} < t \leqslant \pi\right)$,则

$$\int_{-2a}^{-a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4}\,dx = -\frac{1}{a^2}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\sin^2 t\cos t\,dt = -\frac{1}{a^2}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\sin^2 t\,d(\sin t)$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{3}\sin^3 t\Bigg|_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} = \frac{\sqrt{3}}{8a^2}.$$ □

例 4.4.18 利用换元法,我们给出简化定积分的计算中常用的两个结论:

(1) 设 $f(x)$ 是区间 $[-a,a]$ 上可积的偶函数,则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx;$$

(2) 设 $f(x)$ 是区间 $[-a,a]$ 上可积的奇函数,则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

证 (1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_a^0 f(-t)\,dt$

$$= \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

(2) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_a^0 f(-t)\,dt$

$$= \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^0 f(t)\,dt = 0.$$ □

例 4.4.19 利用递推公式计算积分 $I_n = \int_0^{\pi/4}\tan^{2n}x\,dx$ (n 为正整数).

解 $I_n = \int_0^{\pi/4}\tan^{2n-2}x\cdot\tan^2 x\,dx = \int_0^{\pi/4}\tan^{2n-2}x\cdot(\sec^2 x - 1)\,dx$

$$= \int_0^{\pi/4}\tan^{2n-2}x\,d(\tan x) - \int_0^{\pi/4}\tan^{2n-2}x\,dx = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1},$$

即
$$I_n=\frac{1}{2n-1}-I_{n-1}.$$

由于 $I_0=\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$，故推得
$$\begin{aligned}I_n&=\frac{1}{2n-1}-\left(\frac{1}{2n-3}-I_{n-2}\right)=\cdots\\&=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-5}-\cdots+(-1)^nI_0\\&=(-1)^n\left[\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right].\end{aligned}$$ □

习　题　4.4

(A)

1. 回答下列问题：

(1) 两种换元法的差别是什么？

(2) 在积分 $\int_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ 中作代换 $x=\sin t$ 是否可以？

(3) 对积分 $\int_{-1}^1\mathrm{d}x$ 作代换 $t=x^{2/3}$ 是否可以？

2. 利用第一换元法计算下列积分：

(1) $\int \mathrm{e}^{\cos\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$；　(2) $\int x(x^2-4)^{7/2}\mathrm{d}x$；　(3) $\int \sin(2-5x)\mathrm{d}x$；

(4) $\int \sqrt[3]{1-5x}\,\mathrm{d}x$；　(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 2x}$；　(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3x^2}$；

(7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2-3x^2}$；　(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x^2}}$；　(9) $\int \frac{(\ln t)^2}{t}\mathrm{d}t$；

(10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln(\ln x)}$.

3. 计算下列定积分：

(1) $\int_1^3\frac{\mathrm{d}x}{x}$；　(2) $\int_{-1}^3(x^3+5x)\mathrm{d}x$；　(3) $\int_0^\pi\sin\theta(\cos\theta+5)^7\mathrm{d}\theta$；

(4) $\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}$；　(5) $\int_0^1\frac{x}{1+5x^2}\mathrm{d}x$；　(6) $\int_0^{\pi/12}\sin 3t\,\mathrm{d}t$；

(7) $\int_1^2\frac{x^2+1}{x}\mathrm{d}x$；　(8) $\int_1^4 x\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x$；　(9) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+1}$；

(10) $\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$；　(11) $\int_{-2}^0\frac{2x+4}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x$；　(12) $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x$；

(13) $\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$；　(14) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\theta-\cos^3\theta}\,\mathrm{d}\theta$；　(15) $\int_1^2\mathrm{e}^{x^3}x^2\mathrm{d}x$；

(16) $\int_2^3\frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\mathrm{d}x$；　(17) $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\tan\theta\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$；　(18) $\int_0^{\pi/2}\cos^5\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$.

4. 利用适当的代换计算下列积分.

(1) $\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$;　(2) $\int_0^{a/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$ $(a > 0)$;　(3) $\int \sqrt{\frac{x}{1 + x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$;

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sqrt{x}}$;　(5) $\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1 - \mathrm{e}^{2x}}}\mathrm{d}x$;　(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$;

(7) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}\mathrm{d}x$;　(8) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x$;　(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - 1}}$;

(10) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1 + x)}\mathrm{d}x$.

(B)

1. 利用第一换元法计算下列积分:

(1) $\int x\sqrt[3]{1 - 5x^2}\mathrm{d}x$;　(2) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{1 - x}$;　(3) $\int \frac{1 + \mathrm{e}^x}{\sqrt{x + \mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x$;

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$;　(5) $\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$;　(6) $\int \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$;

(7) $\int \frac{x^3}{9 + x^2}\mathrm{d}x$;　(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^6 + 4)}$;　(9) $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 19}\mathrm{d}x$;

(10) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\mathrm{d}x$;　(11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \cos x}$;　(12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sin x}$.

2. 利用适当的代换计算下列积分:

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + \mathrm{e}^x}}$;　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt{1 - x^2}}$;　(3) $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$(令 $x = \frac{1}{t}$);

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$;　(5) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1 - x)}}\mathrm{d}x$;　(6) $\int \frac{1 + \ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x$;

(7) $\int \frac{\ln\tan x}{\cos x\sin x}\mathrm{d}x$;　(8) $\int_0^a \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}\mathrm{d}x$ (令 $x = a\sin t$).

3. 设 $f(x) \in C[0,\pi]$,证明

(1) $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$,并由此计算 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1 + \cos^2 x}\mathrm{d}x$.

4. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数,证明积分 $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$ 的值与 a 无关.

5. 若 $f(t)$ 连续且为奇函数,证明 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数;若 $f(t)$ 连续且为偶函数,证明 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数.

6. 设 $f(x)$ 是连续函数,证明 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x) + f(x + 1)]\mathrm{d}x$.

答案与提示

(A)

2. (1) $-\mathrm{e}^{\cos\theta} + C$;　(2) $\frac{1}{9}(x^2 - 4)^{9/2} + C$;　(3) $\frac{1}{5}\cos(2 - 5x) + C$;

(4) $-\frac{3}{20}(1-5x)^{4/3}+C$； (5) $\frac{1}{2}\tan 2x+C$； (6) $\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\sqrt{\frac{3}{2}}x+C$；

(7) $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}x}{\sqrt{2}-\sqrt{3}x}\right|+C$； (8) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}x+C$；

(9) $\frac{1}{3}(\ln t)^3+C$； (10) $\ln(\ln(\ln x))+C$.

3. (1) $\ln 3$； (2) 40； (3) $\frac{1}{8}(6^8-4^8)$； (4) $\frac{\pi}{2}$； (5) $\frac{1}{10}\ln 6$； (6) $\frac{1}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$； (7) $\frac{3}{2}+\ln 2$；

(8) $\frac{35}{3}\sqrt{5}$； (9) $\frac{1}{2}$； (10) $\frac{\pi}{12}$； (11) $\ln 5$； (12) $-\frac{468}{7}$； (13) $2(\sqrt{3}-1)$； (14) $\frac{4}{3}$；

(15) $\frac{1}{3}(e^8-e)$； (16) $\sqrt{e}-\sqrt[3]{e}$； (17) $\frac{1}{3}$； (18) $\frac{1}{6}$.

4. (1) $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{a^2}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$； (2) $\frac{1}{a^2}$； (3) $\frac{4}{3}(1+x\sqrt{x})^{1/2}+C$；

(4) $2(1+\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x}))+C$； (5) $\arcsin e^x+C$；

(6) $\arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C$； (7) $2-\sqrt{2}-\ln\sqrt{3}-\ln(\sqrt{2}-1)$；

(8) $\frac{\pi a^4}{16}$； (9) $\arccos\frac{1}{x}+C$； (10) $(\arctan\sqrt{x})^2+C$.

(B)

1. (1) $\frac{3}{175}(1-5x)^{7/3}-\frac{3}{100}(1-5x)^{4/3}+C$； (2) $-x-\ln|1-x|+C$； (3) $2\sqrt{x+e^x}+C$；

(4) $\arctan e^x+C$； (5) $2e^{\sqrt{y}}+C$； (6) $\ln(e^x+e^{-x})+C$；

(7) $\frac{x^2}{2}-\frac{9}{2}\ln(9+x^2)+C$； (8) $-\frac{1}{24}\ln(1+x^{-6})+C$； (9) $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+19|+C$；

(10) $\frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{2/3}+C$； (11) $\tan\frac{x}{2}+C$； (12) $-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C$.

2. (1) $x-2\ln(1+\sqrt{1+e^x})+C$； (2) $\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1-x^2})+C$；

(3) $-\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3a^2x^3}+C$； (4) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$； (5) $\frac{5}{144}\pi^2$； (6) $-\frac{1}{x\ln x}+C$；

(7) $\frac{1}{2}(\ln\tan x)^2+C$； (8) $a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

3. (2) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi^2}{4}$.

4.5　分部积分法

4.5.1　不定积分的分部积分法

在上一节我们看到,换元法来自链式法则,下面我们将引进**分部积分法**,它与微分学中乘积的求导规则对应. 由乘积的求导法则,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv)=u'v+uv', \tag{4.5.1}$$

其中u,v是x的函数.将(4.5.1)式改写成

$$uv'=(uv)'-u'v, \tag{4.5.2}$$

两边积分之,得 $\int uv'\mathrm{d}x=\int (uv)'\mathrm{d}x-\int u'v\mathrm{d}x$,

于是便得到下面的**分部积分公式**

$$\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int u'v\mathrm{d}x. \tag{4.5.3}$$

当右边的积分比左边的积分更简单、更容易计算时,这个公式是很有用的.

例 4.5.1 求$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解 令$u=x,v'=\mathrm{e}^x$,则$u'=1,v=\mathrm{e}^x$,利用(4.5.3)式,有

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C.$$ □

例 4.5.2 求$\int \theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$.

解 令$u=\theta,v'=\cos\theta$,则$u'=1,v=\sin\theta$,利用(4.5.3)式,有

$$\int \theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=\theta\sin\theta-\int \sin\theta\mathrm{d}\theta=\theta\sin\theta+\cos\theta+C.$$ □

但是,如果在例4.5.1中我们令$u=\mathrm{e}^x,v'=x$,则$u'=\mathrm{e}^x,v=\frac{x^2}{2}$.这时,由分部积分公式(4.5.3),有

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x-\int \frac{x^2}{2}\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x.$$

虽然这样做没有什么不对的地方,但是右边的积分显然比左边的积分困难得多.由此可见,如何选取u和v'很重要.下面给出运用分部积分公式(4.5.3)的几个原则.

① 选取u和v'时,u'应比u更简单(至少不比u更复杂),而v则最好比v'简单些(至少不比v'更复杂),并且v要容易求得.

② 若被积函数中有因子$\mathrm{e}^{\pm x}$,则令$v'=\mathrm{e}^{\pm x}$,或者说,把$\mathrm{e}^{\pm x}$放入微分符号d内;如被积函数中没有$\mathrm{e}^{\pm x}$,而有$\sin x,\cos x$时,则取v'为$\sin x,\cos x$;若上述函数都没有时,就把幂函数x^α放入微分符号d内,也就是取$v'=x^\alpha$.

例 4.5.3 求$\int x^6\ln x\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int x^6\ln x\mathrm{d}x&=\int \ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{7}x^7\right)=\frac{1}{7}x^7\ln x-\int \frac{1}{7}x^7\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{7}x^7\ln x-\frac{1}{7}\int x^6\mathrm{d}x=\frac{1}{7}x^7\ln x-\frac{1}{49}x^7+C.\end{aligned}$$ □

例 4.5.4 求$\int x^2\sin 4x\mathrm{d}x$.

解 $\int x^2\sin4x\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}\left(-\frac{1}{4}\cos4x\right)=-\frac{1}{4}x^2\cos4x-\int 2x\cdot\left(-\frac{1}{4}\cos4x\right)\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{4}x^2\cos4x+\frac{1}{2}\int x\cos4x\mathrm{d}x.$$

再用分部积分公式计算：

$$\int x\cos4x\mathrm{d}x=x\left(\frac{1}{4}\sin4x\right)-\int 1\cdot\frac{1}{4}\sin4x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}x\sin4x-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\cos4x\right)+C=\frac{1}{4}x\sin4x+\frac{1}{16}\cos4x+C.$$

于是 $\int x^2\sin4x\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}x^2\cos4x+\frac{1}{2}\int x\cos4x\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{4}x^2\cos4x+\frac{1}{8}x\sin4x+\frac{1}{32}\cos4x+C.$$ □

例4.5.5 求 $\int\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$.

解 $\int\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x=x\sqrt{x^2-1}-\int x\mathrm{d}\sqrt{x^2-1}=x\sqrt{x^2-1}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$

$$=x\sqrt{x^2-1}-\int\frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$$

$$=x\sqrt{x^2-1}-\int\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\overset{\text{(见例4.4.13)}}{=\!=\!=}x\sqrt{x^2-1}-\int\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|,$$

分部积分一次后，又回到了原来要求的积分，即出现所谓“复原”的情形. 这时若令 $I=\int\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$ 则可以得到关于 I 的一个方程：

$$I=x\sqrt{x^2-1}-I-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|,$$

由此即可求出 $I=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C.$ □

例4.5.6 求 $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$.

解 $\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\int\sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\sin x-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}\sin x=\mathrm{e}^x\sin x-\int\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$,

而 $\int\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x=\int\cos x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\cos x-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}\cos x=\mathrm{e}^x\cos x+\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$,

因此 $\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\sin x-\int\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\sin x-\mathrm{e}^x\cos x-\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$,

于是得 $$\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+C.$$ □

4.5.2　定积分的分部积分法

对定积分，也有相应的分部积分法.

定积分的分部积分公式　设函数 u 和 v 在 $[a,b]$ 上有连续的导数,则

$$\int_a^b uv'\mathrm{d}x = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b u'v\mathrm{d}x. \tag{4.5.4}$$

例 4.5.7　求 $\int_2^3 \ln x\mathrm{d}x$.

解

$$\int_2^3 \ln x\mathrm{d}x = \int_2^3 \ln x \cdot 1\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_2^3 - \int_2^3 x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$= 3\ln 3 - 2\ln 2 - 3 + 2 = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1.$$ □

例 4.5.8　求 $\int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　首先换元:令 $\sqrt{x} = t$,则 $x = t^2$,$\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. 当 $x = 1$ 时,$t = 1$;当 $x = 4$ 时,$t = 2$. 于是

$$\int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_1^2 \mathrm{e}^t\cdot 2t\mathrm{d}t = 2\int_1^2 t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t \quad (\text{见例 } 4.5.1)$$

$$= 2(t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t)\Big|_1^2 = 2(2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} + \mathrm{e}) = 2\mathrm{e}^2.$$ □

例 4.5.9　求 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\mathrm{d}x$.

解　令 $u = \arcsin x$,$v' = 1$,则 $u' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,$v = x$. 于是

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\mathrm{d}x = (x\arcsin x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= \frac{\pi}{12} + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$ □

例 4.5.10　求 $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\cos^n x\mathrm{d}x$,$n$ 为自然数.

解　上述等式可通过代换 $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ 得到. 由分部积分法,得

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}x\mathrm{d}(-\cos x) = -\left(\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2}\cos x\mathrm{d}\sin^{n-1}x\right)$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x,$$

即有

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

故得
$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}. \tag{4.5.5}$$
由于
$$I_0=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$
$$I_1=\int_0^{\pi/2}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\pi/2}=1,$$
所以由递推公式(4.5.5)知,当n是偶数时
$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)}I_{n-4}=\cdots=\frac{(n-1)(n-3)\cdots3\cdot1}{2\cdot4\cdot6\cdots(n-2)n}\cdot\frac{\pi}{2};$$
当n是奇数时,
$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}=\cdots=\frac{(n-1)(n-3)\cdots4\cdot2}{3\cdot5\cdots(n-2)n}$$
故得
$$I_{2n}=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}, \tag{4.5.6}$$
$$I_{2n+1}=\frac{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n+1)(2n-1)\cdots3\cdot1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$
□

前面几节我们介绍了几种基本的积分方法.不定积分的计算常常归结为求一个用初等函数表示的原函数.我们知道,可导的初等函数的导数仍然是初等函数,但初等函数的原函数却不一定是初等函数.例如函数$\frac{\sin x}{x}$, e^{-x^2}, $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$, $\sqrt{1-\varepsilon\sin^2x}\,(0<\varepsilon<1)$, $\frac{e^x}{x}$等等,它们在定义域内是连续的,因此原函数一定存在,但原函数不能用初等函数表示出来.对此我们常称$\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, $\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$等为积不出来的积分.为了应用的方便,人们已将积得出来的一些常用初等函数的积分编成积分表.当我们要计算一个积分时,可以直接或经过适当变形后查积分表,即得到所要的结果.本书末尾附有一个简单的积分表供查阅.

对于积不出来的积分,可以采用数值方法求其近似值.另外,人们还可以利用数学软件包在计算机上求出一些不定积分.

习　题　4.5

(A)

1. (1) 求下列函数的导数:$x\cos x$, $\cos 2x$, $x^2\cos x$, $x\ln x$.
   (2) 利用(1)的结果求下列函数的原函数:$\ln x$, $\sin 2x$, $x\sin x$, $x^2\sin x$.
2. 利用等式$\arctan x=1\cdot\arctan x$,求$\int\arctan x\mathrm{d}x$.
3. 求下列不定积分:

(1)$\int te^{5t}\mathrm{d}t$;　　(2)$\int y\ln y\mathrm{d}y$;　　(3)$\int x^3\ln x\mathrm{d}x$;

(4) $\int t\sin t\mathrm{d}t$;　(5) $\int (z+1)\mathrm{e}^{3z}\mathrm{d}z$;　(6) $\int \frac{u}{\mathrm{e}^u}\mathrm{d}u$;

(7) $\int x^5\ln 5x\mathrm{d}x$;　(8) $\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$;　(9) $\int \arctan 7x\mathrm{d}x$.

4. 试利用三角恒等式$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$,$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$以及分部积分公式两种方法,计算积分:

(1) $\int \sin^2\theta\mathrm{d}\theta$;　(2) $\int \cos^2\theta\mathrm{d}\theta$.

5. 建立$I_n=\int x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 的递推公式,n 为正整数.

6. 求下列定积分:

(1) $\int_1^5 \ln t\mathrm{d}t$;　(2) $\int_0^{10} z\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z$;　(3) $\int_3^5 x\cos x\mathrm{d}x$;

(4) $\int_1^3 t\ln t\mathrm{d}t$;　(5) $\int_0^5 \ln(1+t)\mathrm{d}t$;　(6) $\int_0^1 \arctan y\mathrm{d}y$;

(7) $\int_0^1 x\arctan x^2\mathrm{d}x$;　(8) $\int_0^1 -u\arcsin u^2\mathrm{d}u$;　(9) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$;

(10) $\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{2x}\cos x\mathrm{d}x$;　(11) $\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)\mathrm{d}x$;　(12) $\int_{1/\mathrm{e}}^{\mathrm{e}} |\ln x|\mathrm{d}x$.

(B)

1. 求下列不定积分:

(1) $\int t^2\mathrm{e}^{5t}\mathrm{d}t$;　(2) $\int t^2\sin t\mathrm{d}t$;　(3) $\int \theta^2\cos 3\theta\mathrm{d}\theta$;

(4) $\int (\ln t)^2\mathrm{d}t$;　(5) $\int x(\ln x)^4\mathrm{d}x$;　(6) $\int x\arctan x^2\mathrm{d}x$;

(7) $\int \arccos x\mathrm{d}x$;　(8) $\int x^3\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$;　(9) $\int x^5\cos x^3\mathrm{d}x$;

(10) $\int \sqrt{x}(\ln x)^2\mathrm{d}x$;　(11) $\int (\theta+1)\sin(\theta+1)\mathrm{d}\theta$.

2. (1) 求$\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$;　(2)求$\int x\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$;　(3)求$\int x\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$.

3. 运用已学过的方法求下列积分:

(1) $\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$;　(2) $\int \arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x$;　(3) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$;

(4) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$;　(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$;　(6) $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\mathrm{d}x$;

(7) $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$;　(8) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$;　(9) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$;

(10) $\int \frac{x+\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$;　(11) $\int_0^1 \frac{x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{1-x}}\mathrm{d}x$;　(12) $\int_0^{1/2} x\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$;

(13) $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\mathrm{d}x$;　(14) $\int x\sqrt{x+3}\mathrm{d}x$;　(15) $\int \frac{x}{\sqrt{5-x}}\mathrm{d}x$;

(16) $\int (t+2)\sqrt{2+3t}\mathrm{d}t$;　(17) $\int \frac{t+7}{\sqrt{5-t}}\mathrm{d}t$.

4. 先根据定积分的定义将下列极限表示成定积分,然后算出该定积分的值:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)}{n}\pi\right)$.

答案与提示

(A)

1. (1) $\cos x-x\sin x,-2\sin 2x,2x\cos x-x^2\sin x,1+\ln x$;

(2) $x\ln x-x+C,-\frac{1}{2}\cos 2x+C,\sin x-x\cos x+C,2\sin x-2\cos x-x^2\cos x+C$.

2. $x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

3. (1) $\frac{1}{5}te^{5t}-\frac{1}{25}e^{5t}+C$; (2) $\frac{1}{2}y^2\ln y-\frac{1}{4}y^2+C$; (3) $\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C$;

(4) $\sin t-t\cos t+C$; (5) $\frac{1}{3}e^{3z}(z+1)-\frac{1}{9}e^{3z}+C$; (6) $-ue^{-u}-e^{-u}+C$;

(7) $\frac{1}{6}x^6\ln 5x-\frac{1}{36}x^6+C$; (8) $-\frac{1}{x}(1+\ln x)+C$; (9) $x\arctan 7x-\frac{1}{14}\ln(1+49x^2)+C$.

4. (1) $\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\theta+C$; (2) $\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta+C$;

5. $I_n=-x^ne^{-x}+nI_{n-1}$.

6. (1) $5\ln 5-4$; (2) $1-11e^{-10}$; (3) $5\sin 5-3\sin 3+\cos 5-\cos 3$; (4) $\frac{9}{2}\ln 3-2$;

(5) $6\ln 6-5$; (6) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$; (7) $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$; (8) $-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$;

(9) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$; (10) $\frac{1}{5}(e^{\pi}-2)$; (11) $\frac{1}{2}+\frac{e}{2}(\sin 1-\cos 1)$; (12) $2(1-\frac{1}{e})$.

(B)

1. (1) $\frac{1}{5}t^2e^{5t}-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{5}te^{5t}-\frac{1}{25}e^{5t}\right)+C$; (2) $2\cos t+2t\sin t-t^2\cos t+C$;

(3) $\frac{1}{3}\theta^2\sin 3\theta+\frac{2}{9}\theta\cos 3\theta-\frac{2}{27}\sin 3\theta+C$; (4) $2t+t(\ln t)^2-2t\ln t+C$;

(5) $\frac{x}{2}+x^2\left[\frac{1}{2}(\ln x)^4-(\ln x)^3+\frac{3}{2}(\ln x)^2-\frac{3}{2}\ln x\right]+C$;

(6) $\frac{1}{2}x^2\arctan x^2-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+C$; (7) $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$;

(8) $\frac{1}{2}x^2e^{x^2}-\frac{1}{2}e^{x^2}+C$; (9) $\frac{1}{3}x^3\sin x^3+\frac{1}{3}\cos x^3+C$;

(10) $x^{3/2}\left[\frac{3}{2}(\ln x)^2-\frac{8}{9}\ln x+\frac{16}{27}\right]+C$; (11) $\sin(\theta+1)-(\theta+1)\cos(\theta+1)+C$.

2. (1) $\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$; (2) $\frac{1}{2}e^x[x(\sin x-\cos x)+\cos x]+C$;

(3) $\frac{1}{2}e^x[x(\sin x+\cos x)+\sin x]+C$.

3. (1) $x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$; (2) $(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$;

(3) $x\tan\frac{x}{2}+C$; (4) $\frac{1}{2}\sec x\tan x-\ln(\sec x+\tan x)+C$; (5) $x-\ln(1+e^x)+\frac{1}{1+e^x}+C$;

(6) $\frac{xe^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)+C$; (7) $2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$;

(8) $\frac{1}{2}\arctan x-\frac{x}{2(1+x^2)}+C$; (9) $\frac{1}{3}\ln 2$; (10) $\ln x-\frac{x+\ln x}{1+x}+C$;

(11) $\frac{1}{2\sqrt{e}}\left(\arctan\sqrt{e}-\arctan\frac{1}{\sqrt{e}}\right)+C$; (12) $\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\ln 3$; (13) $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$;

(14) $\frac{2}{3}x(x+3)^{3/2}-\frac{4}{15}(x+3)^{5/2}+C$; (15) $-2x\sqrt{5-x}-\frac{4}{3}(5-x)^{3/2}+C$;

(16) $\frac{2}{9}(t+2)(2+3t)^{3/2}-\frac{4}{135}(2+3t)^{5/2}+C$; (17) $-2(t+7)\sqrt{5-t}-\frac{4}{3}(5-t)^{3/2}+C$.

4. (1) 原式$=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2$; (2) 原式$=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$; (3) 原式$=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}$.

4.6 有理函数的积分

两个多项式之比称为**有理函数**. 我们在前面曾计算过一些简单的有理函数的积分,这一节将讨论较一般的情形.

4.6.1 有理函数的积分

有理函数的原函数一定是初等函数,因此,在理论上说,有理函数的积分是一定可以算出来的. 下面简单介绍有理函数的积分的计算方法.

若有理函数的分子多项式的次数大于等于分母多项式的次数,则称这个有理函数为**假分式**,否则称为**真分式**.

由多项式除法知,

$$\text{假分式}=\text{多项式}+\text{真分式},$$

而多项式的积分是容易计算的,所以我们只需讨论真分式的积分. 根据代数学的有关知识可知,

$$\text{真分式}=\text{最简真分式之和},$$

而最简真分式只有以下四种:

(Ⅰ) $\frac{A}{x-a}$; (Ⅱ) $\frac{A}{(x-a)^m}\quad(m>1)$;

(Ⅲ) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\quad(p^2-4q<0)$; (Ⅳ) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\quad(k>1,p^2-4q<0)$.

下面我们通过例子说明如何将真分式分解成最简真分式之和.

例 4.6.1 把真分式$\frac{x+3}{(x+2)(x^2-1)}$分解成最简真分式之和.

解 因分母多项式只有实零点,且无重零点,所以分解的形式为

$$\frac{x+3}{(x+2)(x^2-1)}=\frac{x+3}{(x+2)(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1},$$

其中A、B、C为待定系数.

将分解式通分,得

$$\frac{x+3}{(x+2)(x^2-1)}=\frac{A(x^2-1)+B(x+2)(x-1)+C(x+1)(x+2)}{(x+2)(x^2-1)}.$$

要使上式成立,分子同次幂项的系数必须相等,比较同次幂系数得

$$\begin{cases}0=A+B+C,\\1=B+3C,\\3=-A-2B+2C.\end{cases}$$

由此解出

$$A=\frac{1}{3},\quad B=-1,\quad C=\frac{2}{3}.$$

□

例4.6.2　把真分式$\frac{1}{x(x-1)^2}$分解成最简真分式之和.

解　分母多项式只有实零点,但有重零点,故分解成

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}.$$

两端去分母后,得

$$1=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1).\tag{4.6.1}$$

这里我们用另一种方法确定系数.在(4.6.1)式中令$x=0$,得$A=1$;令$x=1$,得$B=1$.将A,B的值代入(4.6.1)式,并令$x=2$,得$1=1+2+2C$,即得$C=-1$.所以

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}.$$

□

例4.6.3　把真分式$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}$分解成最简真分式之和.

解　因分母多项式既有实零点,又有复零点,故分解式形如

$$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.\tag{4.6.2}$$

这里可以用例4.6.1中的方法确定常数A、B、C、D、E,现在介绍一种新方法确定待定系数.

(4.6.2)式两边乘$(x-1)$,令$x\to1$,得

$$A=\frac{2+2}{(1+1)^2}=1;$$

(4.6.2)式两边乘$(x^2+1)^2$,令$x\to\mathrm{i}=\sqrt{-1}$,得

$$D\mathrm{i}+E=\frac{2\mathrm{i}+2}{\mathrm{i}-1}=-2\mathrm{i}.$$

两复数相等,其实部与虚部应分别相等,即得　$D=-2,\quad E=0$;

(4.6.2)式两边乘2,令$x\to\infty$,得

$$0=1+B,\quad B=-1;$$

最后在(4.6.2)式中令 $x=0$,得

$$-2=-1+C,\quad C=-1.$$

因此
$$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+1}-\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$ □

一般来说,如果有真分式$\frac{P(x)}{Q(x)}$,分母多项式$Q(x)$在实数范围内能分解成一次因式和二次质因式的乘积

$$Q(x)=b(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_s)^{m_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{k_t}$$
$$(p_j^2-4q_j<0,j=1,2,\cdots,t)$$

则真分式$\frac{P(x)}{Q(x)}$的分解式为

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}=&\frac{A_1}{(x-a_1)^{m_1}}+\frac{A_2}{(x-a_1)^{m_1-1}}+\cdots+\frac{A_{m_1}}{x-a_1}+\cdots\\&+\frac{B_1}{(x-a_s)^{m_s}}+\frac{B_2}{(x-a_s)^{m_s-1}}+\cdots+\frac{B_{m_s}}{x-a_s}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}}\\&+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{k_1-1}}+\cdots+\frac{M_{k_1}x+N_{k_1}}{x^2+p_1x+q_1}+\cdots+\frac{R_1x+S_1}{(x^2+p_tx+q_t)^{k_t}}+\\&\frac{R_2x+S_2}{(x^2+p_tx+q_t)^{k_t-1}}+\cdots+\frac{R_{k_t}x+S_{k_t}}{x^2+p_tx+q_t},\end{aligned}\tag{4.6.3}$$

其中$A_j,\cdots,B_j,M_j,N_j,\cdots,R_j$及$S_j$等都是常数.这样,求有理函数的积分便可以归结为4种最简真分式的积分.

例4.6.4 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$.

解 因$1+x^3=(1+x)(x^2-x+1)$,故可设

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.\tag{4.6.4}$$

分解式(4.6.4)的两边乘$(1+x)$,令$x\to-1$,得$A=-\frac{1}{3}$;(4.6.4)式两边乘x,令$x\to\infty$,得$0=\frac{1}{3}+B$,$B=-\frac{1}{3}$;在(4.6.4)式中令$x=0$,得$1=\frac{1}{3}+C$,$C=\frac{2}{3}$.所以

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{3(1+x)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}.$$

于是
$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}&=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}\ln|1+x|-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}\\&=\frac{1}{3}\ln|1+x|-\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \qquad \square$$

4.6.2　三角函数有理式的积分

由三角函数和常数经过有限次加、减、乘、除运算所构成的函数，称为**三角函数有理式**.

下面通过例子说明，利用适当的换元法，可将三角函数有理式转化为一般的有理函数，从而可以把积分算出来.

例 4.6.5　求积分 $I=\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解　$I = 2\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos x}\mathrm{d}x = -2\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}(\cos x)}{1-\cos^2 x+\cos x}$　（令 $t=\cos x$）

$$= -2\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t-t^2} = \int \frac{\mathrm{d}(1+t-t^2)}{1+t-t^2} - \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t-t^2}$$

$$= \ln|1+t-t^2| + \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1-2t}{\sqrt{5}-1+2t}\right| + C$$

$$= \ln|1+\cos x-\cos^2 x| + \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1-2\cos x}{\sqrt{5}-1+2\cos x}\right| + C. \qquad \square$$

例 4.6.6　求 $I=\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

解　$I = \int \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}(\sin x)$　（令 $t=\sin x$）

$$= \int \frac{1-t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int \mathrm{d}t = 2\arctan t - t + C$$

$$= 2\arctan(\sin x) - \sin x + C. \qquad \square$$

例 4.6.7　求 $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$.

解　$I = \int \frac{1}{2\tan^2 x+3}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$　（令 $t=\tan x$）

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+3} = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(t\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\tan x\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + C. \qquad \square$$

例 4.6.8　求 $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{1+2\cos x}$.

解　这里我们介绍一种所谓“万能代换”，即令 $t=\tan\frac{x}{2}$，或 $x=2\arctan x$，则有

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

于是
$$I=\int\frac{1}{1+2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int\frac{2\mathrm{d}t}{3-t^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-t}{\sqrt{3}+t}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}+\tan\frac{x}{2}}\right|+C.\qquad\square$$

请注意,“万能”是指对所有三角函数有理式求积分时都能用,并不是指对所有三角函数有理式,采用这个变换求积分最方便.对于许多情形,要灵活运用变量代换进行积分.

习　题　4.6

(A)

1. 求下列积分:

(1)$\int\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\mathrm{d}x$;　(2)$\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^3-3x+2}$;　(3)$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x)}$;　(4)$\int\frac{2x^3+3x-2}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

2. 求下列积分:

(1)$\int\cos^4x\sin^3x\mathrm{d}x$;　(2)$\int\frac{\sin2x}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x$;　(3)$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(2x)+2\sin x}$;　(4)$\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$.

3. 求下列积分:

(1)$\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$;　(2)$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

(B)

求下列积分:

1. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$;　2. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$;　3. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}$;　4. $\int\tan^3x\mathrm{d}x$;

5. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2x\cos x}$;　6. $\int\frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x}$;　7. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$;　8. $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x$.

答案与提示

(A)

1. (1) $\ln|x-2|+\ln|x+5|+C$;　(2) $\frac{-1}{3(x-1)}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$;

(3) $\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\arctan x+C$;　(4) $x^2+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-2\arctan x+C$.

2. (1) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+C$;　(2) $-\ln(\cos^2 x+1)+C$;

(3) $\frac{1}{8}\left[\ln(1-\cos x)-\ln(1+\cos x)+\frac{2}{1+\cos x}\right]+C$,或$\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2}+C$;

(4) $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right)+C$.

3. (1) $2\sqrt{x-1}-2\arctan\sqrt{x-1}+C$;　(2) $\frac{3}{2}(\sqrt[3]{x+2}-1)^2+3\ln(1+\sqrt[3]{x+2})+C$.

(B)

1. $\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C$.
2. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C$.
3. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}\right)+C$.
4. $\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\cos x|+C$.
5. $\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\frac{1}{\sin x}+C$.
6. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)+C$.
7. $6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}\right)+C$.
8. $x-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}+1)+C$.

4.7 广义积分

我们在4.1节引进的定积分概念中,要求积分区间$[a,b]$是有界的,同时为了保证定积分存在,被积函数也必须有界.但是在许多实际问题中所出现的积分,并不具有这些好的性质.本节将研究一类所谓**广义积分**(亦称为**反常积分**),其中积分区间是无穷区间,或者被积函数是无界的.

4.7.1 无穷区间上的广义积分

我们先来看一个例子.

例4.7.1 求$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

解 因$\int_1^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_1^b=-\frac{1}{b}+1$.所以

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=1.$$

上式左端是一个定积分的极限,可以把它看成是函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$在区间$[1,+\infty)$上的积分,称为$f(x)$在无穷区间$[1,+\infty)$上的积分.这时我们可以说,曲线 $y=\frac{1}{x^2}$在区间$[1,+\infty)$上的图形具有有限的面积(见图4.14). □

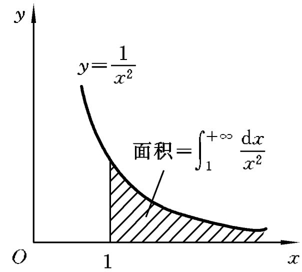


图4.14

当然,在其他例子中,当$b\to+\infty$时可能得不到有限的极限值.为此,我们引进无穷积分的概念.

定义4.7.1(**无穷积分**) 设函数$f(x)$定义在区间$[a,+\infty)$上,若$\forall b>a$积分$\int_a^b f(x)dx$存在,则称$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$为$f(x)$在**无穷区间**$[a,+\infty)$**上的积分**,简称**无穷积分**,记作

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

若极限$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$存在,则称无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$**收敛**.否则,称无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$**发散**.

类似可定义无穷积分$\int_{-\infty}^a f(x)dx$的敛散性.

定义4.7.2 设函数$f(x)$定义在区间$(-\infty,+\infty)$上,若对某个数C,无穷积分

$$\int_{-\infty}^C f(x)dx \quad 与 \quad \int_C^{+\infty}f(x)dx$$

都收敛,则称无穷积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$收敛,并记作

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^C f(x)dx+\int_C^{+\infty}f(x)dx.$$

否则称无穷积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$发散.

可以证明,上述定义不依赖于C的选取.

例4.7.2 讨论无穷积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx \tag{4.7.1}$$

的收敛性,其中p为任意实数.

解 当$p\neq1$时,

$$\int_1^b\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\Big|_1^b=\frac{1}{1-p}(b^{1-p}-1).$$

由于 $p>1$ 时，$\lim\limits_{b\to+\infty} b^{1-p}=0$ 及 $p<1$ 时，$\lim\limits_{b\to+\infty} b^{1-p}=+\infty$，所以 $p>1$ 时积分收敛，$p<1$ 时积分发散.

若 $p=1$，则

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln 1)=+\infty,$$

这时积分也发散.

总之，$p>1$ 时，积分收敛；$p\leqslant 1$ 时，积分发散. □

例4.7.3　求将质量为 m 的火箭自地面发射到离地面高度为 h 处所作的功. 火箭脱离地球引力范围所需作的功为多少？设地球半径为 R，质量为 M. 由万有引力定律，地球对质量为 m 的物体的引力为 $F=k\frac{Mm}{r^2}$，其中 k 为引力常数，r 为地球中心到物体的距离. 已知引力 F 在 $r\in[a,b]$ 上作功为 $W=\int_a^b F\,\mathrm{d}r$（见本章4.9.1变力作功）.

解　利用 $k\frac{Mm}{R^2}=mg$ 得 $k=\frac{R^2g}{M}$，其中 g 是重力加速度，$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$. 于是，将质量为 m 的火箭从 $r=R$ 发射到 $r=R+h$ 所需作的功为

$$W_h=\int_R^{R+h}k\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r=mgR^2\cdot\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right).$$

为使火箭脱离地球引力范围所需作的功为

$$W=\lim_{h\to+\infty}W_h=\lim_{h\to+\infty}\int_R^{R+h}k\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r=\lim_{h\to+\infty}mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)=mgR.$$

若记 $b=R+h$，则当 $h\to+\infty$ 时，$b\to+\infty$，故上式可以表示为

$$W=\lim_{h\to+\infty}\int_R^{R+h}k\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r=\int_R^{+\infty}k\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r=mgR.$$

顺便指出，若将物体以初速度 v_0 向上发射，它获得的动能为 $\frac{1}{2}mv_0^2$. 当这个动能超过 $W=mgR$ 时，物体才能飞离地球引力范围. 于是，由

$$\frac{1}{2}mv_0^2=mgR,$$

将 $g=9.81\ \mathrm{m/s^2}$，$R=6\,371\ \mathrm{km}=6.371\times10^6\ \mathrm{m}$ 代入上式，求得

$$v_0=11.2\ \mathrm{km/s}.$$

这就是物体从地面飞离地球引力范围所必需具有的最小初速度，称为**第二宇宙速度**. □

4.7.2　无界函数的广义积分

现在讨论另一类广义积分，其积分区间可以是有界的，但被积函数在区间中某些点附近是无界的. 先看一个例子.

例 4.7.4　求 $\lim\limits_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$.

解　因 $\int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2-2\sqrt{a}$,所以

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+}(2-2\sqrt{a}) = 2.$$

上式左端是一个定积分的极限,被积函数在 $x=0$ 附近无界,可以把它看成是无界函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在区间 $[0,1]$ 上的积分,记作

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2.$$

曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 有垂直渐近线 $x=0$,由曲线、x 轴以及直线 $x=0$,$x=1$ 所围成的区域是无界的(见图 4.15).　□

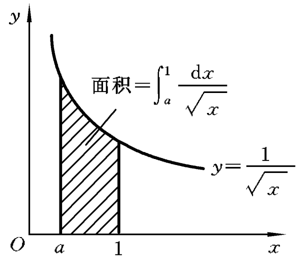


图 4.15

一般地,有下面的定义.

定义 4.7.3(无界函数的积分)　设 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上有定义,在 a 点的右邻域内无界(此时称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的**奇点**),若 $\forall\varepsilon>0$,$f(x)$ 在 $[a+\varepsilon,b]$ 上可积,则称 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$ 为**无界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的广义积分**,记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在,则称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**. 否则,称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.

当 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上定义,$x=b$ 为 $f(x)$ 的奇点,且 $\forall\varepsilon>0$,$f(x)$ 在 $[a,b-\varepsilon]$ 上可积时,我们也可以定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x,$$

若右边极限存在,则称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,否则称它发散.

定义 4.7.4　设 $f(x)$ 定义在区间 $[a,c)$ 及 $(c,b]$ 上,$x=c$ 为奇点. 若 $\forall\varepsilon>0$,$f(x)$ 在 $[a,c-\varepsilon]$ 及 $[c+\varepsilon,b]$ 上可积,则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon'\to 0^+}\int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\mathrm{d}x,$$

若右端两个极限均存在,则称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,否则称它发散.

注意,上述定义式中,右端两项中的 ε 和 ε' 是互相独立的.

例4.7.5　研究$\int_{-1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x^4}$的收敛性.

解　显然$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}=\infty$,即$x=0$是$f(x)=\frac{1}{x^4}$的奇点.将积分拆成两项:

$$\int_{-1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x^4}=\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^4}+\int_{0}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x^4},$$

由于
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x^4}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{\varepsilon^3}\right)$$

不存在,所以广义积分$\int_{0}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x^4}$发散.类似地,$\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^4}$也发散.因此原积分发散.　□

例4.7.6　讨论广义积分

$$\int_{a}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}\tag{4.7.2}$$

的收敛性,其中p为任意实数.

解　当$p\neq 1$时,

$$\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}=\frac{1}{1-p}(x-a)^{1-p}\Big|_{a+\varepsilon}^{b}=\frac{1}{1-p}[(b-a)^{1-p}-\varepsilon^{1-p}].$$

因为$p>1$时,$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{1-p}=+\infty$及$p<1$时,$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{1-p}=0$,所以$p>1$时,积分发散,$p<1$时,积分收敛.

若$p=1$,则

$$\int_{a}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x-a}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x-a}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}[\ln(b-a)-\ln\varepsilon]=+\infty,$$

这时积分也发散.

总之,$p<1$时,积分收敛;$p\geqslant 1$时,积分发散.　□

例4.7.7　研究广义积分$\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$的收敛性.

解　这个积分既是无穷积分,又是无界函数的广义积分,$x=0$是被积函数$\frac{1}{x^2}$的奇点.我们用点$x=1$将积分分成两部分:

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}+\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

由例4.7.2知$\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$收敛;由例4.7.6知$\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$发散.因此原积分发散.　□

4.7.3　Γ-函数与B-函数

(1) Γ-函数

作为广义积分的具体例子,现在简单介绍Γ-函数,它在理论及应用上都有重要意

义.这个函数定义为

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx \quad (p>0). \tag{4.7.3}$$

可以证明,这个积分在 $p>0$ 时收敛,因而函数 $\Gamma(p)$ 对 $p>0$ 有定义.

Γ-函数 $\Gamma(p)$ 有以下几个重要性质.

① **递推公式**

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p) \quad (p>0). \tag{4.7.4}$$

证 因为

$$\Gamma(p+1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p}dx=-e^{-x}x^{p}\Big|_0^{+\infty}+p\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx=p\Gamma(p),$$

其中,$-e^{x}x^{p}\Big|_0^{+\infty}$ 理解为对任意的 ε 和 b,

$$-e^{-x}x^{p}\Big|_0^{+\infty}=\lim_{b\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[-e^{-x}x^{p}\right]_\varepsilon^b=0.$$

由

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=1,$$

反复运用递推公式(4.7.4),得

$$\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1,\Gamma(3)=2\cdot\Gamma(2)=2!,\Gamma(4)=3\cdot\Gamma(2)=3!,\cdots,$$

一般,对任何正整数 n,有

$$\Gamma(n+1)=n!.$$

所以,我们可以把 Γ-函数看作阶乘的推广.

② 当 $p\to0^+$ 时,$\Gamma(p)\to+\infty$.

(证明略)

③ 在 $\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx$ 中,作代换 $x=u^2$,就有

$$\Gamma(p)=2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2p-1}du. \tag{4.7.5}$$

再令 $2p-1=t$,或 $p=\dfrac{1+t}{2}$,得

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{t}du=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+t}{2}\right) \quad (t>1). \tag{4.7.6}$$

(4.7.6)式左端是应用中常见的积分,它的值可以通过(4.7.6)式由 Γ-函数计算出来.

在(4.7.5)式中令 $p=\dfrac{1}{2}$,得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du.$$

以后我们将证明 $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$,从而

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \tag{4.7.7}$$

(2) B-函数

我们可以证明当$m>0,n>0$时广义积分$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x$收敛,于是这个积分在$m>0,n>0$的范围内定义了一个以$m$和$n$为自变量的二元函数,称为B-函数(Beta-函数),记为

$$\mathrm{B}(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x \quad (m>0,n>0).$$

B-函数是工程中应用很广的一类函数.由换元法容易验证B-函数关于m、n具有对称性,即$\mathrm{B}(m,n)=\mathrm{B}(n,m)$. B-函数与Γ-函数之间有如下关系(证明略):

$$\mathrm{B}(m,n)=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)} \quad (m>0,n>0). \tag{4.7.8}$$

例4.7.8　求$\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解　$\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$,

由公式(4.7.8)和(4.7.4)得

$$\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}=\frac{\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{2!}=\frac{\pi}{8}.$$ □

习　题　4.7

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$的收敛性是怎样定义的?

(2) 无界函数的广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$($x=a$是奇点)的收敛性是怎样定义的?

2. 用定义判别下列广义积分的敛散性.如果积分收敛,则计算广义积分的值.

(1)$\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$;　(2)$\int_1^{+\infty}\frac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x$;　(3)$\int_0^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$;

(4)$\int_{-\infty}^0\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$;　(5)$\int_\pi^{+\infty}\sin y\,\mathrm{d}y$;　(6)$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+25}$;

(7)$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$;　(8)$\int_0^4\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{16-x^2}}$;　(9)$\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}t}{t}$;

(10)$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$;　(11)$\int_0^1\frac{x^4+1}{x}\mathrm{d}x$;　(12)$\int_4^{20}\frac{1}{y^2-16}\mathrm{d}y$;

(13)$\int_0^1\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$;　(14)$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$;　(15)$\int_0^\pi\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(16) $\int_{3}^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}$; (17) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x\ln x}$; (18) $\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx$;

(19) $\int_{0}^{+\infty}e^{-ax}\sin bx dx, a>0$; (20) $\int_{0}^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$.

(B)

1. 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-x^2-x}dx=1$, 求 A.

2. 计算积分 $\int_{1/2}^{3/2}\frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

3. 求 $\int_{0}^{\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$.

4. 求 $\int_{0}^{+\infty}x^n e^{-x}dx$ (n 为自然数).

答案与提示

(A)

2. (1) $\frac{1}{2e^2}$; (2) 发散; (3) 1; (4) ln2; (5) 发散; (6) $\frac{\pi}{5}$; (7) $2^{3/4}$; (8) $\frac{\pi}{2}$;
(9) 发散; (10) 发散; (11) 发散; (12) 发散; (13) 发散; (14) 发散;
(15) $2(1-e^{-\sqrt{\pi}})$; (16) $\frac{1}{\ln 3}$; (17) 发散; (18) 1; (19) $\frac{b}{a^2+b^2}$; (20) 0.

(B)

1. $e^{-\frac{1}{4}}\pi^{-\frac{1}{2}}$.

2. $\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3})$.

3. ln2.

4. $n!$

4.8 定积分在几何上的应用

4.8.1 微元法

本章 4.1.1 中所介绍的求曲边梯形面积等两个例子,正体现了定积分定义的基本思想. 概括地说,为了计算一个连续而不均匀地分布在区间 $[a,b]$ 上的量 F,我们的方法是分割、近似、求和、取极限. 即先将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$($i=1,2,\cdots,n$),在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上"以直代曲"(或"以匀代不匀")作出 F 在小区间上的近似值 $f(\xi_i)\Delta x_i$,再把它们相加起来得到 F 在 $[a,b]$ 上的近似值 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$;最后将 $[a,b]$ 无限细分,便得到这个和式的极限,即定积分

$$F=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx.$$

但在解决具体问题时,每次都套用这四个步骤是极不方便的.我们可以采用物理学中的习惯语言,将其简化为两步:

第一步,任取一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$,求出F在这个小区间上的局部量ΔF的近似值

$$\Delta F\approx \mathrm{d}F=f(x)\mathrm{d}x \tag{4.8.1}$$

(要求$\Delta F-f(x)\mathrm{d}x$是$\mathrm{d}x$的高阶无穷小).

第二步,在$[a,b]$上将$\mathrm{d}F$“相加”,得

$$F=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.8.2}$$

$\mathrm{d}F=f(x)\mathrm{d}x$称为量$F$的**积分微元**,简称**微元**.找出微元并求其在相应区间上的积分的方法,称为**微元分析法**,简称**微元法**.在采用微元法时,必须注意以下两点:

① 所求量F关于区间必须是可加的,这是由定积分概念所决定的,在任何定积分的应用问题中都不能忽视.

② 微元法的关键是正确给出ΔF的近似表达式(4.8.1).在一般情况下,要检验$\Delta F-f(x)\mathrm{d}x$是否为$\mathrm{d}x$的高阶无穷小往往不是一件容易的事.因此对(4.8.1)式的合理性要给予足够的注意.

下面通过一些实例进一步说明微元法的运用.

4.8.2　平面图形的面积

(1) 直角坐标系下平面图形的面积

在本章4.1.1中,我们已经指出在直角坐标系下,如何用定积分求平面图形的面积,这里不再重复,只举两个例子作为复习.

例4.8.1　求由$x=0,x=1,y=\mathrm{e}^x$及$y=\mathrm{e}^{-x}$所围图形的面积(见图4.16).

解　当$0\leqslant x\leqslant 1$时,$\mathrm{e}^x\geqslant \mathrm{e}^{-x}$,因此所求面积为

$$\int_0^1(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^1=\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}-2. \qquad \square$$

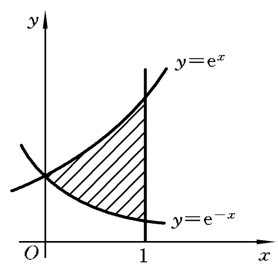


图4.16

例4.8.2　求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所围图形的面积.

解　利用对称性知,所求面积为图形在第一象限内那部分面积的4倍,即为

$$4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=4\int_0^{\pi/2}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\mathrm{d}t$$

$$=4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\mathrm{d}t=2ab\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)\mathrm{d}t=\pi ab. \qquad \square$$

(2) 极坐标系下平面图形的面积

设由曲线 $r=r(\theta)$,射线 $\theta=\alpha$ 及 $\theta=\beta$ 围成一个"曲边扇形"(见图4.17),求它的面积.假设 $\forall\theta\in[\alpha,\beta]$,有 $r(\theta)\geqslant 0$.现在我们利用微元法来解这个问题.

取极角 θ 为积分变量.在区间 $[\alpha,\beta]$ 上取出任意的一小段:$[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$,设法求出相应的窄曲边扇形面积的近似值.当 $\mathrm{d}\theta$ 很小时,我们用半径为 $r=r(\theta)$,中心角为 $\mathrm{d}\theta$ 的圆扇形面积 $\mathrm{d}S$ 近似代替相应于 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$ 的窄曲边扇形面积 ΔS(见图4.17),即得到曲边扇形的面积微元

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{2}[r(\theta)]^2\mathrm{d}\theta.$$

可以证明 $\Delta S-\mathrm{d}S=o(\Delta\theta)$(这里从略),也就是说 $\mathrm{d}S$ 是曲边扇形面积 S 的微分,因此对 θ 从 α 到 β 积分(相当于求无穷和),便得到曲边扇形的面积

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[r(\theta)]^2\mathrm{d}\theta. \tag{4.8.3}$$

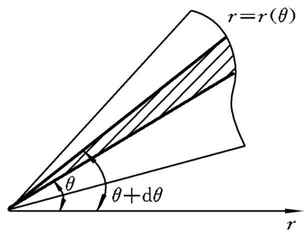


图4.17

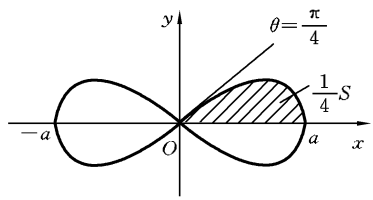


图4.18

例4.8.3 求双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 所围图形的面积(见图4.18).

解 这图形位于 $|\theta|\leqslant\frac{\pi}{4}$ 与 $|\theta|\geqslant\frac{3\pi}{4}$ 之中.由对称性,利用(4.8.3)式,其面积为

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}a^2\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=a^2.$$ □

4.8.3 由已知平面截面面积求体积

设一物体位于平面 $x=a$ 与 $x=b(a<b)$ 之间,设任意一个垂直于 x 轴的平面与此物体相交的截面积为 $A(x)$,并设 $A(x)\in C[a,b]$(见图4.19),求这个物体的体积 V.

在 $[a,b]$ 中任意取一个小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$,物体中相应的一个薄片的体积,可近似地用一个底面积为 $A(x)$、高为 $\mathrm{d}x$ 的扁柱体的体积来代替.易证物体的体积微元为

$$\mathrm{d}V=A(x)\mathrm{d}x,$$

从而所求的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x. \tag{4.8.4}$$

例4.8.4 设一立体的底面是 xy 平面上由曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 与 x 轴所围成的区域.该立体的每一个垂直于 x 轴的截面都是一个正方形,而这个正方形的底边位

于立体的底面上. 求这个立体的体积(见图4.20).

解　由于截面是正方形,其一边为$\sin x$,故截面的面积为

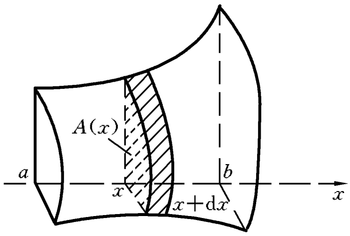


图4.19

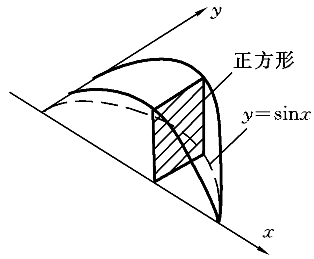


图4.20

$$A(x)=\sin^2 x,$$

于是立体的体积为

$$V=\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.\qquad\square$$

4.8.4　旋转体的体积

设有一曲边梯形,它由连续曲线$y=f(x)\geqslant 0$以及两条直线$x=a$,$x=b(a<b)$和x轴围成. 将这个曲边梯形绕x轴旋转一周,得到一个旋转体(见图4.21),求这个旋转体的体积.

由旋转体的特点知道,任何一个垂直于x轴的平面与这个立体相交的截面积为

$$A(x)=\pi y^2=\pi[f(x)]^2,$$

所以由(4.8.4)式得旋转体的体积为

$$V=\int_a^b\pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x.\tag{4.8.5}$$

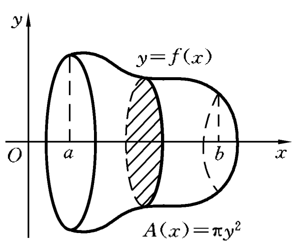


图4.21

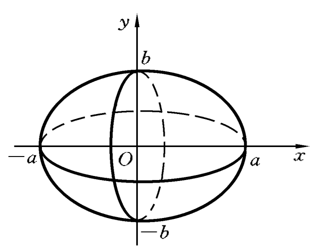


图4.22

例4.8.5　求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$分别绕$x$轴、$y$轴旋转而成的椭球的体积(见图4.22).

解 当椭圆绕 x 轴旋转时,考虑上半椭圆,其方程为

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \leqslant x \leqslant a),$$

由公式(4.8.5)知,旋转椭球体的体积为

$$V = \int_{-a}^{a} \pi\left[\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)$$

$$= \frac{\pi b^2}{a^2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

当椭圆绕 y 轴旋转时,考虑右半椭圆,其方程为

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \quad (-b \leqslant y \leqslant b).$$

与公式(4.8.5)类似,椭球的体积应为

$$V = \int_{-b}^{b} \pi\left[\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}\right]^2 \mathrm{d}y = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$ □

例4.8.6 由连续曲线 $y = f(x) \geqslant 0$,直线 $x = a$ 和 $x = b$ 以及 x 轴围成一个曲边梯形,它绕 y 轴旋转一周所产生的旋转体的体积是多少?

解 在 $[a,b]$ 上任取一小段 $[x, x + \mathrm{d}x]$,则相应的小曲边梯形绕 y 轴旋转一周所得的体积 ΔV,可近似地用一个小矩形绕 y 轴旋转所得体积来代替,这个小矩形的底边为 $\mathrm{d}x$,高为 $f(x)$(见图4.23).具体地说,就是

$$\Delta V \approx \pi[(x + \mathrm{d}x)^2 - x^2]f(x)$$

$$= 2\pi x f(x)\mathrm{d}x + \pi f(x)(\mathrm{d}x)^2$$

$$\approx 2\pi x f(x)\mathrm{d}x,$$

即体积微元为 $\mathrm{d}V = 2\pi x f(x)\mathrm{d}x$.

将 $\mathrm{d}V$ 在 $[a,b]$ 上"无限求和",即得

$$V = 2\pi\int_a^b x f(x)\mathrm{d}x. \qquad (4.8.6)$$ □

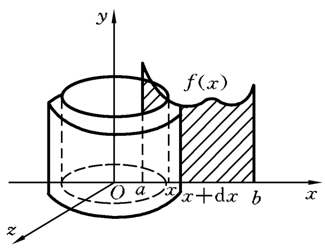


图4.23

4.8.5 光滑平面曲线[①]的弧长与曲率

(1) **弧长**

设有光滑平面曲线 $l: y = f(x)(a \leqslant x \leqslant b)$,$f(x)$ 具有一阶连续导数,求 l 的长度.仍然用微元法来分析.

在 $[a,b]$ 上任取一小段 $[x, x + \mathrm{d}x]$,这一小段所对应的一段弧的长度,可以用曲线在点 $(x, f(x))$ 处的切线上相应的一小段的长度来近似代替(见图4.24),**即弧长微元**(或**弧长微分**)

① 曲线上每一点处都有切线,且切线随切点移动而连续转动,这样的曲线称为**光滑曲线**.

$$\Delta s \approx \mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

将 $\mathrm{d}s$ 在 $[a,b]$ 上"无限求和",得弧长公式

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x. \qquad (4.8.7)$$

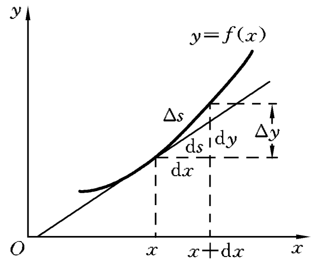


图4.24

当曲线 l 是用参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

表示时,弧长微分为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t,$$

故所求弧长为

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t \qquad (4.8.8)$$

当曲线 l 用极坐标方程

$$r = r(\theta) \quad (\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1)$$

表示时,其参数方程为

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta, \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad (\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1).$$

因此由(4.8.8)式可得 l 的弧长为

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{[r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta]^2 + [r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta]^2}\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta. \qquad (4.8.9)$$

例4.8.7　图4.25所示的是**悬链线**,其方程为

$$y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = \cosh x,$$

它描述两根电线杆之间的电线的形态.试求悬链线上从 $x = -1$ 到 $x = 1$ 之间的一段弧长.

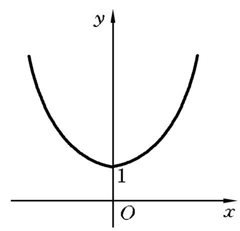


图4.25

解　因 $y' = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = \sinh x$,故弧长微分为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}\mathrm{d}x = \cosh x\mathrm{d}x.$$

利用对称性,所求弧长为

$$s = 2\int_0^1 \cosh x\mathrm{d}x = 2\sinh x\Big|_0^1 = 2\sinh 1 = \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}. \qquad \square$$

例4.8.8　求星形线(见图4.26)$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ 的弧长.

解　由对称性知,只需求它在第一象限内的一段弧长乘4即可,此时参数 t 由0到

$\frac{\pi}{2}$. 因此所求弧长为

$$\begin{aligned} s &= 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 12a\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\,\mathrm{d}t = 6a\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} = 6a. \quad \square \end{aligned}$$

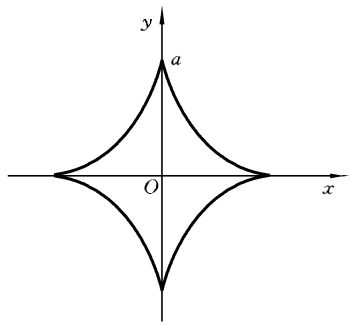


图4.26

(2) **曲率**

现在我们利用弧长引进平面曲线的曲率概念,它能反映曲线弯曲的程度.

设有光滑的平面曲线 l,其参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta). \tag{4.8.10}$$

在 l 上任取两点 M 和 M_1,令 φ 表示 l 在 M 点处的切线与正实轴的夹角,$\varphi+\Delta\varphi$ 表示 l 在 M_1 点处的切线与正实轴的夹角. 又令 Δs 表示弧长 $\widehat{MM_1}$. 则比值 $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ 刻画曲线 l 在 M 点附近弯曲的程度(见图4.27).

曲线段 $\widehat{MM_1}$ 的平均曲率定义为

$$\bar{k} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|,$$

若极限

$$k = \left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$$

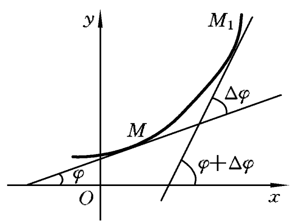


图4.27

存在,则称 k 为曲线 l 在 M 点处的**曲率**. 根据曲线的参数方程(4.8.10),可以算出

$$\tan\varphi = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad 即 \quad \varphi = \arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

故

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\left[\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right]'_t}{1+\left[\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right]^2}.$$

又

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2},$$

于是得

$$k = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta s}{\Delta t}}\right| = \left|\frac{\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}\right| = \left|\frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}\right|. \tag{4.8.11}$$

若曲线 l 由方程 $y=f(x)$ 表示,则由(4.8.11)式得

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}. \tag{4.8.12}$$

若曲线 l 由极坐标方程 $r=r(\theta)$ 表示，则

$$k = \frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}. \tag{4.8.13}$$

若光滑曲线 l 在 M 点的曲率为 k，则数

$$R = \frac{1}{k}$$

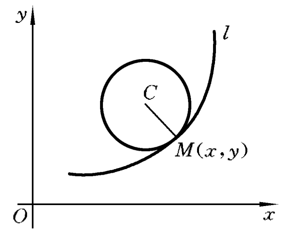


图4.28

称为 l 在 M 点的**曲率半径**. 我们在 M 点处的曲线的法线上，在凹的一侧取一点 C，使得 $CM=R$（见图4.28），以 C 点为中心、R 为半径作圆，这个圆称为曲线在点 M 处的**曲率圆**，而曲率圆的圆心 C 称为曲线在 M 点处的**曲率中心**. 于是曲率圆与曲线 l 在 M 点处有二阶接触，即相交，相切(一阶导数相等，二阶导数也相等).

例4.8.9　求抛物线 $y^2=2px$ 上任一点处的曲率.

解　$y'=\frac{p}{y}$，$y''=-\frac{p^2}{y^3}$. 代入(4.8.12)式得

$$k = \left|\frac{-p^2/y^3}{(1+p^2/y^2)^{3/2}}\right| = \frac{p^2}{(y^2+p^2)^{3/2}} = \frac{p^{1/2}}{(2x+p)^{3/2}}. \qquad \square$$

例4.8.10　设工件内表面的截线为抛物线 $y=0.4x^2$. 现在要用砂轮磨削其内表面. 问用直径多大的砂轮才比较合适(见图4.29)？

解　为了在磨削时不使砂轮与工件接触处附近的那部分工件磨去太多，砂轮的半径应小于或等于抛物线上各点处曲率半径中的最小值.

抛物线 $y=0.4x^2$ 上任一点处的曲率为

$$k = \frac{0.8}{[1+(0.8x)^2]^{3/2}} = \frac{0.8}{(1+0.64x^2)^{3/2}},$$

显然，当 $x=0$ 时，曲率 k 最大，这个最大曲率为0.8，因而求得抛物线顶点处的曲率半径

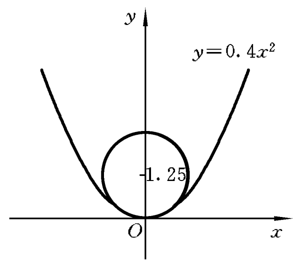


图4.29

$$R = \frac{1}{0.8} = 1.25.$$

所以选用砂轮的半径不得超过1.25单位长.

对于用砂轮磨削一般工件的内表面时，也有类似的结论，即选用的砂轮半径不应超过这工件内表面的截线上各点处曲率半径中的最小值.　$\square$

4.8.6　旋转体的侧面积

设平面光滑曲线 l 的方程为

$$y=f(x),\quad x\in[a,b].$$

并设$f(x)\geqslant 0$. 求曲线l绕x轴旋转一周所得旋转体的侧面积S.

我们仍用微元法讨论. 取$[a,b]$中的一小段$[x,x+\Delta x]$,过点x,$x+\Delta x$分别作垂直于x轴的平面,它们在旋转体的侧面截下一条狭带(见图4.30). 当Δx很小时,这个狭带的面积可用小圆台的侧面积近似代替,这个小圆台的侧面积为

$$2\pi\frac{f(x)+f(x+\Delta x)}{2}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

其中$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$. 于是

$$\Delta S\approx 2\pi\frac{f(x)+f(x+\Delta x)}{2}\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}. \tag{4.8.14}$$

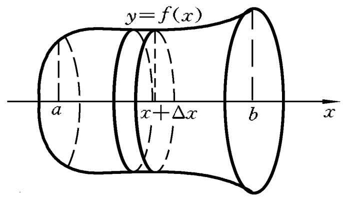


图4.30

因为$f'(x)$连续,故当Δx充分小时,有

$$\frac{f(x)+f(x+\Delta x)}{2}\approx f(x),$$

$$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x\approx\sqrt{1+[f'(x)]^2}\Delta x,$$

因此(4.8.14)式变成

$$\Delta S\approx 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\Delta x,$$

或

$$\mathrm{d}S=2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x,$$

这又可简单地看作一个圆柱片的侧面积,该圆柱的底圆半径为$f(x)$,厚为$\mathrm{d}s=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$. 积分后即得旋转体的侧面积公式

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x. \tag{4.8.15}$$

例 4.8.11　求半径为R的球的表面积.

解　问题就是求上半圆周绕x轴旋转所得曲面的面积. 由公式(4.8.15)得

$$\begin{aligned}S&=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\\&=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x=4\pi R^2.\end{aligned}$$ □

若曲线l由参数方程

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

表示,且设$x'(t)\geqslant 0$(用来保证曲线上点的x坐标单调增加)及$y(t)\geqslant 0$,则l绕x轴旋转所得旋转体的侧面积公式为

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t. \tag{4.8.16}$$

例 4.8.12　求由星形线$x=a\cos^3 t,y=a\sin^3 t$(见图4.26)绕x轴旋转所得旋转体的表面积.

解　由对称性及公式(4.8.16),得

$$S=2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2} a\sin^3 t\sqrt{(3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=12\pi a\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{12}{5}\pi a^2. \qquad \square$$

习　题　4.8

(A)

1. 求下列曲线所围图形的面积:

(1) $y=x^2$ 与 $y=2x+3$;　　(2) $y=\sqrt{x}$ 与 $y=x$;

(3) $y^2=2x$ 与 $x=5$;　　(4) $y=x$ 与 $y=x+\sin^2 x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$;

(5) $x^2+9y^2=1$;　　(6) $y^2=1+2x-x^2$ 与 $x^2+y^2=1$.

2. 求下列极坐标表示的曲线所围图形的面积:

(1) $r=2a\cos\theta$;　(2) $r=3\cos\theta$ 与 $r=1+\cos\theta$ 所围图形的公共部分.

3. 曲线 $y=(x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成一平面图形,求此平面图形绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积.

4. 求由曲线 $y=\sqrt{x}$ 及 $y=x^2$ 所围平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

5. 求曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 的一段弧的长度.

6. 求曲线 $y=\int_0^{\frac{x}{n}} n\sqrt{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$ 的全长,其中 $0\leqslant x\leqslant n\pi$, n 为正整数.

7. 求曲线(圆的渐伸线) $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $(a>0, 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的弧长.

8. 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长.

(B)

1. 当曲边梯形的曲边由参数方程 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_1)$ 给出时,曲边梯形的面积为 $S=\int_{t_0}^{t_1}\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$,其中 t_0 与 t_1 分别是对应于曲边的起点及终点的参数值. 试利用上述公式计算下列曲线所围图形的面积:

(1) $\begin{cases} x=2t-t^2,\\ y=2t^2-t^3;\end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t;\end{cases}$　(3) $\begin{cases} x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 及 $y=0$.

2. 一立体的底面为一半径为5的圆盘,其垂直于 x 轴的截面是一等边三角形. 求这个立体的体积.

3. 设平面图形 A 由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 所确定,求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

4. 求下列曲线的曲率及曲率半径:

(1) $y=\ln x$,在点(1,0);　(2) $r^2=2a^2\cos 2\theta$(双纽线);　(3) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

5. 证明抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 在顶点处的曲率半径为最小.

6. 求下面平面曲线绕指定轴旋转所得旋转体的侧面积:

(1) $y=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$, 绕 x 轴;

(2) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0\leqslant t\leqslant 2\pi$,绕直线 $y=2a$;

(3) $r=a(1+\cos\theta), 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$,绕极轴.

7. 求证:球带的面积等于球的最大圆周长与球带高的乘积.

答案与提示

(A)

1. (1) $\frac{32}{3}$; (2) $\frac{1}{6}$; (3) $\frac{20}{3}\sqrt{10}$; (4) $\frac{\pi}{2}$; (5) $\frac{\pi}{3}$; (6) $\pi-1$.

2. (1) πa^2; (2) $\frac{5\pi}{4}$.

3. $\frac{\pi}{2}$.

4. $\frac{3\pi}{10}$.

5. $\ln 3-\frac{1}{2}$.

6. $4n$.

7. $2a\pi^2$.

8. $8a$.

(B)

1. (1) $\frac{8}{15}$; (2) $\frac{3}{8}\pi a^2$; (3) $3\pi a^2$.

2. $\frac{500}{3}\sqrt{3}$.

3. $\frac{\pi^2}{2}-\frac{2\pi}{3}$.

4. (1) $k=\frac{1}{2\sqrt{2}}, R=2\sqrt{2}$; (2) $k=\frac{3r}{2a^2}, R=\frac{2a^2}{3r}$; (3) $k=\frac{1}{3a|\sin t\cos t|}, R=3a|\sin t\cos t|$.

6. (1) $2\sqrt{2}\pi+2\pi\ln(1+\sqrt{2})$; (2) $\frac{32}{3}\pi a^2$; (3) $\frac{32}{5}\pi a^2$.

4.9 定积分在物理上的应用

在17世纪,面积、体积和弧长等几何问题极大地推动了微积分的发展,而牛顿成功地把微积分应用于物理问题,则更加显示了这一新数学工具的威力.本节将介绍变力作功、重心、引力及液体的静压力等问题.

4.9.1 变力作功

由物理学知,若物体沿直线运动时受一不变的力 F 作用,且力 F 的方向与物体运动方向一致,则在物体移动了距离 s 时,力 F 对物体所作的功为

$$W=F\cdot s.$$

下面考虑F 是变力的情形.

例4.9.1　一条28 m 长、20 kg 重的均匀铁链从屋顶悬垂下来(见图4.31). 要对铁链作多少功才能把整条铁链拉到屋顶上?

解　由于20 kg 的铁链所具有的重力是

$$20\times 9.8=196\ (\mathrm{N}),$$

因此解答似乎是196 N× 28 m= 5488 J. 但是,请注意并不是整条铁链都要移动28 m,靠近屋顶的部分显然就移动得少一些.

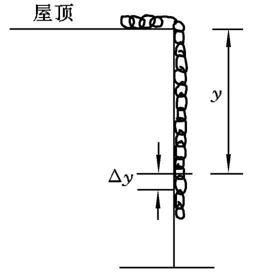


图4.31

我们在铁链上任取一小段Δy(见图4.31),则这一小段的重力是$7\Delta y\ (\mathrm{N})\left(\dfrac{196}{28}=7\right)$. 当$\Delta y$ 很小时,$y+\Delta y\approx y$,因此,把这一小段拉到屋顶上所作的功近似等于

$$7\Delta y\cdot y=7y\Delta y\ (\mathrm{J}).$$

当$\Delta y\to 0$ 时,即得到微分式

$$\mathrm{d}W=7y\mathrm{d}y$$

于是将整条铁链拉到屋顶上所作的功为

$$W=\int_0^{28}7y\mathrm{d}y=\frac{7}{2}y^2\Big|_0^{28}=2\ 744\ (\mathrm{J}).$$ □

例4.9.2　设有一容器,其顶部所在的平面与铅直轴Ox 相交于原点O. 设容器中水表面与Ox 轴相截于$x=a$,底面与Ox 轴相截于$x=b$. 如果垂直于Ox 轴的平面截容器所得的截面积为已知的$S(x)$(见图4.32),试问要把容器中的水全部抽出需作多少功?

解　如图所示,取$[a,b]$上任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的一薄层水,其高度为$\mathrm{d}x$. 由于水的密度为1 000 kg/m^3,因此若x 的单位为m,则这薄层水的重量近似等于$1\ 000S(x)\mathrm{d}x$. 于是抽出这薄层水需作的功就近似地等于

$$\mathrm{d}W=1\ 000gxS(x)\mathrm{d}x.$$

于是将容器内的水全部抽出所需作的功为

$$W=\int_a^b 1\ 000gxS(x)\mathrm{d}x.$$

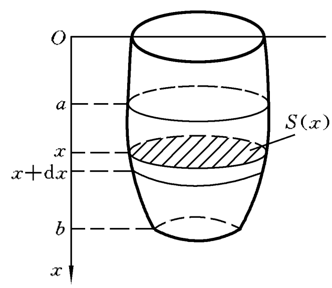


图4.32

其中g 为重力加速度. □

4.9.2　质心

假设平面上有n 个质点$P_i(x_i,y_i)$,质量分别为m_i, $i=1,2,\cdots,n$. 由物理知识可知,这个质点组的质心$(\bar{x},\bar{y})$可表示为

$$\bar{x}=\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i},\quad \bar{y}=\frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i},\tag{4.9.1}$$

其中 $\sum m_i = M$ 是质点组的总质量, $\sum m_i x_i$ 与 $\sum m_i y_i$ 分别为这个质点组对 y 轴和 x 轴的静力矩.

现在我们讨论平面曲线的质心的求法. 设平面曲线 l 的参数方程为

$$x = x(t),\quad y = y(t)\quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

其中 $x'(t)$ 与 $y'(t)$ 连续且不同时为零. 假设 l 的线密度为 $\rho(t)\in C[\alpha,\beta]$, 我们先导出曲线 l 的质量公式. 由本章 4.8.5 知, $\forall t\in[\alpha,\beta]$, 曲线段(对应 $[\alpha,t]$)的弧长为

$$s(t)=\int_{\alpha}^{t}\sqrt{[x'(\tau)]^2+[y'(\tau)]^2}\,\mathrm{d}\tau,$$

它有反函数 $t = t(s)$, s 是弧长. 在曲线 l 上任取一小段曲线 $[s, s+\mathrm{d}s]$, 当 $\mathrm{d}s$ 很小时可近似看成一个质点, 因而质量微元

$$\mathrm{d}M = \rho(t(s))\mathrm{d}s,$$

于是 l 的质量

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{s_0}\rho(t(s))\mathrm{d}s \quad (s_0\text{ 是 } l \text{ 的全长})\\ &= \int_{\alpha}^{\beta}\rho(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}\tag{4.9.2}$$

现在求曲线 l 的质心. 任取曲线的一小段 $[s, s+\mathrm{d}s]$, 则将它近似地看成一个质点时, 得关于 y 轴和 x 轴的静力矩微元

$$\mathrm{d}M_y = \rho(t(s))x(t(s))\mathrm{d}s,\quad \mathrm{d}M_x = \rho(t(s))y(t(s))\mathrm{d}s.$$

于是曲线 l 对 y 轴和 x 轴的静力矩是

$$M_y = \int_0^{s_0}\rho(t(s))x(t(s))\mathrm{d}s = \int_{\alpha}^{\beta}\rho(t)x(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$M_x = \int_{\alpha}^{\beta}\rho(t)y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

因此, 曲线 l 的质心是

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_{\alpha}^{\beta}\rho(t)x(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_{\alpha}^{\beta}\rho(t)y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t,\tag{4.9.3}$$

其中 M 由(4.9.2)式给出.

例 4.9.3 试求半径为 R 的上半圆周的质心.

解 设圆周的参数方程为

$$\begin{cases} x = R\cos t,\\ y = R\sin t, \end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant \pi.$$

由题意知, 半圆周是密度均匀的, 无妨设 $\rho = 1$. 于是由(4.9.3)式, 得

$$\bar{x}=\frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi}R\cos t\cdot R\mathrm{d}t=0,$$

$$\bar{y}=\frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi}R\sin t\cdot R\mathrm{d}t=\frac{2R}{\pi}.\qquad\square$$

现在我们再来考虑平面图形**质心**的求法.

设 $f(x)$、$g(x)\in C[a,b]$,且 $f(x)\geqslant g(x)\geqslant 0$. 设 A 是由 $y=f(x)$,$y=g(x)$,$x=a$,$x=b$ 围成的平面图形,它的质量均匀分布,不妨设面密度为1. 求 A 的质心(见图4.33).

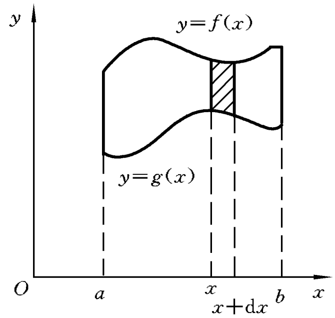


图4.33

任取 $[x,x+\mathrm{d}x]$,A 中对应的小狭条的质量为 $[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$. 当 $\mathrm{d}x$ 很小时,我们可假定这小狭条的质量全部集中在它的质心上,而小狭条又可近似地看作是一小长方形,因此小狭条的质心就是小长方形的形心,即质心到 x 轴的距离是 $\frac{1}{2}[f(x)+g(x)]$,到 y 轴的距离是 $x+\frac{\mathrm{d}x}{2}$. 于是,小狭条对 x 轴和 y 轴的静力矩分别为

$$\Delta M_y=\left(x+\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\approx x[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x,$$

$$\Delta M_x=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\approx\frac{1}{2}[f^2(x)-g^2(x)]\mathrm{d}x,$$

因此静力矩微元是

$$\mathrm{d}M_y=x[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}M_x=\frac{1}{2}[f^2(x)-g^2(x)]\mathrm{d}x.$$

于是平面图形 A 的静力矩为

$$M_y=\int_a^b x[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x,\quad M_x=\frac{1}{2}\int_a^b[f^2(x)-g^2(x)]\mathrm{d}x.$$

总质量

$$M=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.$$

因此,质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\int_a^b x[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x}{\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x},\tag{4.9.4}$$

$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b[f^2(x)-g^2(x)]\mathrm{d}x}{\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x}.\tag{4.9.5}$$

4.9.3 引力

我们在4.7的例4.7.3中曾提到引力公式,现在利用定积分来计算引力.

设有两个质点,质量分别为m_1与m_2. 根据万有引力定律可知,这两个质点之间的引力

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{4.9.6}$$

其中G是引力常数,r为这两个质点之间的距离.

如果考虑两个物体之间的引力,一般来说需要用到后面讲的重积分才能解决. 但是在某些简单情况下也可以用定积分加以解决.

例4.9.4　有一线密度为常数ρ、长度为l的细杆,有一质量为m的质点到杆右端的距离为a. 已知引力系数为G,求质点与细杆之间的引力.

解　如图4.34所示建立坐标系,将细杆放在x轴上,杆的右端放在原点O处. 我们用微元法分析一下. 在杆上任取一小段$[x, x+\mathrm{d}x]$,其质量为$\rho\mathrm{d}x$. 我们把这一小段近似地看成一个质点,并把质量全部集中在x处,则它与已知质点的距离为$a-x$. 根据引力公式(4.9.6)可知引力微元为

$$\mathrm{d}F = G\frac{m\rho\mathrm{d}x}{(a-x)^2},$$

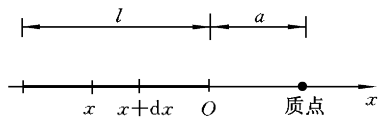


图4.34

所以细杆与质点间的引力大小为

$$F = \int_{-l}^{0}\frac{Gm\rho}{(a-x)^2}\mathrm{d}x = Gm\rho\int_{-l}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{(a-x)^2} = Gm\rho\cdot\left.\frac{1}{a-x}\right|_{-l}^{0} = \frac{Gm\rho l}{a(a+l)}.$$ □

4.9.4 液体的静压力

在设计水坝的闸门时,需要考虑水对闸门的静压力. 这类求液体的静压力问题,也可以利用定积分来解决. 基本想法是利用压强来求静压力. 所谓**压强**是指单位面积所受到的压力. 关于压强有两点应指出,即

① 在液体中任一点处,各个方向的压强都是相等的;

② 压强随深度的增加而增加(压强= 深度× 液体密度× g).

现在我们考虑一个具体的问题.

例4.9.5　一直径为6 m的圆形管道,有一道闸门,问盛水半满时,闸门所受的静压力为多少?

解　如图4.35所示建立坐标系. 由对称性,我们只需求出圆形闸门在第一象限部分所受的静压力P,则整个闸门所受的静压力就是$2P$. 由题设知,圆的方程为

$$x^2 + y^2 = 9.$$

在区间[0,3]上任取一小段[x,$x+\mathrm{d}x$].用ΔF 表示闸门从深度x 到$x+\mathrm{d}x$ 的一层(见图 4.35),则当 $\mathrm{d}x$ 很小时,ΔF 上各点的压强$\approx xg\cdot 10^3$(Pa),而 ΔF 的面积$\approx\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$ (m^2),因此ΔF 上所受到的水的静压力

$$\Delta P = \text{压强}\times\text{面积}\approx xg\sqrt{9-x^2}\cdot 10^3\mathrm{d}x\ (\mathrm{N}).$$

于是得到静压力微元

$$\mathrm{d}P = xg\sqrt{9-x^2}\cdot 10^3\mathrm{d}x,$$

从而

$$P=\int_0^3 xg\sqrt{9-x^2}\cdot 10^3\mathrm{d}x = 9\,000g\ (\mathrm{N}).$$

所以,当盛水半满时,整个闸门所受到的水的静压力为 $18\,000g$ (N). □

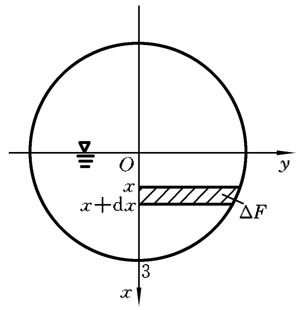


图4.35

习　题　4.9

(A)

1. 若1 kg 的力能使弹簧伸长1 cm,问要使这弹簧伸长10 cm 需作多少功?
2. 长10 m 的铁索下垂于矿井中,已知铁索重8 kg/m,问将此铁索由矿井全部提出地面,需作多少功?
3. 求曲线$y=x^2$ 与直线$y=3x$ 在区间[0,1]上所围平面图形的质心.
4. 用铁锤将一铁钉击入木板,设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比.在铁锤第一次打击时,能将铁钉击入木板内1 cm.如果铁锤每次打击所作的功相等,问铁锤击第二次能把铁钉又击入多少?
5. 高20 cm,顶部宽20 cm 的半椭圆板(见图4.36)直立于水中,上沿与水面平行,试计算它每面所受的压力.
6. 高100 cm 的铅直水闸,其形状是上底宽200 cm,下底宽100 cm 的梯形,求水闸上的压力:(1) 当水深50 cm 时;(2) 当水深100 cm 时.

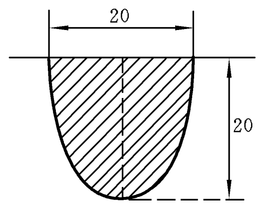


图4.36

(B)

1. 有一锥形水池,池口直径为20 m,池深15 m,池中盛满了水.求将池水全部抽到池口外所需作的功.
2. 求曲线$x=a\cos\varphi$,$y=a\sin\varphi$, $|\varphi|\leqslant\varphi\leqslant\pi$的质量(设密度为1)与质心坐标.
3. 设有质量均匀的细直杆AB,长度为l,质量为m_1.在AB 的中垂线上到杆的距离为a 处有一质量为m_2 的质点P.求细杆对P 的引力.
4. 一铅直倒立的等腰三角形水闸,底为a(m)、高为h(m),且底与水面相齐.求:

   (1) 水闸所受的压力;

   (2) 作一水平线把闸分为上、下两部分,使两部分所受压力相等.

答案与提示

(A)

1. 4.9 J.
2. 3 920 J.
3. $\left(\frac{9}{14},\frac{6}{5}\right)$.
4. $\sqrt{2}-1$ cm.
5. 26.13 N.
6. $P(50)=1\ 429$ N, $P(100)=6\ 533.3$ N.

(B)

1. 5.77×10^7 J.
2. $m=2a\varphi_0$, $\left(\frac{a\sin\varphi_0}{\varphi_0},0\right)$.
3. 将杆放在x轴上,原点位于AB的中点,P点放在$(0,-a)$处,则引力的两个分力大小为:$F_x=0$, $F_y=\frac{2km_1m_2}{a\sqrt{4a^2+l^2}}$.
4. (1)$\frac{ah^2\rho g}{6}$; (2)$y=\frac{h}{2}$.

4.10 定积分的近似计算

我们知道,通过求原函数以及微积分基本定理(牛顿-莱布尼兹公式),可以得到定积分的精确值.但是在应用中,往往并不要求精确的解答.原因是在实际问题中得到的函数往往是近似的,不是精确的,因此没有必要去求定积分的精确值,而只要求出近似值就可满足需要.另外,在一些具体问题中,求出原函数并不是一件容易的事;即使求出原函数,也往往由于它的形式过于复杂而造成计算精确值的困难.由函数的可积性,如果$f(x)$在$[a,b]$可积,则可以采用任一特殊的黎曼和式逼近它.本节将介绍定积分的几种近似计算方法.

4.10.1 矩形法

假设函数$y=f(x)\in C[a,b]$.将区间$[a,b]$ n等分,其分点为

$$x_i=a+i\frac{b-a}{n}\quad(i=0,1,\cdots,n),$$

每个小区间的长度为$\Delta x=\frac{b-a}{n}$.

在小区间$[x_{i-1},x_i]$上取ξ_i,则小区间的左端点、右端点或中点,分别为

$$x_{i-1},\quad x_i,\quad \frac{x_{i-1}+x_i}{2}=x_{i-1/2}\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

记
$$y_i=f(x_i)=f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\quad(i=0,1,\cdots,n),$$
$$y_{i-1/2}=f(x_{i-1/2})=f\left[a+\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right]\quad(i=1,2,\cdots,n).$$
则可以得到三个积分和：
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n y_i,\tag{4.10.1}$$
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n y_{i-1},\tag{4.10.2}$$
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{i=1}^n f(x_{i-1/2})\Delta x=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n y_{i-1/2},\tag{4.10.3}$$
这三个公式分别称为**右矩形公式**、**左矩形公式**以及**中矩形公式**.

从几何意义上看,这些公式都是在每一个区间$[x_{i-1},x_i]$上用矩形面积来近似代替曲边梯形的面积(见图4.37).

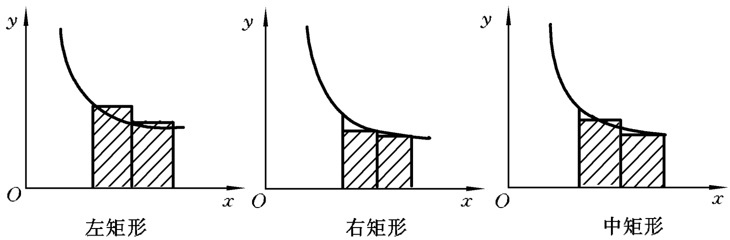


图4.37

4.10.2　梯形法

如果我们在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上用小梯形近似地代替小曲边梯形(见图4.38),就可以得到下面的**梯形公式**：
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&\approx\frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}(y_0+y_1)+\frac{1}{2}(y_1+y_2)+\cdots+\frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)\right]\\&=\frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right].\end{aligned}\tag{4.10.4}$$
实际上,这个公式可以看作右矩形公式与左矩形公式相加后除以2得到的.可以证明梯形法的误差为
$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right]\right|&\leqslant\sum_{i=1}^n\frac{(b-a)^3}{12n^3}M_2\\&=\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2,\end{aligned}$$

其中M_2是$|f''(x)|$在$[a,b]$上的最大值.

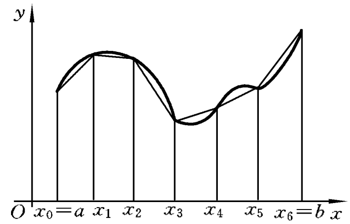


图4.38

例 4.10.1　试利用梯形公式,计算积分$\int_0^1 e^{-x^2}dx$的近似值.

解　将区间$[0,1]$十等分,分点为

$$x_i=\frac{i}{10}\quad(i=0,1,\cdots,10),$$

相应的函数值为　$y_i=e^{-x_i^2}\quad(i=0,1,\cdots,10).$

列表如下(由指数函数表可查得$e^{-x_i^2}$的值):

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_i	1.000 00	0.990 05	0.960 79	0.913 93	0.852 14	0.778 80	0.697 68	0.612 63	0.527 29	0.444 86	0.367 88

利用左矩形公式(4.10.2),得

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2}dx&\approx\frac{1}{10}\times(y_0+y_1+\cdots+y_{10})\\&=0.1\times(1+0.990\,05+0.960\,79+0.913\,93+0.852\,14+0.778\,80\\&\quad+0.697\,68+0.612\,63+0.527\,29+0.444\,86+0.367\,88)\\&=0.777\,82.\end{aligned}$$

利用梯形公式(4.10.4),得

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2}dx&\approx\frac{1}{10}\times\left(\frac{y_0+y_{10}}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_9\right)\\&=0.1\times(0.683\,94+0.990\,05+0.960\,79+0.913\,93+0.852\,14\\&\quad+0.778\,80+0.697\,68+0.612\,63+0.527\,29+0.444\,86)\\&=0.1\times7.462\,11=0.746\,21.\end{aligned}$$

□

4.10.3　抛物线法

用梯形法求定积分的近似值,在$y=f(x)$在凹曲线时,它偏小;在$y=f(x)$为凸曲线时,它则偏大.若每段改用与它凸性相接近的抛物线来近似时,就可以提高精确度.

现在我们将区间$[a,b]$作$2n$等分,分点为

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{2n}=b,\quad\Delta x=\frac{b-a}{2n}.$$

对应的函数值为

$$y_0,y_1,y_2,\cdots,y_{2n}$$

$$(y_i=f(x_i),i=0,1,\cdots,2n).$$

曲线上相应的点为

$$P_0, P_1, P_2, \cdots, P_{2n},$$

$$P_i = (x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \cdots, 2n.$$

用通过P_0、P_1、P_2 三点的抛物线(见图4.39)

$$y = px^2 + qx + r = Q_1(x)$$

来近似代替$[x_0, x_2]$上的曲线段$y = f(x)$,然后计算积分:

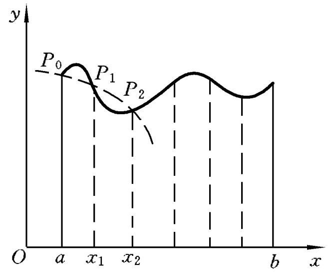


图4.39

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} Q_1(x)\mathrm{d}x &= \int_{x_0}^{x_2}(px^2 + qx + r)\mathrm{d}x \\ &= \frac{p}{3}(x_2^3 - x_0^3) + \frac{q}{2}(x_2^2 - x_0^2) + r(x_2 - x_0) \\ &= \frac{x_2 - x_0}{6}[(px_0^2 + qx_0 + r) + (px_2^2 + qx_2 + r) \\ &\quad + p(x_0 + x_2)^2 + 2q(x_0 + x_2) + 4r].\end{aligned}$$

注意到$x_1 = \dfrac{x_0 + x_2}{2}$,将它代入上式后整理得

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} Q_1(x)\mathrm{d}x &= \frac{x_2 - x_0}{6}[(px_0^2 + qx_0 + r) + 4(px_1^2 + qx_1 + r) + (px_2^2 + qx_2 + r)] \\ &= \frac{x_2 - x_0}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{b - a}{6n}(y_0 + 4y_1 + y_2).\end{aligned}$$

类似地有

$$\int_{x_2}^{x_4} Q_2(x)\mathrm{d}x = \frac{b - a}{6n}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

$$\vdots$$

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} Q_n(x)\mathrm{d}x = \frac{b - a}{6n}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

将这n个积分相加即得$f(x)$在$[a, b]$上的积分的近似值:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} Q_i(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \frac{b - a}{6n}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}).$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b - a}{6n}[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2})]. \tag{4.10.5}$$

称(4.10.5)式为**抛物线形公式**,又称为**辛卜生**(Simpson)**公式**. 用这个公式求定积分的近似值,其最大误差可以证明不超过$\dfrac{(b-a)^5}{180n^4}M_4$,其中$M_4$是$|f^{(4)}(x)|$在$[a, b]$上的最大值.

例4.10.2　利用辛卜生公式(4.10.5)计算积分$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$(取$n = 5$).

解 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \approx \dfrac{1}{6\times 5}[(y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)]$

$$= \frac{0.1}{3} \times (1.36788 + 4 \times 3.74027 + 2 \times 3.03790)$$
$$= \frac{0.1}{3} \times 22.40476 = 0.74683.$$

习　题　4.10

1. 利用中矩形公式计算积分 $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ 的近似值(取 $n=10$).
2. 利用梯形公式计算积分 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ 的近似值(取 $n=10$).
3. 利用辛卜生公式计算上题积分的近似值,取 $n=6$.

答案与提示

1. 0.692 84.
2. 0.785 0.
3. 0.785 4.

总 习 题 (4)

1. 是非题:

(1) 若 $f(x)$、$g(x) \in C[a,b]$,且 $f(x) < g(x)$,则当 $a<b$ 时,必有 $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$.

(2) 若 $f(x)$ 的某个原函数为常数,则 $f(x) \equiv 0$.

(3) 一切初等函数在其定义区间上都有原函数.

(4) 若 $f(x)$ 在某一区间内不连续,则在这个区间内 $f(x)$ 必无原函数.

(5) 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的几何意义为:介于函数 $f(x)$ 的曲线,x 轴与 $x=a$、$x=b$ 之间的曲边梯形的面积.

(6) 若 $\int_a^b f(x)dx = 0$,则在 $[a,b]$ 上必有 $f(x) \equiv 0$.

(7) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都不可积,则 $f(x)+g(x)$ 在 $[a,b]$ 上必定不可积.

(8) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,而 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积,则 $f(x)+g(x)$ 在 $[a,b]$ 上必定不可积.

(9) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内有原函数,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必定可积.

2. 求下列函数的导数:

(1) $\frac{d}{dx}\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos^2 t\,dt \quad (x>0)$;　　(2) $\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} e^{-t^2}dt$.

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan x}\,dx}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin x}\,dx}$.

4. 估计积分 $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$ 的值.

5. 已知$f(x)\in C[0,a]$，在$(0,a)$内可导，且$f'(x)<0$. 讨论$F(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^{kx}f(t)\mathrm{d}t$在$(0,a)$内的单调性，其中$k>0$为常数.

6. 求函数$y=\int_0^x(t-1)(t-2)^2\mathrm{d}t$的极值.

7. 设$f(x)\in C[0,1]$，单调减少且取正值，求证：对于满足$0<\alpha<\beta<1$的任何α,β，都有$\beta\int_0^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x>\alpha\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\mathrm{d}x$.

8. 设$f(x)$在$[0,1]$上可微，且$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x$. 试证：$\exists\xi\in(0,1)$，使$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

9. 设$f'(x)\in C[a,b]$，$f(a)=0$，求证$\left(\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x$.

10. 设$f(x)\in C[a,b]$，单调增加，求证$\int_a^bxf(x)\mathrm{d}x\geqslant\dfrac{a+b}{2}\int_a^bf(x)\mathrm{d}x$.

11. 填空题：

(1) 设e^{-x^2}是$f(x)$的一个原函数，且$f'(x)$连续，则$\int xf'(x)\mathrm{d}x=$ ________.

(2) 设$f(x)$连续，且$f(x)=x+2\int_0^1f(t)\mathrm{d}t$，则$f(x)=$ ________.

(3) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\dfrac{\sin x}{x^6+1}+\sqrt{\ln^2(1-x)}\right]\mathrm{d}x=$ ________.

(4) 设$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\end{cases}$则$\int_1^3f(x-2)\mathrm{d}x=$ ________.

(5) 设$f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$，其中$x>0$，则$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=$ ________.

12. 选择题(四个答案中只有一个是正确的)：

(1) 设$f(x)$为已知连续函数，$I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\mathrm{d}x$，其中$t>0$，$s>0$，则$I$的值(　).

(A) 依赖于s和t；　(B) 依赖于s,t,x；

(C) 依赖于t和x，不依赖于s；　(D) 依赖于s，不依赖于t.

(2) 设$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4x\mathrm{d}x$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3x+\cos^4x)\mathrm{d}x$，

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3x-\cos^4x)\mathrm{d}x$，则有(　).

(A) $N<P<M$；　(B) $M<P<N$；　(C) $N<M<P$；　(D) $P<M<N$.

(3) 设$f(x)\in C[a,b]$，且$f(x)>0$，则$\int_a^xf(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$在开区间$(a,b)$内的根有(　).

(A) 0个；　(B) 1个；　(C) 2个；　(D) 无穷多个.

(4) 下列广义积分发散的是(　).

(A) $\int_{-1}^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x}$；　(B) $\int_{-1}^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$；　(C) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$；　(D) $\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln^2x}$.

13. 计算下列积分：

(1) $\int\dfrac{x\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$；　(2) $\int\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$；　(3) $\int x\sqrt[3]{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(4) $\int \frac{x^3}{(1+x^3)^2}\mathrm{d}x$；　(5) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\sin^4 x\mathrm{d}x$；　(6) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$；

(7) $\int_{-\pi}^{5\pi}(\cos x\cos 2x\cos 4x+\sin x\sin 2x\sin 4x)\mathrm{d}x$；

(8) $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x$；　(9) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x\mathrm{d}x$；　(10) $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^2-1|}}$.

14. 证明题：

(1) 设 $f(x)\in C[a,b]$，求证 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(b+a-x)\mathrm{d}x$，并由此导出等式 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$；

(2) 设 $f''(x)>0(x\in[a,b])$，求证 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}$；

(3) 证明 $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}(x>0)$；

(4) 证明 $\int_1^a \frac{1}{x}f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\mathrm{d}x=\int_1^a \frac{1}{x}f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\mathrm{d}x$.

15. 试确定常数 A，B，使得

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^2}=\frac{A\sin x}{a+b\cos x}+B\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}(|a|\neq|b|)$；

(2) $\int_{-1}^{1}(x^3-Ax+B)^2\mathrm{d}x$ 取最小值.

16. 设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(x)>0$. 求证：$\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

17. 求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}(p\geqslant 1)$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t}{x^4}$，其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$.

18. 设 $f(x)$ 连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$（$A$ 为常数）. 求 $g'(x)$，并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

19. 设 $f(x)\in C[a,b](a<b)$，且单调增加，又设 $F(x)=\int_a^x \frac{f(t)}{x-a}\mathrm{d}t$，$x\in(a,b]$. (1) 求 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$；

(2) 证明 $F(x)$ 在 (a,b) 内单调增加.

20. 设 $f(x)$、$g(x)\in C[-a,a](a>0)$，$g(x)$ 为偶函数，$f(x)$ 满足 $f(x)+f(-x)=A$（A 为常数）.

(1) 证明 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x=A\int_0^a g(x)\mathrm{d}x$；

(2) 利用(1)的结论求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

21. 填空题：

(1) 由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(\mathrm{e}+1)-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积是______.

(2) 曲线 $y=\int_0^x \sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t\,(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 的弧长为________.

(3) 质点以速度 $t\sin t^2$ (m/s)作直线运动,则从时刻 $t_1=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ (s)到时刻 $t_2=\sqrt{\pi}$ (s)内质点所经过的路程等于________m.

(4) 岸边有一小帆船,一阵风把它沿直线方向吹出 π(m).已知帆船离岸边 x(m)时,帆上所受的风力为 $100\sin x$(N),则阵风对帆船所作的功为________.

22. 选择题(四个答案中只有一个是正确的):

(1) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为(　).

(A) $2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$;　(B) $4\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$;　(C) $2\int_0^{\pi/4}\sqrt{\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta$;　(D) $\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\cos^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta$.

(2) 曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 与直线 $y=0$ 之间位于第一象限内的平面图形绕 x 轴旋转,所产生的旋转体体积为(　).

(A) $\dfrac{1}{2}$;　(B) ∞;　(C) π;　(D) $\dfrac{\pi}{2}$.

(3) 由曲线 $y^2=2px$ 和 $x^2=2py$ 围成的图形的重心坐标为(　).

(A) $\left(0,\dfrac{9}{10}p\right)$;　(B) $\left(\dfrac{9}{10}p,\dfrac{9}{10}p\right)$;　(C) $\left(\dfrac{9}{10}p,0\right)$;　(D) (p,p).

(4) 记椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t$ 的周长为 s_1,正弦曲线 $y=\sqrt{a^2-b^2}\sin\dfrac{x}{b}$ 的一个周期上的弧长为 s_2,则(　).

(A) $s_1<s_2$;　(B) $s_1>s_2$;

(C) $s_1=s_2$;　(D) 以上答案都不正确.

(5) 平面区域 $y\leqslant\sqrt{1+x^2}$, $0\leqslant x\leqslant 1$ 绕 y 轴旋转所成旋转体的体积为(　).

(A) $\pi\int_1^{\sqrt{2}}(y^2-1)\,\mathrm{d}y$;　(B) $\sqrt{2}\pi-\pi\int_1^{\sqrt{2}}(y^2-1)\,\mathrm{d}y$;

(C) $\pi\int_0^1(1+x^2)\,\mathrm{d}x$;　(D) $\sqrt{2}\pi-\pi\int_0^1(1+x^2)\,\mathrm{d}x$.

23. 问当 a 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内取何值时,曲线 $y=\sin(x-a)\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴、y 轴及直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 所围图形的面积最小,并求此最小面积.

24. 设由 $y=\dfrac{1}{x^2}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ 所围成的曲边梯形被直线 $x=t\,(1<t<2)$ 分成 A, B 两部分,将 A, B 分别绕直线 $x=t$ 旋转,所得旋转体体积分别为 V_A 和 V_B.问 t 为何值时,V_A+V_B 最小?

25. 若曲线 $y=\cos x\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴、y 轴所围图形面积被曲线 $y=a\sin x$, $y=b\sin x\,(a>b>0)$ 三等分,试确定 a, b 的值.

26. 一抛物线的轴平行于 x 轴,开口向左,且通过原点及点(2,1).求当它与 y 轴之间的面积为最小时的抛物线方程.

27. 设有一圆柱形蓄水桶,它的底半径为 R(m),高为 H(m),其中蓄满了水.求:

(1) 将水从桶口抽出一半所作的功;

(2) 将水从桶口全部抽出所作的功;

(3) 如果原来桶中只蓄有半桶水,那么将水全部抽出所作的功是多少?

28. 某水库的水闸是下底为2 m,上底为6 m,高为10 m 的梯形. 则当水灌满时水闸所受的静压力为多少?

29. 设非负函数$y=f(x)\in C[0,+\infty)$,且$f(0)=0$. $V(t)$表示由曲线$y=f(x)$,直线$x=t(t>0)$,$y=0$所围图形绕直线$x=t$旋转而成的几何体的体积. 试证明$\dfrac{d^2V}{dt^2}=2\pi f(t)$.

30. 求由正切曲线$y=\tan x$从$x=0$到$x=\dfrac{\pi}{4}$的部分绕x轴旋转而成的曲面的面积.

答案与提示

1. (1) 是; (2) 是; (3) 是; (4) 非; (5) 非; (6) 非; (7) 非; (8) 是; (9) 非.

2. (1) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos x+\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x^2}$; (2) $2xe^{-x^4}-e^{-x^2}$.

3. 1.

4. $\dfrac{2\pi}{13}\leqslant I\leqslant\dfrac{2\pi}{7}$.

6. 有极小值$-\dfrac{17}{12}$.

7. 利用积分中值定理.

8. 利用积分中值定理和罗尔定理.

9. 注意到$f(x)=\int_a^x f'(t)dt$, 并利用柯西-许瓦兹不等式.

10. 将b换成t,用微分学的方法证明不等式.

11. (1) $-2x^2e^{-x^2}-e^{-x^2}+C$; (2) $x-1$; (3) $\dfrac{3}{2}\ln3-2\ln2$; (4) $\dfrac{7}{3}-\dfrac{1}{e}$; (5) $\dfrac{1}{2}\ln^2x$.

12. (1) (D); (2) (D); (3) (B); (4)(A).

13. (1) $-\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}+\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}+C$; (2) $2\tan\dfrac{x}{2}-x+C$;

(3) $\dfrac{1}{15}(3x^4+x^2-2)\sqrt{1+x^2}+C$;

(4) $-\dfrac{x}{3(1+x^3)}+\dfrac{1}{18}\ln\dfrac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\dfrac{\sqrt{3}}{9}\arctan\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$; (5) $\dfrac{3\pi}{16}$;

(6) $\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$; (7) 0; (8) $\dfrac{2}{3}$; (9) 发散; (10) $\dfrac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3})$.

15. (1) $A=\dfrac{b}{b^2-a^2}$,$B=\dfrac{a}{a^2-b^2}$; (2) $A=\dfrac{3}{5}$,$B=0$.

17. (1) $\dfrac{1}{p+1}$; (2) $\dfrac{1}{4}$.

18. $g'(x)=\dfrac{1}{x^2}\left[xf(x)-\int_0^x f(u)du\right]$,$g'(0)=\dfrac{A}{2}$,$g'(x)$在$x=0$处连续.

19. (1) $f(a)$.

20. (1) 利用换元法; (2) 取$f(x)=\arctan e^x$,$g(x)=|\sin x|$,$a=\dfrac{\pi}{2}$,积分$=\dfrac{\pi}{2}$.

21. (1) $\dfrac{3}{2}$; (2) 4; (3) $\dfrac{1}{2}$; (4) 200 J.

22. (1)(A)；　(2)(D)；　(3)(B)；　(4)(C)；　(5)(B).

23. $\frac{\pi}{4}, 2-\sqrt{2}$.

24. $\frac{4}{3}$.

25. $a=\frac{4}{3}, b=\frac{5}{12}$.

26. $x=6y-4y^2$(提示:设方程为$x=ay^2+by+c$).

27. (1) $\frac{1}{8}g\pi R^2H^2$(J)；　(2) $\frac{1}{2}g\pi R^2H^2$(J)；　(3) $\frac{3}{8}g\pi R^2H^2$(J).

28. $\frac{500}{3}$.

29. 提示:$V(t)=\int_0^t 2\pi(t-x)f(x)\mathrm{d}x$.

30. $\pi(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\pi\ln\frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{5}+1}$.

第 5 章　微分方程

我们在第3 章中由函数的变化率引进了导数,而在第4 章中我们又看到了如何利用定积分由导数求出原来的函数的总改变量,并且引进了原函数的概念,从导数“还原”出原来的函数. 本章我们将研究一种含有未知函数导数或微分的方程,这样的方程称为**微分方程**. 并且想从这方程中“还原”出原来的未知函数.

实际上求不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$,就是解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x).$$

不过,在这一章里我们要讨论的情况要更一般,比方说,上述方程右端的函数f 可以依赖于y,也可以依赖于x 和y. 本章将介绍微分方程的基本概念,几种常用的微分方程的解法,以及某些实际问题中的微分方程.

5.1　微分方程的基本概念

先看两个具体的例子.

例 5.1.1　一条曲线过点$(0,1)$,且其上任一点(x,y)处的切线斜率为x,求此曲线的方程.

解　设所求曲线方程为$y=y(x)$. 由导数的几何意义知,未知函数$y(x)$满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x \tag{5.1.1}$$

以及条件

$$y\big|_{x=0}=1. \tag{5.1.2}$$

容易验证函数$y=\frac{x^2}{2}+C$ 满足方程(5.1.1),其中C 是任意常数. 把条件(5.1.2)代到这个函数中去,得$C=1$. 于是所求曲线的方程为

$$y=\frac{x^2}{2}+1.$$

□

例 5.1.2　设一质量为m 的物体只受重力作用,由静止自由下落,求物体下落的距离与时间的关系.

解　如图5.1 所示建立坐标轴(x 轴),正向朝下,物体开始下落时的位置为坐标原点. 设物体在t时刻的高度为$x(t)$,物体开始下落时时间$t=0$,初速度为0.

由假设,物体下落时只受重力$F=mg$ 的作用. 根据牛顿第二定律知,物体运动的加速度应满足

$$ma = mg.$$

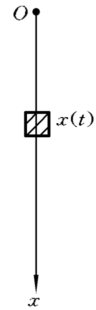


图5.1

由导数的物理意义知,速度 $v=\dfrac{dx}{dt}$,加速度 $a=\dfrac{d^2x}{dt^2}$. 于是得到关系式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g. \tag{5.1.3}$$

这就是距离函数 $x(t)$应满足的方程. 根据假设,$x(t)$还应满足两个条件:

$$x\big|_{t=0}=0,\quad v=\frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0}=0. \tag{5.1.4}$$

将方程(5.1.3)改写成$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)=g$,连续积分两次可求得

$$x=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2. \tag{5.1.5}$$

其中C_1,C_2 为任意常数. 将条件(5.1.4)代入(5.1.5)式,可求得$C_1=C_2=0$. 于是,在本题的假设之下,物体自由下落的规律为

$$x(t)=\frac{1}{2}gt^2. \qquad \square$$

我们注意到,关系式(5.1.1)和(5.1.3)都含有未知函数的导数. 一般地,含有未知函数的导数或微分的方程称为**微分方程**. 在微分方程中,未知函数的导数或微分的最高阶数称为**微分方程的阶**. 例如方程

$$\frac{dy}{dt}=1-y,\quad \frac{dy}{dt}+y=\sin t,\quad (x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy=0$$

是**一阶**微分方程,而方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}+a^2\sin t=0,\quad y''+y'^2-y=x$$

是**二阶**微分方程.

满足微分方程的函数$y=y(x)$称为**微分方程的解**. 也就是说,若将函数代入微分方程后,使方程变成恒等式,那么这个函数就是微分方程的解. 例如方程$\dfrac{dy}{dx}=y$ 有解 $y=e^x$;方程$\dfrac{d^2s}{dt^2}+s=0$ 有解$s=\cos t$ 和 $s=\sin t$.

如果微分方程的解中所含互相独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同,则称这样的解为该方程的**通解**或**一般解**. 两个任意常数互相独立,是指它们不能通过运算合并成一个. 例如,对方程$\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=0$,$y=C_1\cos t+C_2\sin t$ 是方程的通解,而 $y=(C_1+2C_2)\sin t$是方程的解,但不是通解,因为此时的两个任意常数C_1 和C_2 不是互相独立的,只要令$C=C_1+2C_2$,就合并成了一个任意常数. 微分方程解的图形称为这个方程的**积分曲线**.

为了确定通解中的任意常数,需要给出一些条件,这些条件称为**定解条件**. 定解

条件和微分方程构成**定解问题**. 满足定解问题的解称为**特解**. 像例 5.1.2 和例 5.1.1 中的那种反映运动初始状态或曲线在某一点特定状态的定解条件,称为初始条件. 初始条件和微分方程构成一类常见的且重要的定解问题——**初值问题**(或**柯西**(Cauchy)**问题**).

例如,一阶微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y), & (5.1.5) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0; & (5.1.6) \end{cases}$$

二阶微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x,y,y'), & (5.1.7) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0, y'\big|_{x=x_0} = y_0' \quad (y_0, y_0' \text{是常数}); & (5.1.8) \end{cases}$$

一阶微分方程组的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = f_i(x,y_1,\cdots,y_n) \ (i = 1,2,\cdots,n), & (5.1.9) \\ y_i\big|_{x=x_0} = y_{i0} \quad (i = 1,2,\cdots,n); & (5.1.10) \end{cases}$$

等等. 微分方程的特解是一条积分曲线,初值问题(5.1.5)、(5.1.6)的几何意义,就是求方程(5.1.5)通过(x_0, y_0)点的那条积分曲线. 而初值问题(5.1.7)、(5.1.8)的几何意义,则是求方程(5.1.7)通过(x_0, y_0)点且在该点处的切线斜率为y_0'的那条积分曲线.

例 5.1.3 验证:函数 $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ 是微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{5.1.11}$$

的解.

解 求出函数的导数:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega C_1\sin\omega t + \omega C_2\cos\omega t, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t),$$

将$\dfrac{d^2x}{dt^2}$及 x 的表达式代入方程(5.1.11),得恒等式

$$-\omega^2(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) + \omega^2(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) = 0.$$

因此,函数是微分方程(5.1.11)的解. □

例 5.1.4 证明 $y = e^{2x}$ 不是二阶微分方程$\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$ 的解.

证 直接计算得出

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \frac{d^2}{dx^2}(e^{2x}) + 4e^{2x} = 4e^{2x} + 4e^{2x} = 8e^{2x},$$

而 $8e^{2x}$ 是不恒为零的. 所以 $y = e^{2x}$ 不是解. □

习 题 5.1

(A)

1. 回答下列问题：

(1) 什么叫微分方程？

(2) 微分方程的阶如何定义？

(3) 什么叫微分方程的通解？通解中含多少个任意常数？

(4) 什么叫初值问题？什么叫微分方程的特解？

2. 证明：对任意常数P_0，函数$P(t)=P_0e^t$满足微分方程$\frac{dP}{dt}=P$.

3. 设$Q=Ce^{kt}$满足微分方程$\frac{dQ}{dt}=-0.03Q$，问C与k为何值？

4. 设$y=\cos\omega t$，求ω的值，使y满足方程$\frac{d^2y}{dt^2}+9y=0$.

5. 在下列各题中，利用所给的初始条件确定函数关系中的常数：

(1) $x^2-y^2=C$，$y\big|_{x=0}=5$；

(2) $y=e^{2x}(C_1+C_2x)$，$y\big|_{x=0}=0$，$y'\big|_{x=0}=1$；

(3) $y=C_1\sin(x-C_2)$，$y\big|_{x=\pi}=1$，$y'\big|_{x=\pi}=0$.

(B)

1. 将图5.2中各图与下面的描述对应起来：

(1) 餐桌上一杯冰水的温度.

(2) 以一定的利率存入银行50元后，钱数的变化.

(3) 匀减速行驶的汽车的速度.

(4) 在炼钢炉中加热的一块钢锭拿出炉外自然冷却时的温度变化.

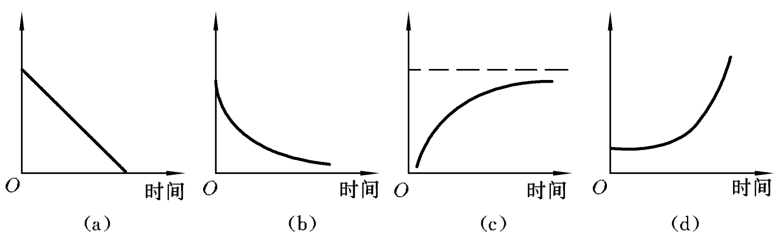


图5.2

2. 指出下列给出的函数满足哪个微分方程？

(1) $y=2\sin x$；

(2) $y=\sin 2x$；

(3) $y=e^{2x}$；

(a) $\frac{dy}{dx}=-2y$；

(b) $\frac{dy}{dx}=2y$；

(c) $\frac{d^2y}{dx^2}=-y$；

(4) $y=e^{-2x}$.　　(d) $\frac{d^2y}{dx^2}=-4y$.

3. 指出下列哪个函数是哪个微分方程的解?

(1) $y=e^x$;　　(a) $y''-y=0$;

(2) $y=x^3$;　　(b) $x^2y''+2xy'-2y=0$;

(3) $y=e^{-x}$;　　(c) $x^2y''-6y=0$.

(4) $y=x^{-2}$.

4. 曲线族常常作为微分方程的解出现. 试将下列曲线与微分方程对应起来:

(1) $y=xe^{kx}$;　　(a) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$;

(2) $y=x^p$;　　(b) $\frac{dy}{dx}=\frac{y\ln y}{x}$;

(3) $y=e^{kx}$;　　(c) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$;

(4) $y=mx$.　　(d) $\frac{dy}{dx}=\frac{y\ln y}{x\ln x}$.

5. 求抛物线族 $y=C_1(x-C_2)^2$ 的微分方程.

答案与提示

(A)

3. $k=-0.03$, C 为任意常数.

4. ± 3.

5. (1) $C=-25$;　(2) $C_1=0, C_2=1$.　(3) $C_1=1, C_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, 或 $C_1=-1, C_2=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

(B)

1. (1) (c); (2) (d); (3) (a); (4) (d).
2. (1) (c); (2) (d); (3) (b); (4) (a).
3. (1) (a); (2) (c); (3) (a); (4) (b)及(c).
4. (1) (c); (2) (d); (3) (b); (4) (a).
5. $2yy''=y'^2$.

5.2　变量可分离方程及齐次方程

本节研究两类较简单的一阶微分方程的解法.

5.2.1　变量可分离方程

如果一阶微分方程

$$y'=F(x,y) \tag{5.2.1}$$

能写成

$$g(y)dy=f(x)dx. \tag{5.2.2}$$

则方程(5.2.1)称为**变量可分离方程**,这里假设函数$f(x)$与$g(y)$连续.

设$y=\varphi(x)$是方程(5.2.1)的解,将它代入(5.2.2)式,得恒等式

$$g[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x,$$

两边积分,得

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x.$$

设$G(y)$与$F(x)$分别为$g(y)$与$f(x)$的原函数,则有

$$G(y)=F(x)+C. \tag{5.2.3}$$

因此方程(5.2.1)的解满足关系式(5.2.3).反之,若$y=\psi(x)$是由方程(5.2.3)确定的隐函数,则在$g(y)\neq 0$的条件下,$y=\psi(x)$也是方程(5.2.1)的解.这是因为如果把$y=\psi(x)$代入(5.2.3)式,就会使(5.2.3)式成为恒等式,再微分这恒等式得

$$G'[\psi(x)]\cdot\psi'(x)=F'(x)$$

即

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x.$$

因此,(5.2.3)式是方程(5.2.1)的**隐式通解**.

如果要求出满足初始条件$y|_{x=x_0}=y_0$的特解,则可由方程

$$\int_{y_0}^{y}g(y)\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x}f(x)\mathrm{d}x \tag{5.2.4}$$

确定.(5.2.4)式是将初始条件代入

$$\int_{y_0}^{y}g(y)\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x}f(x)\mathrm{d}x+C$$

而得到的.

例5.2.1 求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y} \tag{5.2.5}$$

的通解.

解 先分离变量:

$$y\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x,$$

再积分,得

$$\int y\mathrm{d}y=-\int x\mathrm{d}x,\quad \frac{1}{2}y^2=-\frac{x^2}{2}+C_1,$$

最后得通解

$$x^2+y^2=C,$$

其中$C=2C_1$为任意常数. □

例5.2.2 求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=ky. \tag{5.2.6}$$

这是一个在实际问题中经常遇到的微分方程.

解 分离变量:

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=k\mathrm{d}x,$$

积分得

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int k\mathrm{d}x,\quad \ln|y|=kx+C_1,$$

C_1 为任意常数. 于是得

$$|y| = e^{kx+C_1} = e^{kx}e^{C_1} = C_2e^{kx},$$

其中 $C_2 = e^{C_1}$ 是正的. 由此得

$$y = (\pm C_2)e^{kx} = Ce^{kx},$$

其中 $C = \pm C_2$ 是任意的非零常数. 又因为 $y = 0$ 也是微分方程(5.2.6)的解,所以也可以有 $C = 0$. 注意, $y = 0$ 这个解是我们在第一步分离变量时所失掉的一个解(因为我们用 y 去除方程(5.2.6)的两边).

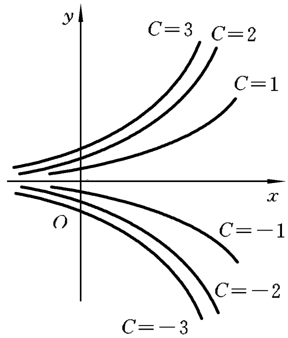


图5.3

总之,我们得到微分方程(5.2.6)的通解是

$$y = Ce^{kx},\quad C \text{ 为任意常数}.$$

因此,微分方程 $\frac{dy}{dx} = ky$ 总是反映某种指数增长(当 $k > 0$ 时)或指数衰减(当 $k < 0$ 时)的现象. 解曲线的图形如图5.3所示. □

5.2.2 齐次方程

有些微分方程,看上去并不是变量可分离方程,但是通过适当的变量代换,就可化成变量可分离方程. 这类方程的主要代表就是所谓齐次方程.

形如

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5.2.7}$$

的一阶微分方程,称为**齐次方程**,其中 g 是连续函数. 作变量代换 $u = \frac{y}{x}$,即 $y = ux$,则

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u.$$

将上式代入(5.2.7)式,便得到未知函数 u 所适合的方程

$$x\frac{du}{dx} + u = g(u),$$

亦即

$$\frac{du}{dx} = \frac{g(u) - u}{x}. \tag{5.2.8}$$

这是一个变量可分离方程. 若 $g(u) - u \neq 0$,则用分离变量法可求出隐式通解

$$\int \frac{du}{g(u) - u} = \ln|x| - \ln|C|,$$

或

$$x = C\exp\left(\int \frac{du}{g(u) - u}\right),$$

令 $\int \frac{du}{g(u) - u} = \varphi(u)$,并以 $\frac{y}{x}$ 代替 u,则上式变成

$$x = C\exp\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right). \tag{5.2.9}$$

若 $g(u)-u\equiv 0$,即 $g(y/x)\equiv \frac{y}{x}$,则方程(5.2.7)的形式为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x},$$

这已经是变量可分离方程了.若$g(u)-u$ 在某值$u=u_0$ 处为零,而在其他地方不为零,则直接看出 $u=u_0$ 是方程(5.2.8)的解,从而 $y=u_0x$ 是方程(5.2.7)的解.此时方程(5.2.7)除了由(5.2.9)式所确定的一整族解外,还有解$y=u_0x$,而后者显然不包含在由(5.2.9)式所表示的那一族解中.

例 5.2.3　求$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$的通解.

解　令 $y=ux$,代入原方程,得

$$x\frac{du}{dx}+u=u+\tan u,$$

或

$$\frac{\cos u du}{\sin u}=\frac{dx}{x},$$

积分之,得

$$\ln|\sin u|=\ln|x|+\ln|C|,$$

$$\sin u=Cx.$$

最后得通解

$$\sin\frac{y}{x}=Cx,\quad C\ 为任意常数.$$

□

例 5.2.4　求解微分方程

$$(x+y)dx-(y-x)dy=0.$$

解　不难看出,这是一个齐次方程.由变换$y=ux$,有$dy=xdu+udx$,原方程写成

$$(x+xu)dx-(ux-x)(xdu+udx)=0,$$

或

$$(1+2u-u^2)dx+x(1-u)du=0.$$

分离变量

$$\frac{(1-u)du}{1+2u-u^2}+\frac{dx}{x}=0,$$

积分之,得

$$\frac{1}{2}\ln|1+2u-u^2|+\ln|x|=\frac{1}{2}\ln|C|,$$

即

$$x^2(1+2u-u^2)=C.$$

所以通解为

$$x^2+2xy-y^2=C,\quad C\ 为任意常数.$$

□

形状为

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{5.2.10}$$

的方程,可用移动坐标原点于两直线$a_1x+b_1y+c_1=0$ 和$a_2x+b_2y+c_2=0$ 的交点(x_1,y_1)处的方法变为齐次方程.下面的例子说明具体的作法.

例 5.2.5　求解微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3}$.

解　由 $x-y+1=0$ 及 $x+y-3=0$ 求得 $x_1=1,y_1=2$,作变换 $x=X+1,y=Y+2$.则有

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y},$$

利用变量代换$Y=uX$,可得到变量可分离方程

$$u+X\frac{du}{dX}=\frac{1-u}{1+u},$$

即
$$\frac{(1+u)du}{1-2u-u^2}=\frac{dX}{X},$$

积分得
$$-\frac{1}{2}\ln|1-2u-u^2|=\ln|X|-\frac{1}{2}\ln|C|,$$

最后得通解
$$x^2-2xy-y^2+2x+6y=C.$$
□

5.2.3　增长与衰减模型

(1) **单一群体增长模型**

我们来讨论控制某些物种增长的微分方程模型.任何一个物种的群体总是按整数变化的,物种的群体总数怎么会是时间的可微函数呢?这是因为当给定的一个群体非常庞大,而且突然增加的只是单一的个体时,那么,这种变化与给定的群体规模相比是非常微小的.因此,当群体总数很大时,我们可以近似地认为群体总数是随时间连续地、甚至可微地变化的.这样我们便可以用微分方程建立物种的增长模型.

设$P(t)$表示一给定物种在时刻t的总数,$r(t,P)$表示该物种的出生率与死亡率之差.假定这个物种是孤立的,即不出现净迁出和迁入,则总数的变化率$\frac{dP}{dt}$就等于$r(t,P)P$.为简单起见,我们假设r是常数a,即它不随时间或总数而变.于是便得到下面的控制群体增长的微分方程

$$\frac{dP}{dt}=aP(t),\quad a\text{ 为常数}. \tag{5.2.11}$$

这个方程关于未知函数$P(t)$及其导数$P'(t)$都是一次的,我们称它是一阶线性方程.这个方程又称为**马尔萨斯**(Malthus)**群体总数增长律**.如果物种在t_0时刻的总数为P_0,则$P(t)$满足初值问题

$$\frac{dP}{dt}=aP(t),\quad P(t_0)=P_0. \tag{5.2.12}$$

由本章5.2.1例5.2.2知,这个初值问题的解为

$$P(t)=P_0e^{a(t-t_0)}. \tag{5.2.13}$$

所以,任何满足马尔萨斯群体增长规律的物种都随时间指数地增长.下面我们来看看这个数学模型是否与实际情况相吻合.

据估计,1961年地球上的人口总数为3.06×10^9,而在过去的十年间,人口总数以每年2%的速率增长.因此,我们有以下的数据:

$$t_0=1\,961,\quad P_0=3.06\times10^9,\quad a=0.02.$$

于是由公式(5.2.13)得

$$P(t)=3.06\times 10^{9}\cdot e^{0.02(t-1961)}. \tag{5.2.14}$$

利用已有的数据计算之后,发现这个公式估计的1780—1961年间的人口总数竟是如此惊人的准确.地球上的人口总数每35年就翻了一番,而我们的方程预测每34.6年地球的人口总数将翻一番.为证明这一点,我们注意到地球上人类人口总数在$T=t-t_0$内翻一番,其中$e^{0.02T}=2$.在这个等式两边取对数,得$0.02T=\ln 2$,故$T=50\ln 2\approx 34.6$.照此推算下去,方程预测在2510年,地球上人口总数将是2千亿,2635年1万8千亿,2670年为3万6千亿.这些都是天文数字,它们的意义是难以评价的.按照地球的总表面积来推算,到了2670年,人们只得互相踩着肩膀站成两层了.

所以,看来这个数学模型是不合理的,应该舍弃.但是,这个模型与过去的数据惊人地一致,也是我们应当考虑的.科学家们经过实验、观测和分析,发现只要群体规模不很大,这个群体增长的模型还是令人满意的.而当群体异常地庞大时,这个模型就不会很准确了.因为这个模型没有反映这样的事实,即个体成员相互间要为有限的生存空间、自然资源以及可以得到的食物而进行竞争.所以,我们必须在原有模型中加上一个竞争项.因为每单位时间两个成员发生冲突的次数的统计平均值与P^2成正比,因此这个竞争项可以选为$-bP^2$,b是一个常数.于是得到改进的模型

$$\frac{dP}{dt}=aP-bP^2, \tag{5.2.15}$$

这个方程称为群体增长的**逻辑律**,数a与b称为群体的**生命系数**.我们看到,(5.2.15)式仍是一个可分离变量的方程,它的解为

$$\int_{P_0}^{P}\frac{dx}{ax-bx^2}=\int_{t_0}^{t}ds=t-t_0.$$

经过计算,上式左端的积分

$$\begin{aligned}\int_{P_0}^{P}\frac{dx}{ax-bx^2}&=\frac{1}{a}\int_{P_0}^{P}\left(\frac{1}{x}+\frac{b}{a-bx}\right)dx\\&=\frac{1}{a}\ln\left[\frac{P}{P_0}\left|\frac{a-bP_0}{a-bP}\right|\right],\end{aligned}$$

最后得到解的表达式为

$$P(t)=\frac{aP_0}{bP_0+(a-bP_0)e^{-a(t-t_0)}}. \tag{5.2.16}$$

不难看出

$$\lim_{t\to+\infty}P(t)=\frac{aP_0}{bP_0}=\frac{a}{b},$$

这就是说,逻辑律模型对群体的预测是这样的:不论初值怎样,群体规模总是趋于极限值$\frac{a}{b}$,这个值称为**环境的承载量**.一些数学生物学家进行了某些实验,或对某国人口进行预测,发现这个模型在某些场合是适用的,但也有其缺陷.在实际问题中,往往还有许多复杂的因素需要考虑.比方说.移民、战争对人口增长的影响等等.在这里我

们就不再深入探究了.

(2) **物体冷却模型**

牛顿冷却(或加热)定律是:将温度为T的物体放入处于常温m的介质中时,T的变化速率正比于T与周围介质的温度差.

假定介质足够大,那么,当放入一个较热或较冷的物体时,m基本上不受影响,实验证明,这是相当好的近似.

现在我们来考虑一个侦破某刑事案件中的重要问题.假定某人被谋杀了,尸体的初始温度为37 ℃,并按牛顿冷却定律冷却下来.假设2小时之后尸体的温度是35 ℃,而室温为常温20 ℃.如果尸体是在下午4点钟被发现的,当时尸体的温度是30 ℃,试确定该人被谋杀的时间.

首先,我们令$H(t)$表示尸体的温度,时间t的单位是小时,从死者被谋杀时算起.牛顿冷却定律指出,对于某个常数k,

$$\text{体温的变化率} = k\times(\text{体温} - \text{室温}).$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = k(H-20).$$

比例常数k的符号如何?若温度差是正的(亦即$H>20$),则H会下降,故变化率必须为负.于是k应该是负的,所以我们将方程写成

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -k(H-20),\text{对某个 } k>0. \tag{5.2.17}$$

这是一个变量可分离方程,解之得

$$H = B\mathrm{e}^{-kt}+20,$$

将初始条件$H(0)=37$代入,可确定常数B:

$$37 = B\mathrm{e}^{0}+20,\quad B=17.$$

于是有

$$H(t) = 17\mathrm{e}^{-kt}+20.$$

为确定k,我们利用2小时后体温为35℃这个条件,得

$$35 = 17\mathrm{e}^{-k\cdot 2}+20,$$

两边取自然对数:

$$\ln\left(\frac{15}{17}\right) = \ln(\mathrm{e}^{-2k}),$$

即

$$-0.125 = -2k,\quad k\approx 0.063.$$

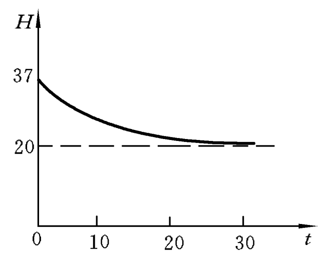


图5.4

这样便求出了尸体的温度函数

$$H(t) = 17\mathrm{e}^{-0.063t}+20. \tag{5.2.18}$$

很明显,$t\to+\infty$时,$H\to 20$,函数的图形如图5.4所示.

要求出尸体温度达到30℃时需要的时间,则将$H=30$代入解的表达式

(5.2.18),并解出 t:

$$30=17e^{-0.063t}+20 \quad 即 \quad \frac{10}{17}=e^{-0.063t},$$

取自然对数,得$-0.531=-0.063t$,于是

$$t\approx 8.4\ (小时)$$

这样,从下午4点钟往回推算,即知死者被谋杀的时间大约是上午7点36分.

习　题　5.2

(A)

1. 回答下列问题:
 (1) 变量可分离方程具有什么形状?
 (2) 什么叫齐次方程?
 (3) 用什么办法将齐次方程化为变量可分离方程?
2. 对$k>0$求微分方程$\frac{dH}{dt}=-k(H-20)$的通解,并且画出$k=1$时的解曲线(只需画出任意常数取某三个值时的解曲线).
3. 求初值问题$\frac{dP}{dt}=2P-2Pt$,$P|_{t=0}=5$的解,并画出其图形.
4. 求下列初值问题的解:
 (1) $\frac{dP}{dt}=0.02P$,$P(0)=20$;　(2) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{3}=0$,$y(0)=10$;
 (3) $\frac{dy}{dx}=2y-4$,过点(2,5);　(4) $\frac{dz}{dt}=te^{z}$,过原点;
 (5) $\frac{dy}{dx}=\frac{5y}{x}$,$y|_{x=1}=3$;　(6) $\frac{du}{dt}=u+ut^2$,$u(0)=5$;
 (7) $\frac{d\omega}{d\theta}=\theta\omega^2\sin\theta^2$,$\omega(0)=1$;　(8) $x(x+1)\frac{dy}{dx}=y^2$,$y(1)=1$.
5. 求微分方程$\frac{dy}{dt}=1-y$的通解,并求适合初始条件$y|_{t=0}=0$的特解.
6. 求下列齐次方程的通解:
 (1) $x\frac{dy}{dx}=y\ln\frac{y}{x}$;　(2) $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$;
 (3) $\frac{dy}{dx}=2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$;　(4) $(x^2+y^2)dx-xydy=0$.
7. 求下列初值问题的解:
 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$,$y|_{x=1}=2$;　(2) $(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0$,$y|_{x=1}=1$.

(B)

1. 化下列方程为齐次方程,并求出其通解:
 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x-2}{x+y+4}$;　(2) $(x-y-1)dx+(4y+x-1)dy=0$.
2. 求下列方程的通解:

(1) $\sqrt{1-y^2}=3x^2yy'$；　(2) $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x$.

3. 由曲线上任意一点引法线,它在纵轴上截得线段的长度等于该点到坐标原点的距离,求此曲线的方程.
4. 质量为1 kg 的质点受外力的作用作直线运动,该力和时间成正比,和质点运动的速度成反比. 在 $t=10$ s 时速度为5 m/s,力为4 N. 问从运动开始经过20 s 后的速度是多少?
5. 我们所使用的可耕地面积随着世界人口的增加而增加. 令 $A(t)$表示在 t 年所使用的可耕地的总公顷数(1 hm= $1\times10^4\,\mathrm{m}^2$).
   (1) 试解释为什么我们期望 $A(t)$满足微分方程 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=kA$ 是合理的? 关于世界人口你作了些什么假设? 它与可耕地面积有什么关系?
   (2) 在1950 年,约有 1×10^9 hm 的可耕地在使用,到1980 年则有 2×10^9 hm. 如果可供使用的可耕地的总公顷数为 3.2×10^9,试问,这些耕地何时被开垦并耕种完($t=0$ 指1950 年)?
6. 将一只白薯放进200 ℃的烤炉内,其加热情况服从牛顿加热(或冷却)定律.
   (1) 写出白薯的温度函数 $H(t)$所满足的微分方程;
   (2) 若白薯放进炉内时的温度是20℃,求解所得的微分方程;
   (3) 假设30 分钟后白薯的温度为120℃,试确定牛顿加热定律中的比例常数 k.
7. 放射性元素由于原子中不断放出微观粒子,它的含量不断减少,称为**衰变**. 由实验知道,放射性元素镭的衰变率与这时镭的存量成正比(比例系数为 k). 设在开始时镭的存量为 R_0 克,求任意时刻 t 的含量 $R(t)$. 经验材料断定,镭经1600 年后,只余原质量之半,试由此确定比例常数 k,并画出 $R(t)$的图形.
8. 设在某一溶液中有两种物质,在反应开始时,两种物质的量分别为 a 与 b;又设在时刻 t,两种物质已经起反应的量相等,记为 x,利用化学反应的基本定律:反应进行的速率与尚未起反应的量的乘积成正比(比例系数为 k). 求变量 x 随时间 t 的变化规律.
9. 设质量为 m 的炸弹在具有水平初速 v_0 而不具有垂直初速的情况下在空气中降落. 现在,我们不研究炸弹在水平方向的位移,而只研究炸弹在重力方向的降落. 由实验知,空气的阻力与炸弹下降的速度平方成正比:$R=\mu v^2$,求炸弹下降的速度与时间的关系.
10. 一曲线通过点(2,0),且其切点和 y 轴间的切线段有定长2,求这曲线.
11. 一曲线通过点(2,3),它在两坐标轴间的任意切线段均被切点所平分,求这曲线方程.
12. 求曲线 $y=y(x)$,使它正交于圆心在 x 轴上且过原点的任何圆(注:两曲线正交是指在交点处两曲线的切线互相垂直).
13. (**落体问题**)设跳伞运动员从跳伞塔下落后,所受空气的阻力与速度成正比,运动员离塔时的速度为零,求运动员下落过程中速度和时间的函数关系.
14. 一电动机开动后,每分钟温度升高10 ℃,同时将按冷却定律不断散发热量. 设电动机安置在一保持15 ℃恒温的房间里,求电机温度 θ 与时间 t 的函数关系.

答案与提示

(A)

2. $H=20+C\mathrm{e}^{-t}$.

3. $P=5e^{2t-t^2}$.

4. (1) $P=20e^{0.02t}$; (2) $y=10e^{-\frac{x}{3}}$; (3) $y=2+3e^{2x-4}$; (4) $z=-\ln\left|1-\dfrac{t^2}{2}\right|$;

(5) $y=3x^5$; (6) $u=5e^{t+\frac{1}{3}t^3}$; (7) $\omega=\dfrac{2}{1+\cos\theta^2}$; (8) $1-\dfrac{1}{y}=\ln\left|\dfrac{2x}{1+x}\right|$.

5. $y=1-e^{-t}$.

6. (1) $y=xe^{1+Cx}$; (2) $Cy=e^{\frac{y}{x}}$; (3) $\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\ln|x|+C$; (4) $y^2=x^2(\ln x^2+C)$.

7. (1) $y^2=x^2(\ln x^2+4)$; (2) $x^2+y^2=x+y$.

(B)

1. (1) $\arctan\dfrac{y+1}{x+3}+\dfrac{1}{2}\ln[(x+3)^2+(y+1)^2]=C$; (2) $\arctan\dfrac{2y}{x-1}+\ln[(x-1)^2+4y^2]=C$.

2. (1) $\sqrt{1-y^2}-\dfrac{1}{3x}+C=0, y=\pm 1$; (2) $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$ 或 $y=\dfrac{C}{2}x^2-\dfrac{1}{2C}, x=0$.

3. $x^2=C(2y+C)$.

4. 25 m/s.

5. (1) $A=Ce^{kt}$; (2) 约到2000年.

6. (1) $\dfrac{dH}{dt}=k(H-200)$; (2) $H=-180e^{kt}+200$; (3) $k=-0.027$.

7. $R=R_0e^{kt}$, $k=-0.000433$.

8. $x=a(1-e^{k(a-b)t})(1-\dfrac{a}{b}e^{k(a-b)t})^{-1}$.

9. $v=(e^{2kgt}-1)[k(1+e^{2kgt})]^{-1}, k=\sqrt{\dfrac{\mu}{mg}}$.

10. $y=\mp 2\ln\left|\dfrac{x+\sqrt{4-x^2}}{x}\right|\pm\sqrt{4-x^2}$.

11. $xy=6$.

12. $x^2+(y-C)^2=C^2$.

13. $v(t)=\dfrac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$.

14. $\theta(t)=15-\dfrac{10}{k}(1-e^{kt})(k<0)$.

5.3 一阶线性微分方程

未知函数及其导数都是线性(即一次方)的一阶微分方程称为**一阶线性微分方程**,其一般形状为

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x), \tag{5.3.1}$$

其中$P(x)$和$Q(x)$是某区间(a,b)上的已知连续函数.

5.3.1 线性齐次方程

若方程(5.3.1)中的$Q(x)\equiv 0$,则方程(5.3.1)变成

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0, \tag{5.3.2}$$

称方程(5.3.2)为方程(5.3.1)所对应的**线性齐次方程**. 方程(5.3.2)是变量可分离方程,分离变量后得

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

然后积分,得
$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|$$

或
$$y = Ce^{-\int P(x)dx}, \tag{5.3.3}$$

其中C是非零常数,$\int P(x)dx$表示$P(x)$的一个原函数. 显然$y\equiv 0$是方程(5.3.2)的解,但如果认为C也可以取零值的话,则$y=0$这个解也包含在表达式(5.3.3)中. 因此,线性齐次方程(5.3.2)的通解为

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{5.3.4}$$

如果附加上初始条件$y(x_0)=y_0$,则相应的特解形如

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt}.$$

5.3.2 线性非齐次方程

当$Q(x)$不恒为零时,称方程(5.3.1)为**线性非齐次方程**. 我们用所谓**常数变易法**解这个方程. 具体作法是:把方程(5.3.1)所对应的(即有相同左端的)齐次方程(5.3.2)的通解$y=Ce^{-\int P(x)dx}$中的C看作是x的函数$C(x)$,试试看让它满足非齐次方程,其实也就是作变量代换

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx},$$

其中$C(x)$是新的未知函数. 计算上式的导数,得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx},$$

并代入原非齐次方程(5.3.1),得

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

或
$$\frac{dC}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

所以
$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

最后得非齐次方程(5.3.1)的通解

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]. \tag{5.3.5}$$

如果通解公式(5.3.5)写成形式

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx,$$

则表明,线性非齐次方程(5.3.1)的通解等于对应齐次方程(5.3.2)的通解 $Ce^{-\int P(x)dx}$ 与非齐次方程的一个特解 $e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ 之和,此特解是在方程(5.3.5)中令 $C=0$ 而得到的.

我们指出,在具体的例子中,利用繁琐而又难以记忆的公式(5.3.5)是不必要的,重复上述的常数变易法得到要求的解将容易得多.

例5.3.1 求方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2$ 的通解.

解 先求对应齐次方程的通解.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln C, \quad y = Cx.$$

然后用常数变易法. 令

$$y = C(x)x,$$

则 $\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}\cdot x + C(x)$,代入原方程后,得

$$\frac{dC(x)}{dx}\cdot x = x^2, \quad 或 \quad dC(x) = x dx,$$

积分之,得
$$C(x) = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

因此通解为
$$y = C_1 x + \frac{x^3}{2}.$$ □

例5.3.2 设有一质量为 m 的质点作直线运动,从速度等于零的一瞬间开始受到一个与运动方向一致、大小与时间成正比(比例系数为 k_1)的力作用;此外,质点又受到一个与速度成正比(比例系数为 k_2)的阻力作用. 试求质点的速度的变化规律.

解 设质点运动的速度为 $v(t)$. 据假设,质点受到两个力的作用,一个是 $k_1 t$,方向与 v 一致;一个是阻力,其大小为 $k_2 v$,方向与 v 相反. 从而质点所受外力为

$$F = k_1 t - k_2 v.$$

根据牛顿第二运动定律,有

$$F = ma \quad (a 为加速度).$$

因此 $v(t)$ 应满足的方程为

$$m\frac{dv}{dt} = k_1 t - k_2 v,$$

初始条件为
$$v|_{t=0} = 0.$$

我们把方程写成如下形式:

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k_2}{m}v=\frac{k_1}{m}t.$$

先求对应齐次方程的通解,则

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k_2}{m}v=0,\quad v=Ce^{-\frac{k_2}{m}t}.$$

然后将 $v=C(t)e^{-\frac{k_2}{m}t}$ 代入非齐次方程,得

$$\frac{dC(t)}{dt}e^{-\frac{k_2}{m}t}-\frac{k_2}{m}C(t)e^{-\frac{k_2}{m}t}+\frac{k_2}{m}C(t)e^{-\frac{k_2}{m}t}=\frac{k_1}{m}t,\quad dC(t)=\frac{k_1}{m}te^{\frac{k_2}{m}t}dt.$$

两边积分,得 $C(t)=\dfrac{k_1}{m}\displaystyle\int te^{\frac{k_2}{m}t}dt=\dfrac{k_1}{m}\cdot\dfrac{m}{k_2}\displaystyle\int td\left(e^{\frac{k_2}{m}t}\right)=\dfrac{k_1}{k_2}te^{\frac{k_2}{m}t}-\dfrac{k_1}{k_2}\displaystyle\int e^{\frac{k_2}{m}t}dt$

$$=\frac{k_1}{k_2}te^{\frac{k_2}{m}t}-\frac{k_1m}{k_2^2}e^{\frac{k_2}{m}t}+C_1,$$

因此得非齐次方程的通解

$$v=\frac{k_1}{k_2}t-\frac{k_1m}{k_2^2}+C_1e^{-\frac{k_2}{m}t},$$

将初始条件 $v(0)=0$ 代入,即得 $C_1=\dfrac{k_1m}{k_2^2}$,故质点的速度对时间 t 的依赖关系为

$$v(t)=\frac{k_1}{k_2}t-\frac{k_1m}{k_2^2}\left(1-e^{-\frac{k_2}{m}t}\right).$$ □

5.3.3 伯努利方程

许多微分方程可通过变量代换化为线性方程,伯努利(Bernoulli)方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n\quad(n\neq 0,1)\tag{5.3.6}$$

就是这类方程中的一种.

将方程(5.3.6)变形为

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x),\tag{5.3.7}$$

作变量代换 $y^{1-n}=z$,则

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx},$$

将其代入(5.3.7)式,即得线性方程

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x).\tag{5.3.8}$$

例 5.3.3 解方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4}{x}y+x\sqrt{y}\quad(y>0,x\neq 0)$.

解 这是伯努利方程,$n=\dfrac{1}{2}$. 令 $z=\sqrt{y}$,则 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{2}y^{\frac{1}{2}-1}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{z}\dfrac{dy}{dx}$,故原方

程化为

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = \frac{1}{2}x,$$

直接利用通解公式(5.3.5),得

$$z = e^{\int \frac{2}{x}dx}\left(C + \int \frac{x}{2}e^{-\int \frac{2}{x}dx}dx\right) = x^2\left(C + \int \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2}dx\right) = x^2\left(C + \frac{1}{2}\ln|x|\right),$$

所以 $$y = x^4\left(C + \frac{1}{2}\ln|x|\right)^2.$$ □

最后我们给出电学中的一个微分方程模型来结束本节.

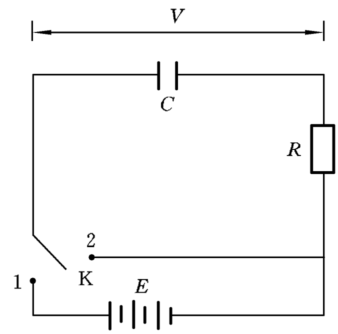


图5.5

电容器充电放电模型

如图5.5所示的RC电路,开始时电容C上没有电荷,电容两端的电压为零. 把开关K合至“1”,电池E就对电容C充电,电容C两端的电压V_C逐渐升高,经过相当时间后,电容充电完毕. 我们再把开关K合至“2”,这时电容就开始了放电过程. 求出充电和放电过程中电容C两端的电压V_C随时间t变化的规律.

解 取时间t作自变量,未知函数为电容C两端的电压$V_C(t)$. 根据闭合回路的基尔霍夫第二定律,电池的电势E等于回路中电势降之和. 题中给出的是RC电路,即有电容C两端的电压V_C与电阻R的电势降RI,其中$I=I(t)$是回路中的电流.

按基尔霍夫第二定律可列出方程

$$E = V_C + RI. \tag{5.3.9}$$

又设电容C上的电量为$Q(t)$,则

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(CV_C(t)) = C\frac{dV_C(t)}{dt}. \tag{5.3.10}$$

将(5.3.10)式代入(5.3.9)式得

$$RC\frac{dV_C}{dt} + V_C = E, \tag{5.3.11}$$

其中R、C、E都是已知常数.

方程(5.3.11)是一阶线性非齐次微分方程. 为求V_C,需给出初始条件. 由假设知,开始把K合至“1”时,也就是对C开始充电时,C的两端电压V_C应为零. 所以初始条件为

$$V_C(0) = 0. \tag{5.3.12}$$

初值问题(5.3.11)、(5.3.12)的求解我们留作习题. □

习　题　5.3

(A)

1. 回答下列问题:
   (1) 什么叫一阶线性微分方程?
   (2) 常数变易法的基本思想是什么?
   (3) 如何将伯努利方程化为线性方程?
2. 求下列微分方程的通解:
   (1) $\frac{dy}{dx}+y\tan x=\cos x$; (2) $\frac{dy}{dx}-y\cot x=2x\sin x$;
   (3) $(y^2-6x)\frac{dy}{dx}+2y=0$; (4) $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$.
3. 求下列初值问题的解:
   (1) $(x+1)y'+y=2e^{-x}, y(1)=0$; (2) $\frac{dy}{dx}-y\tan x=\sec x, y(0)=0$;
   (3) $\frac{dy}{dx}+\frac{3}{x}y=\frac{2}{x^3}, y(1)=1$; (4) $y'+\frac{y}{x}+e^x=0, y(1)=0$.
4. 设一曲线通过原点,且它在点(x,y)处的切线斜率等于$2x+y$.求这曲线方程.
5. 求解电容器充电放电模型所产生的初值问题(5.3.11)、(5.3.12).
6. 设有一个由电阻$R=10\ \Omega$、电感$L=2$ H 和电源电压$E=20\sin 5t$(V)串联组成的电路.开关K 合上后,电路中有电流通过.求电流 I 与时间 t 的函数关系.(提示:利用回路电压定律$E=RI+L\frac{dI}{dt}$.)
7. (**溶液混合问题**)一容器内盛有50 L 的盐水溶液,其中含有10 g 的盐.现将每升含2 g 盐的溶液以每分钟5 L 的速率注入容器,并不断进行搅拌,使混合液迅速达到均匀,同时混合液以每分钟3 L 的速率流出容器.问在任一时刻t容器中含盐量是多少?

(B)

1. 求微分方程的初值问题 $y'\sec^2 y+\frac{x}{1+x^2}\tan y=x, y|_{x=0}=0$ 的解.(提示:作代换 $z=\tan y$.)
2. 求下列微分方程的通解:
   (1) $xy'=y(2y\ln x-1)$; (2) $y'=x^3y^3-xy$.
3. 已知连续函数$f(x)$满足条件$f(x)=\int_0^{3x}f\left(\frac{t}{3}\right)dt+e^{2x}$,求$f(x)$.
4. 设$f(x)$连续,积分$\int_0^1[f(x)+xf(xt)]dt$与x 无关,求$f(x)$.

答案与提示

(A)

2. (1) $y=(x+C)\cos x$; (2) $(x^2+C)\sin x$; (3) $x=\frac{y^2}{2}+Cy^3$;
   (4) $y=(x+C)e^{-\sin x}$.

3. (1) $y=\frac{2}{x+1}(e^{-1}-e^{-x})$; (2) $y=\frac{x}{\cos x}$; (3) $y=\frac{2x-1}{x^3}$; (4) $\frac{1-x}{x}e^x$;
4. $y=2(e^x-x-1)$.
5. $V_C=E(1-e^{-\frac{t}{RC}})$.
6. $I=e^{-5t}+\sqrt{2}\sin(5t-\frac{\pi}{4})$ A.
7. $x=-22\,500\sqrt{2}(50+2t)^{-3/2}+2(50+2t)$.

(B)

1. $\tan y=\frac{1}{3}(1+x^2-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})$.
2. (1) $\frac{1}{y}=2(1+\ln x+Cx)$; (2) $y^{-2}=x^2+1+Ce^{x^2}$.
3. $f(x)=3e^{3x}-2e^{2x}$.
4. $f(x)=Ce^{-x}$.

5.4 可降阶的高阶方程

本节介绍几类常见的高阶(指二阶及二阶以上)微分方程,它们可以采取逐步降低方程的阶的方法,即所谓**降阶法**来求解.

5.4.1 $y^{(n)}=f(x)$型方程

假设$f(x)$在$a<x<b$上连续.将方程写成

$$\frac{d}{dx}y^{(n-1)}=f(x),$$

并进行积分,即得

$$y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1.$$

同理可得

$$y^{(n-2)}=\int\left[\int f(x)dx+C_1\right]dx+C_2.$$

如此连续积分n次,便可得到方程$y^{(n)}=f(x)$的含有n个任意常数的通解.

例5.4.1 求微分方程$y'''=xe^x$的通解.

解 对所给方程连续积分三次,得

$$y''=\int xe^x dx+C_1=xe^x-e^x+C_1,$$

$$y'=\int(xe^x-e^x+C_1)dx+C_2=xe^x-2e^x+C_1x+C_2,$$

$$y=\int(xe^x-2e^x+C_1x+C_2)dx+C_3=xe^x-3e^x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3.$$ □

5.4.2 $y''=f(x,y')$型方程

这类方程的特点是右端不显含未知函数y.我们可通过变量代换$p=y'$将方程降

为一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=f(x,p).$$

若这个方程的通解为

$$p=\varphi(x,C_1),$$

则由 $p=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,又得一个一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(x,C_1),$$

积分之,即得原方程的通解

$$y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2.$$

例5.4.2　求微分方程 $y''+2xy'^2=0$ 且满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=-\dfrac{1}{2}$ 的解.

解　令 $y'=p$,则原方程化为

$$p'+2xp^2=0,$$

分离变量后积分,得

$$\frac{-\mathrm{d}p}{p^2}=2x\mathrm{d}x,\quad \frac{1}{p}=x^2+C_1.$$

将条件 $y'(0)=-\dfrac{1}{2}$ 代入,得 $C_1=-2$,故有

$$y'=\frac{1}{x^2-2}.$$

再积分,得

$$y=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2}+C_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C_2,$$

将条件 $y(0)=1$ 代入,得 $C_2=1$,故所求特解为

$$y=1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|\quad(|x|\neq\sqrt{2}).$$

□

5.4.3　$y''=f(y,y')$ 型方程

这种方程的右端不显含自变量 x,用代换 $y'=p$ 可将方程降低一阶. 这时我们将 p 看作 y 的新的未知函数 $p=p(y)$. 因此,导数 y'' 应当用新未知函数 $p(y)$ 对 y 的导数来表示,即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p,\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}.$$

于是方程 $y''=f(y,y')$ 变成一阶方程

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p).$$

若它的通解为
$$p=y'=\varphi(y,C_1),$$
则分离变量后积分,得通解
$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2.$$

例 5.4.3　求解微分方程 $yy''-y'^2=0$.

解　令 $y'=p$,则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 原方程化为
$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2=0.$$
若 $y\neq0,p\neq0$,则可约去 p 并分离变量,得
$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}y}{y},$$
积分之,得
$$\ln|p|=\ln|y|+\ln|C_1|,$$
于是
$$p=C_1y,\quad 即\quad y'=C_1y.$$
再分离变量并积分,即得所求通解
$$\ln|y|=C_1x+\ln|C_2|,\quad 或\quad y=C_2e^{C_1x},$$
其中 C_1,C_2 是任意常数. □

在本节末尾,我们给出几个可用降阶法求解的实际问题.

例 5.4.4　质量为 m 的质点受力 F 的作用沿 x 轴作直线运动. 设力 F 仅是时间 t 的函数,即 $F=F(t)$. 在开始时刻 $t=0$ 时,$F(0)=F_0$,随着时间 t 的增大,此力 F 均匀地减小,直到 $t=T$ 时,$F(T)=0$. 如果开始时质点位于原点,且初速为零,求这质点的运动规律.

解　令 $x=x(t)$ 表示质点在时刻 t 的位置. 根据牛顿第二定律,质点运动的微分方程为
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F(t).\tag{5.4.1}$$
由题设知,力 $F(t)$ 随 t 增加而均匀地减小,即 $F(t)$ 的变化率为常数,故 $F(t)$ 应为线性函数
$$F(t)=a+kt.$$
由条件 $F(0)=F_0$ 及 $F(T)=0$ 可确定 $a=F_0,k=-\frac{F_0}{T}$,所以
$$F(t)=F_0\left(1-\frac{t}{T}\right).$$
于是方程(5.4.1)可以写成
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{F_0}{m}\left(1-\frac{t}{T}\right),\tag{5.4.2}$$
初始条件为
$$x(0)=0,\quad x'(0)=0.\tag{5.4.3}$$

方程(5.4.2)是第一种类型的可降阶方程,连续积分两次,并利用初始条件,可求得质点的运动规律为

$$x = \frac{F_0}{m}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6T}\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad \square$$

例 5.4.5(追线问题) 位于坐标原点的我舰向位于 x 轴上点 $A(1,0)$ 处的敌舰发射制导鱼雷,使鱼雷永远对准敌舰. 设敌舰以最大速度 v_0 沿平行于 y 轴的直线行驶,又设鱼雷速度的大小是 $5v_0$. 试求鱼雷的轨迹曲线(追线)方程.

解 设在时刻 t,鱼雷航迹上点 P 的坐标为 (x,y),而敌舰在航线上点 Q 处,点 Q 的坐标设为 $(1,Y)$(见图5.6),则 $Y = v_0 t$, $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = v_0$. 鱼雷的速度可按坐标轴方向分解,故有

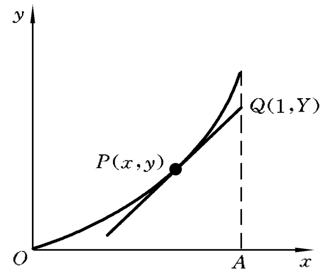


图5.6

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(5\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\right)^2,$$

或
$$\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = 5\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}.$$

又由图5.6知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{Y - y}{1 - x},$$

上式两边对 x 求导,得

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = (1 - x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},$$

于是可推得
$$\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = 5(1 - x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$$

或
$$\sqrt{1 + y'^2} = 5(1 - x)y''. \tag{5.4.4}$$

根据题设, $t = 0$ 时, $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$. 故初始条件为

$$y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 0. \tag{5.4.5}$$

方程(5.4.4)是第二种类型的可降阶方程,令 $y' = p$,则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$,(5.4.4)式可化为一阶方程

$$\sqrt{1 + p^2} = 5(1 - x)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{1}{5}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1 - x} = \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1 + p^2}},$$

两边积分,得
$$-\frac{1}{5}\ln|1 - x| = \ln\left|p + \sqrt{1 + p^2}\right| + \ln|C_1|,$$

即
$$(1 - x)^{-\frac{1}{5}} = C_1\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right).$$

由 $y'\big|_{x=0} = 0$ 可确定 $C_1 = 1$,故有

$$(1 - x)^{-\frac{1}{5}} = p + \sqrt{1 + p^2}.$$

由此解出 $$y' = p = \frac{1}{2}\left[(1-x)^{-\frac{1}{5}} - (1-x)^{\frac{1}{5}}\right],$$

再积分,得 $$y = \frac{1}{2}\left[\frac{5}{6}(1-x)^{6/5} - \frac{5}{4}(1-x)^{4/5}\right] + C_2,$$

由 $y|_{x=0}=0$ 可确定 $C_2=\frac{5}{24}$. 所以鱼雷的轨迹曲线方程为

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{5}{6}(1-x)^{6/5} - \frac{5}{4}(1-x)^{4/5}\right] + \frac{5}{24}. \tag{5.4.6}$$ □

例 5.4.6　在上半平面求一条(下)凸曲线,其上任一点 $P(x,y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数(Q 是法线与 x 轴的交点),且曲线在点(1,1)处的切线与 x 轴平行.

解　这是一个几何应用题. 设所求曲线为 $y=y(x)$. 因为它在点 $P(x,y)$ 处的法线方程为

$$Y - y(x) = -\frac{1}{y'(x)}(X - x)\ (y' \neq 0),$$

所以法线与 x 轴的交点为 $Q(x+yy',0)$. 于是

$$|PQ| = \sqrt{(yy')^2 + y^2} = y\sqrt{1+y'^2}\ (y>0).$$

根据题设,$y(x)$ 应满足方程

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}} \tag{5.4.7}$$

(因曲线下凸,故 $y''>0$),初始条件为

$$y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0.$$

将(5.4.7)改写成

$$yy'' = 1 + y'^2, \tag{5.4.8}$$

这是第三种类型的可降阶方程. 令 $y'=p$,则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,代入方程(5.4.8),得

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 1 + p^2,\quad \frac{p\,\mathrm{d}p}{1+p^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y},$$

两边积分,并利用条件 $y'|_{x=1}=0$,得

$$y = \sqrt{1+p^2},$$

即 $$y' = \pm\sqrt{y^2-1},\quad \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}} = \pm\,\mathrm{d}x,$$

两边积分,并利用条件 $y|_{x=1}=1$,得

$$\ln(y+\sqrt{y^2-1}) = \pm(x-1).$$

因此所求曲线为 $$y + \sqrt{y^2-1} = \mathrm{e}^{\pm(x-1)},$$

化简整理得 $$y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x-1} + \mathrm{e}^{-(x-1)}).$$ □

习　题　5.4

(A)

1. 求下列各微分方程的通解:

(1) $y''=x+\cos x$　　(2) $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$　　(3) $y''-y'=x$

(4) $y''+y'^2=1$　　(5) $yy''+y'^2=0$　　(6) $y''=y'^3+y'$.

2. 求解下列初值问题:

(1) $y^3y''+1=0, y(1)=1, y'(1)=0$.　　(2) $y'''=e^{2x}, y(1)=y'(1)=y''(1)=0$.

(3) $y''=3\sqrt{y}, y(0)=1, y'(0)=2$.　　(4) $y''-e^{2y}=0, y(0)=0, y'(0)=1$.

(5) $yy''=2(y'^2-y'), y(0)=1, y'(0)=2$.　　(6) $y''=\dfrac{3x^2}{1+x^3}y', y(0)=1, y'(0)=4$.

3. 求方程$yy''+y'^2=1$经过点$(0,1)$且在这一点与直线$x+y=1$相切的积分曲线.

4. 求方程$xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x}$的通解.

5. 求方程$y''(1+y^2)=2yy'^2$的通解.

(B)

1. 设物体A从点$(0,1)$出发,以速度大小为常数v沿y轴正向运动.物体B从点$(-1,0)$与A同时出发,其速度大小为$2v$,方向始终指向A.求物体B的运动微分方程及初始条件.

2. 设第一象限内的曲线$y=y(x)$对应于$0\leqslant x\leqslant a$一段的长等于曲边梯形$D=\{0\leqslant y\leqslant y(x), 0\leqslant x\leqslant a\}$的面积,其中$a>0$是任意给定的,$y(0)=1$,求$y(x)$.

3. 一条均匀柔软不可拉伸的细弦,两端悬起,当载荷沿弧均匀分布时,求弦的平衡状态时的形状.

4. 一物体只受地球引力作用,自无穷高处落下,求这个物体落向地面的速度.

5. 重量为300 kg的摩托艇以66 m/s的初速度直线前进,如果水的阻力与速度成正比,且当速度为1 m/s时,阻力为10 kg.问经过多少时间艇的速度降为8 m/s?

答案与提示

(A)

1. (1) $y=\dfrac{x^3}{6}-\cos x+C_1x+C_2$;　(2) $y=x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$;

(3) $y=C_1e^x-\dfrac{x^2}{2}-x+C_2$;　(4) $y=\pm(x+\ln|1-Ce^{2x}|)+C_1$;

(5) $y^2=C_1x+C_2$;　(6) $y=\arcsin(Ce^x)+C_1$.

2. (1) $y=\sqrt{2x-x^2}$;　(2) $y=\dfrac{1}{8}e^{2x}+\dfrac{e^2}{4}x^2-\dfrac{e^2}{4}x-\dfrac{e^2}{8}$;　(3) $y=\left(\dfrac{x}{2}+1\right)^4$;

(4) $x=1-e^{-y}$;　(5) $y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$;　(6) $y=x^4+4x+1$.

3. $y=-x+1$.

4. $y=\dfrac{1}{C_1}e^{C_1x+1}\left(x-\dfrac{1}{C_1}\right)+C_2$.

5. $y=\tan(C_1x+C_2)$.

(B)

1. $x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=0 \quad y(-1)=0, y'(-1)=1$.
2. $y=\operatorname{ch}x$.
3. $y=\frac{H}{gq}\operatorname{ch}\left[\frac{gq(x-C_1)}{H}\right]+C_2$.
4. $v=\sqrt{2Rg}$.
5. 约6.45 s.

5.5 二阶微分方程

5.5.1 振动与二阶微分方程

振动这种运动形式在日常生活与工程技术中随处可见,例如,汽车减震器中弹簧的振动,机床主轴的振动,电路中的电磁振荡,有荷载的横梁的振动等等.本节将导出描述具有小振幅的质点振动的二阶线性微分方程模型.

(1) **线性振动**

设有一质量为m的小物体,连接在长度为l的弹簧上,弹簧则悬挂在刚性水平支架上(见图5.7).由力学知道,弹簧使物体回到平衡位置的弹性恢复力f(它不包括在平衡位置时和重力mg相平衡的那一部分弹性力)与物体离开平衡位置的位移y成正比,即

$$f=-ky,$$

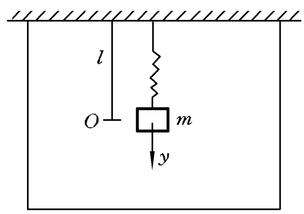


图5.7

其中k为弹簧的弹性系数,负号表示弹性恢复力的方向和物体位移的方向相反.此外,物体和弹簧可以沉浸在介质(例如油)里,介质阻碍物体在其中运动.工程人员通常把这种系统称为弹簧-质量-阻尼系统,或者称为地震仪.因为这种系统同用来探测地球表面运动的地震仪在原理上是一样的.

弹簧-质量-阻尼系统有很多应用.例如,汽车上的减震器就是一个简单的弹簧-质量-阻尼系统.又如,重炮的炮床也是装在这种系统上,以尽量减小重炮的反冲影响.

现在我们来建立在外力的作用下,物体m运动的微分方程.

物体的平衡位置是物体不受外力而静止悬挂时所处的位置.当平衡时,物体的重量mg正好与弹簧的恢复力相平衡.因此,在物体的平衡位置,弹簧被拉伸的距离为Δl时,就有

$$k\Delta l=mg.$$

我们用 $y=0$ 表示这个平衡位置,并且把向下的方向取为正向.

设 $y(t)$ 表示物体在时刻 t 的位置. 为了求出 $y(t)$,必须计算作用在物体 m 上的总力. 这个总力是四个分力 W、R、D 和 F 之和. 下面分别计算.

① 力 $W=mg$ 是物体的重量,拉物体向下,这个力是正的,因为向下的方向是 y 的正方向.

② 力 R 是弹簧的恢复力,它与弹簧的拉伸或压缩量 $\Delta l+y$ 成正比. 力 R 的作用总是使弹簧恢复到它的自然长度. 若 $\Delta l+y>0$,则 R 是负的,于是 $R=-k(\Delta l+y)$;若 $\Delta l+y<0$,则 R 是正的,于是 $R=-k(\Delta l+y)$. 在两种情形下,都有

$$R=-k(\Delta l+y).$$

③ 力 D 是介质作用在物体 m 上的阻尼或阻力,这个力作用的方向总是与运动的方向相反,并且通常与速度 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 的大小成正比. 因此

$$D=-C\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

④ 力 F 是作用在物体上的外力,F 若向上则为负,若向下则为正. 一般来说,外力 F 明显地依赖于 t.

根据牛顿第二运动定律,有

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} &= W+R+D+F=mg-k(\Delta l+y)-C\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+F(t) \\ &= -ky-C\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+F(t), \end{aligned}$$

这里用到 $mg=k\Delta l$. 因此,物体的位置 $y(t)$ 满足二阶线性微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+C\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+ky=F(t). \tag{5.5.1}$$

我们说这个方程是二阶的,是因为方程中所出现的最高阶导数为二阶导数;说它是线性的,是因为方程中的未知函数及其导数都是一次(线性)的.

(2) **自由振动**

对于无阻尼自由振动的情形,方程(5.5.1)中的阻尼项 $C\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 以及强迫力 $F(t)$ 均恒为零,这时,方程(5.5.1)简化为

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+ky=0,$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2y=0, \tag{5.5.2}$$

其中 $\omega_0^2=\frac{k}{m}$.

(3) **阻尼自由振动**

当考虑阻尼的影响,而没有外力作用时,物体运动的微分方程是

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{dy}{dt}+ky=0. \tag{5.5.3}$$

(4) **阻尼强迫振动**

如果考虑外力 $F(t)=F_0\cos\omega t$,

则物体运动的微分方程是

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{dy}{dt}+ky=F_0\cos\omega t. \tag{5.5.4}$$

(5) **无阻尼强迫振动**

若去掉系统中的阻尼,外力项是周期的并具有形式$F(t)=F_0\cos\omega t$,则物体的运动微分方程形如

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega_0^2y=\frac{F_0}{m}\cos\omega t,\quad \omega_0^2=\frac{k}{m}. \tag{5.5.5}$$

这时我们一般对 $\omega=\omega_0$ 的情形感兴趣,因为这正是所谓的**共振**情形.

我们看到,上面导出的各种情形的振动微分方程都具有共同的形式:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x), \tag{5.5.6}$$

或

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0. \tag{5.5.7}$$

方程(5.5.6)称为**二阶线性微分方程**,当$f(x)\neq 0$时,方程称为**二阶线性非齐次方程**.而方程(5.5.7)则称为**二阶线性齐次微分方程**.

于是方程(5.5.2)和(5.5.3)都是二阶线性齐次微分方程,而方程(5.5.4)和(5.5.5)都是二阶线性非齐次微分方程.由于方程(5.5.2)~(5.5.5)中的系数都是常数,所以我们又称它们为**二阶常系数线性微分方程**.

必须指出,二阶线性微分方程在其他许多科学领域也常常出现,例如电磁振荡、生物医学以及经济学等等.

对于一般的二阶线性微分方程(5.5.6),我们常常附加以下的初始条件:

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y'_0, \tag{5.5.8}$$

公式(5.5.6)、(5.5.8)称为二阶线性微分方程初值问题.

5.5.2 合理猜测法

在下面两节中,我们将主要讨论常系数的二阶线性微分方程的解法.在系统地介绍解法之前,我们在这里先做一个铺垫——介绍求微分方程的**合理猜测法**.

所谓猜测,是指试探-验证的方法.也许你觉得这种求解方法不正规、不系统,然而猜测法是十分重要的.我们先来考察一种最简单的情形,即讨论方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0 \tag{5.5.9}$$

的求解问题.

将方程(5.5.9)写成

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-y,$$

这表明方程的解的二阶导数是这个解再乘上 -1. 我们已熟悉有两个函数具有这种特性:

$$y(x)=\cos x \quad 与 \quad y(x)=\sin x.$$

将它们代入方程,有

$$\frac{d^2(\cos x)}{dx^2}=-\cos x,\quad \frac{d^2(\sin x)}{dx^2}=-\sin x,$$

这样我们便得到了方程(5.5.9)的两个特解. 不难验证,对于任意的常数 C,函数 $C\sin x$ 与 $C\cos x$ 也都满足方程. 还有,$\sin x+\cos x$ 也是(5.5.9)的解. 事实上,任给两个常数 C_1 与 C_2,函数

$$y(x)=C_1\sin x+C_2\cos x \tag{5.5.10}$$

是满足方程(5.5.9)的,即

$$\frac{d^2}{dx^2}(C_1\sin x+C_2\cos x)=\frac{d}{dx}(C_1\cos x-C_2\sin x)=-C_1\sin x-C_2\cos x$$
$$=-(C_1\sin x+C_2\cos x).$$

可以证明,$y(x)=C_1\sin x+C_2\cos x$ 就是方程(5.5.9)的通解(我们将在下节给出证明).

例 5.5.1 求方程(5.5.9)在条件

$$y(0)=y_0,\quad y'(0)=0 \tag{5.5.11}$$

下的解.

解 方程(5.5.9)的通解形如(5.5.10)式. 由条件(5.5.11),有

$$y(0)=C_1\sin 0+C_2\cos 0=C_2=y_0,$$
$$y'(0)=(C_1\cos x-C_2\sin x)\big|_{x=0}=C_1=0,$$

所以初值问题(5.5.9)、(5.5.11)的解为

$$y(x)=y_0\cos x.$$ □

例 5.5.2 求方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega_0^2y=0\ (\omega_0>0) \tag{5.5.12}$$

的通解.

解 由于方程(5.5.12)中出现了 ω_0^2 这个因子,所以很明显,$\sin x$ 或 $\cos x$ 不会满足方程(5.5.12). 但是,根据求导数的经验,可以用函数 $\sin\omega_0x$ 去试探一下,即

$$\frac{d^2(\sin\omega_0x)}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\omega_0\cos\omega_0x)=-\omega_0^2\sin\omega_0x,$$

于是我们看到.$\sin\omega_0x$ 是方程(5.5.12)的解. 同样我们有把握验证 $\cos\omega_0x$ 也是方程

(5.5.12)的解.这样取这两个函数的线性组合,就得到方程(5.5.12)的通解:

$$y = C_1\cos\omega_0 x + C_2\sin\omega_0 x,$$

其中C_1和C_2是任意常数.这个振动的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

这样的振动称为**简谐振动**. □

例5.5.3 求下列初值问题及边值问题的解:

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0, y(0)=1, y'(0)=-6$;

(2) $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0, y(0)=0, y\left(\frac{\pi}{4}\right)=20$.

解 (1) 这里$\omega_0^2=4,\omega_0=2$,故微分方程的通解是

$$y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

将初始条件代入,则

$$y(0) = C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = C_1 = 1,$$

$$y'(0) = (-2\sin 2x + 2C_2\cos 2x)\big|_{x=0} = 2C_2 = -6,$$

故$C_1=1,C_2=-3$,从而得到解

$$y(x) = \cos 2x - 3\sin 2x.$$

(2) **边值问题**是指这个问题中的定解条件是边界条件,即在某个区间的端点处给出一定的条件,在这里区间的端点是$x=0,x=\frac{\pi}{4}$.将边界条件$y(0)=0,y\left(\frac{\pi}{4}\right)=20$分别代入通解的表达式,得

$$y(0) = C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = C_1 = 0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = C_1\cos\frac{2\pi}{4} + C_2\sin\frac{2\pi}{4} = C_2\sin 2\cdot\frac{\pi}{4} = C_2 = 20,$$

所以$C_1=0,C_2=20$,函数

$$y(x) = 20\sin 2x$$

即为所求之解. □

5.5.3 二阶线性微分方程解的结构

下面所讨论的问题将为今后求微分方程的解打下必要的理论基础.在微分方程中线性方程特别重要,许多实际问题都归结于它.线性微分方程理论已相当成熟,求解方法也相对完善.这里特以二阶线性微分方程为例说明线性微分方程解的结构理论.它将指导我们求解各类线性微分方程.

(1) **解的存在、唯一性**

关于初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + P(x)\dfrac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x), & (5.5.13) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0 & (5.5.14) \end{cases}$$

的解,有个基本定理,现不加以证明叙述如下.

定理5.5.1(存在和唯一性定理) 设函数$P(x)$和$Q(x)$在开区间(a,b)内连续,则存在唯一的一个函数$y(x)$在区间(a,b)上满足微分方程(5.5.13),并满足给定的初始条件(5.5.14). 特别地,对应齐次微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \tag{5.5.15}$$

满足初始条件$y(x_0)=0$和$y'(x_0)=0$的任何解$y(x)$必恒等于零.

(2) **线性微分方程解的结构**

为讨论方便,我们把方程(5.5.15)的左端

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y$$

看作为定义了一个"函数的函数",即把每一个二阶可导的函数y,同另一个称为$L[y]$的函数,通过下列关系式联系起来:

$$L[y] = y'' + P(x)y' + Q(x)y.$$

用数学术语来说,L 是一个作用于函数的映射,在微分方程理论中,习惯把这个映射叫做**算子**. 也就是把 L 看成为如下的映射:

$$L: y \to y'' + P(x)y' + Q(x)y.$$

例如,当$P(x)=0$,$Q(x)=x$时,

$$L[y] = y'' + xy.$$

如果$y(x)=\cos x$,则

$$L[y] = (\cos x)'' + x(\cos x) = (x-1)\cos x;$$

而如果$y(x)=x^3$,则

$$L[y] = (x^3)'' + x(x^3) = x^4 + 6x.$$

因此,L 作用于函数$\cos x$时,其结果是函数$(x-1)\cos x$;而L作用于x^3的结果是x^4+6x.

作用于函数的算子或"函数的函数"的概念,同单变量x的函数的概念是类似的,回忆在区间I上函数的定义:我们把I上的每一个数x与一个新的称为$f(x)$的数联系起来. 而在这里,我们把每一个二阶可导的函数y与一个新的称为$L[y]$的函数联系起来. 这是一个非常抽象的数学概念,因为在某种意义上,我们是把一个函数完全当作一个点来处理的.

现在我们来推导算子 L 的两个重要性质.

性质 5.5.1 $L[Cy]=CL[y]$. 其中C为任意常数.

证 $L[Cy]=(Cy)''+P(x)(Cy)'+Q(x)(Cy)=Cy''+CP(x)y'+CQ(x)y$

$$=C[y''+P(x)y'+Q(x)y]=CL[y].$$ □

性质5.5.2 $L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]$.

证 $L[y_1+y_2]=(y_1+y_2)''+P(x)(y_1+y_2)'+Q(x)(y_1+y_2)$

$$=y_1''+y_2''+P(x)(y_1'+y_2')+Q(x)(y_1+y_2)$$

$$=y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1+y_2''+P(x)y_2'+Q(x)y_2$$

$$=L[y_1]+L[y_2].$$ □

算子L的这两个性质称为L的数乘运算和加法运算,合起来称为**线性运算**:

$$L[C_1y_1+C_2y_2]=C_1L[y_1]+C_2L[y_2].$$

由于L满足性质5.5.1、5.5.2,或者说L具有线性运算性质,故称L为**线性算子**.更确切地说,这里的L是一个**二阶线性微分算子**.

利用性质5.5.1、5.5.2立刻可以证明下面的结果.

定理5.5.2(线性叠加原理1) 设$y_1(x)$和$y_2(x)$是二阶线性齐次方程(5.5.15)的两个解,则$y_1(x)$与$y_2(x)$的线性组合

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \tag{5.5.16}$$

也是方程(5.5.15)的解,其中C_1与C_2为任意常数.

证明留作习题.

(5.5.16)式中含有两个任意常数,那么(5.5.16)式是否就是方程(5.5.15)的通解呢?我们来看下面一个例子.

例5.5.4 考虑微分方程$y''-y=0$,可以看出

$$y_1=e^x,\quad y_2=2e^x$$

都是方程的解.于是,对于任意两个独立无关的常数C_1与C_2,

$$y=C_1e^x+C_22e^x=(C_1+2C_2)e^x$$

也是方程的解.这个解只是形式上有两个任意常数,实际上$C=(C_1+2C_2)$只是一个**任意常数**.因此上述解可写成

$$y=Ce^x,$$

只含一个任意常数,所以$y=C_1e^x+C_22e^x$不能成为方程$y''-y=0$的通解.

为什么在这里$y=C_1y_1+C_2y_2$不能成为通解呢?原因就在于所找到的两个解e^x与$2e^x$只相差常数倍.如果考虑方程$y''-y=0$的下面两个解:

$$y_1=e^x,\quad y_2=e^{-x},$$

由于e^x与e^{-x}不是相差常数倍,故

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}$$

含有两个独立的任意常数,所以它是方程$y''-y=0$的通解. □

一般地,我们引进下面的概念.

定义 5.5.1 如果存在常数 k,使得

$$y_1(x) \equiv ky_2(x),$$

则称 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ **线性相关**;如果对任何常数 k,都有

$$y_1(x) \not\equiv ky_2(x),$$

则称 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ **线性无关**.

例如,函数 e^x 与 $2e^x$ 线性相关,而 e^x 与 e^{-x} 线性无关.

定理 5.5.3 设 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$L[y]=0$$

的两个线性无关解,则

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

是 $L[y]=0$ 的通解,其中 C_1、C_2 为任意常数.我们称线性无关的解 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 为方程 $L[y]=0$ 的**基础解系**.

证 首先,由线性叠加原理 1(定理 5.5.2)知,$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是方程 $L[y]=0$ 的解.其次,由于 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关,因此表示式 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 中的 C_1 与 C_2 是两个独立的任意常数,因而是 $L[y]=0$ 的通解. □

例 5.5.5 求微分方程 $y''+y=0$ 的通解.

解 我们在上节讲合理猜测法时,已经求出了这个方程的两个解 $y_1=\sin x$,$y_2=\cos x$.显然对任意常数 k,都有

$$\cos x \not\equiv k\sin x,$$

因此这两个解是线性无关的,它们构成方程 $y''+y=0$ 的基础解系,因此这个方程的通解为

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x.$$

这就解决了上节遗留下来的问题. □

上面我们对二阶线性齐次微分方程 $L[y]=0$ 的解的性质及通解结构作了比较充分的讨论,现在转向对二阶线性非齐次方程

$$L[y]=f(x)$$

的通解结构进行探讨.

定理 5.5.4 设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程 $L[y]=0$ 的两个线性无关解,$y^*(x)$ 是非齐次方程 $L[y]=f(x)$ 的一个特解,则

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x)$$

是非齐次方程 $L[y]=f(x)$ 的通解.

证 由恒等式 $L[C_1y_1+C_2y_2]\equiv 0$,$L[y^*]\equiv f(x)$ 可推得

$$L[C_1y_1+C_2y_2+y^*]=L[C_1y_1+C_2y_2]+L[y^*]\equiv 0+f(x)\equiv f(x),$$

因此 $y=C_1y_1+C_2y_2+y^*$ 是方程 $L[y]=f(x)$ 的解,且含有两个独立的任意常数,因而是 $L[y]=f(x)$ 的通解. □

例5.5.6 求方程$y''-y=x$的通解.

解 直接可以看出,对应齐次方程有两个线性无关解e^x和e^{-x};函数$y^*=-x$是非齐次方程$y''-y=x$的一个特解.根据定理5.5.4知原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-x. \qquad \square$$

最后指出,二阶线性非齐次微分方程的解还有下面的重要性质.

定理5.5.5(线性叠加原理2) 设y_1^*和y_2^*分别是方程

$$\mathrm{L}[y]=f_1(x) \text{ 和 } \mathrm{L}[y]=f_2(x)$$

的解,则$y_1^*+y_2^*$是方程

$$\mathrm{L}[y]=f_1(x)+f_2(x)$$

的解.

证 由$\mathrm{L}[y_1^*]\equiv f_1(x)$及$\mathrm{L}[y_2^*]\equiv f_2(x)$得

$$\mathrm{L}[y_1^*+y_2^*]=\mathrm{L}[y_1^*]+\mathrm{L}[y_2^*]\equiv f_1(x)+f_2(x). \qquad \square$$

例5.5.7 求$y''+y=x+e^x$的通解.

解 例5.5.5已给出对应齐次方程$y''+y=0$的通解为$y=C_1\sin x+C_2\cos x$.再分别考察两个方程

$$y''+y=x,\quad y''+y=e^x.$$

由视察法可以看出,$y_1^*=x$和$y_2^*=\frac{1}{2}e^x$分别为上述两个方程的解,所以由定理5.5.5得原方程的通解

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x+x+\frac{1}{2}e^x. \qquad \square$$

上面所介绍的关于二阶线性微分方程解的结构的理论,可以推广到高阶线性微分方程的情形,下面仅作简单的介绍.

首先引进k个函数$y_1,y_2,\cdots,y_k$线性无关的定义.

定义5.5.2 设$y_1,y_2,\cdots,y_k$是定义在区间I上的k个函数.如果存在不全为零的k个常数$C_1,C_2,\cdots,C_k$,使得$\forall x\in I$,有恒等式

$$C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ky_k\equiv 0$$

成立,则称这k个函数在区间I上**线性相关**;否则称为**线性无关**.

前面关于两个函数给出的定义5.5.1是符合于这个一般定义的.

如果令

$$\mathrm{L}[y]=y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y, \tag{5.5.17}$$

则前面的定理5.5.3和定理5.5.4都可以搬到这里来.

定理5.5.6 设$y_1,y_2,\cdots,y_n$是n阶线性齐次方程$\mathrm{L}[y]=0$的n个线性无关解,则

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$$

是齐次方程$\mathrm{L}[y]=0$的通解,其中C_1、C_2、$\cdots$、C_n是任意常数.称线性无关的解y_1、y_2、

$\cdots, y_n$ 为方程 $\mathrm{L}[y]=0$ 的**基础解系**.

定理5.5.7　设 $y^*(x)$ 是 n 阶线性非齐次方程 $\mathrm{L}[y]=f(x)$ 的一个特解,而 $Y(x)=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$ 是对应齐次方程 $\mathrm{L}[y]=0$ 的通解,则

$$y=Y(x)+y^*(x)=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n+y^*(x)$$

是非齐次方程 $\mathrm{L}[y]=f(x)$ 的通解.

关于定理5.5.5也有相应的推广,此处不再详述.

5.5.4　常数变易法

在上面的例5.5.6和例5.5.7中,我们都是通过视察法来求得非齐次方程的特解的,在本节的末尾,我们给出一个求非齐次方程的特解的一般方法(以二阶线性微分方程为例),即所谓的**常数变易法**.

假定已知方程(5.5.15)的两个线性无关的特解 y_1 和 y_2,则其通解为

$$C_1y_1+C_2y_2.$$

所谓常数变易法,就是把上式中的 C_1 和 C_2 看作自变量 x 的函数,即 $C_1(x)$ 和 $C_2(x)$,然后设法确定这两个函数,使得

$$y^*(x)=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2 \tag{5.5.18}$$

是非齐次方程(5.5.13)的一个特解.

为此,将(5.5.18)式代入方程(5.5.13),可以得到 $C_1(x)$ 与 $C_2(x)$ 应当满足的一个条件,现在我们有两个待定函数,所以除这个条件外还要再补充一个条件.由(5.5.18)式对 x 求导数,得

$$\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}x}=C_1(x)y_1'+C_2(x)y_2'+C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2.$$

为简单计,我们补充这样一个条件,即

$$C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0. \tag{5.5.19}$$

于是
$$\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}x}=C_1(x)y_1'+C_2(x)y_2', \tag{5.5.20}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y^*}{\mathrm{d}x^2}=C_1(x)y_1''+C_2(x)y_2''+C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'. \tag{5.5.21}$$

将(5.5.18)、(5.5.20)及(5.5.21)式代入方程(5.5.13),并注意到 y_1、y_2 是对应齐次方程的解,就得到

$$C'_1(x)y'_1+C'_2(x)y'_2=f(x). \tag{5.5.22}$$

联立方程(5.5.19)和(5.5.22),在系数行列式 $W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}=y_1y'_2-y'_1y_2\neq 0$ 时,就可确定 $C'_1(x)$ 和 $C'_2(x)$.通过求积分,即可求得 $C_1(x)$ 和 $C_2(x)$,将求得的 $C_1(x)$ 和 $C_2(x)$ 代入(5.5.18)式,也就求出了非齐次方程(5.5.13)的一个特解 y^*.

例5.5.8　求方程 $y''+y=\sec x$ 的通解.

解　容易求出对应齐次方程有两个线性无关的特解 $y_1=\sin x$, $y_2=\cos x$. 所以对应齐次方程的通解为 $C_1\sin x+C_2\cos x$.

设非齐次方程的一个特解为

$$y^*=C_1(x)\sin x+C_2(x)\cos x,$$

则
$$\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}x}=C_1(x)\cos x-C_2(x)\sin x+C'_1(x)\sin x+C'_2(x)\cos x.$$

令
$$C'_1(x)\sin x+C'_2(x)\cos x=0, \tag{5.5.23}$$

于是得
$$\frac{\mathrm{d}^2y^*}{\mathrm{d}x^2}=-C_1(x)\sin x-C_2(x)\cos x+C'_1(x)\cos x-C'_2(x)\sin x.$$

将 $\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2y^*}{\mathrm{d}x^2}$ 代入原方程,得

$$C'_1(x)\cos x-C'_2(x)\sin x=\sec x, \tag{5.5.24}$$

再由方程(5.5.23)、(5.5.24)联立解得

$$C'_1(x)=1,\quad C'_2(x)=-\frac{\sin x}{\cos x}.$$

于是可取
$$C_1(x)=x,\quad C_2(x)=\ln|\cos x|.$$

故原方程的一个特解为

$$y^*=x\sin x+\cos x\ln|\cos x|,$$

从而原方程的通解为

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x+x\sin x+\cos x\ln|\cos x|.$$ □

如果我们只知道齐次方程(5.5.15)的一个特解 $y_1(x)$,那么由计算的经验,可以设另一个特解的形式为

$$y_2=u(x)y_1,$$

其中 $u(x)$ 为待定函数,将上式代入方程(5.5.15),可得到 u 应满足的方程为

$$y_1u''+(2y'_1+P(x)y_1)u'=0.$$

这是本章5.4.2中所介绍的高阶方程的可积类型中的不显含未知函数 u 的类型. 令 $u'=p$, $u''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$,则方程降阶为一阶线性方程

$$y_1p'=-[2y'_1+P(x)y_1]p,$$

分离变量后积分,并只取一个原函数,得

$$p=u'=\frac{1}{y_1^2}\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

再积分,并且也只取一个原函数,得

$$u=\int\frac{1}{y_1^2}\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

最后得
$$y_2 = y_1 u = y_1\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}dx. \tag{5.5.25}$$

由于$\frac{y_2}{y_1}=u$不为常数,故y_1与y_2线性无关,y_2就是所求的另一个特解. □

例5.5.9 已知方程$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$的一个解$y_1=x$,求其通解.

解 将方程写成
$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{2}{1-x^2}y=0,$$

这里$P(x)=\frac{-2x}{1-x^2}$. 由公式(5.5.25),有
$$y_2(x)=x\int \frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{-2x}{1-x^2}dx}dx = x\int \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1-x^2}dx = x\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{x}\right),$$

所求通解为
$$y=C_1x+C_2x\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{x}\right).$$
□

习 题 5.5

(A)

1. 回答下列问题

(1) “算子”的含义是什么? 算子L 把什么函数变成什么函数?

(2) L 的线性运算性质是什么?

(3) 什么叫两个函数$y_1(x)$与$y_2(x)$线性相关、线性无关? 方程$L[y]=0$的基础解系是什么?

(4) 方程$L[y]=0$的通解结构是怎样的? 何谓线性叠加原理1?

(5) 方程$L[y]=f(x)$的通解结构是怎样的? 何谓线性叠加原理2?

2. 验证$y=2\cos x+3\sin x$是方程$y''+y=0$的解.

3. 设$y=A\cos\alpha x$是方程$y''+5y=0$满足条件$y'(1)=3$的解,试求A与α的值.

4. 求A、B及ω的值,使$y=A\cos\omega x+B\sin\omega x$成为边值问题
$$y''+16y=0,\quad y(0)=2,\quad y\left(\frac{\pi}{8}\right)=3$$
的解.

5. 设$L[y]=y''-3xy'+3y$,试计算

(1) $L[e^x]$; (2) $L[\cos\sqrt{3}x]$; (3) $L[x^2+3x]$.

6. 下列函数组在其定义区间内哪些是线性无关的?

(1) x,x^2; (2) $\cos 2x,\sin 2x$; (3) $x,2x$;

(4) $e^{\alpha x},e^{\beta x}(\alpha\neq\beta)$; (5) $\sin 2x,\cos x\sin x$.

7. 用合理猜测法及线性叠加原理2求方程$y''+y=3e^{-x}+2x$的通解.

8. 验证$y_1=e^{x^2}$和$y_2=xe^{x^2}$都是方程$y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$的解,并写出该方程的通解.

9. 试证明:由$T[y]=\int_a^x t^2y(t)dt$定义的算子T 是线性的,即要证
$$T[Cy]=CT[y],\quad T[y_1+y_2]=T[y_1]+T[y_2].$$

(B)

1. 设有一个由电阻R、自感L、电容C和电源E串联组成的电路,其中R、L及C为常数,电源电动势是时间t的函数:$E=E_m\sin\omega t$,这里E_m及ω也是常数(见图5.8).

设电路中的电流为$I(t)$,电容器极板上的电量为$Q(t)$,两极板间的电压为V_C,自感电动势为E_L,由电学知

$$I=\frac{dQ}{dt},\quad V_C=\frac{Q}{C},\quad E_L=-L\frac{dI}{dt},$$

试根据回路电压定律,导出串联电路的振荡方程(即关于V_C的微分方程).

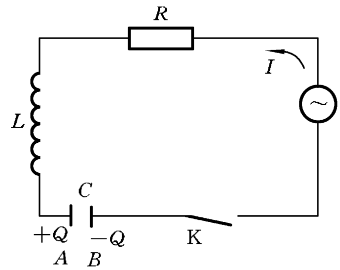


图5.8

2. 设两个相同的重物一起悬挂在弹簧的一端,如果其中一个重物坠下,试求另一个重物的运动方程,并用合理猜测法求出方程的通解及特解.
3. 试构造线性齐次微分方程,已知它的基础解系如下:

(1) $y_1=\sin x$, $y_2=\cos x$; (2) $y_1=x$, $y_2=x^2$.

4. 已知$y_1=e^x$是线性齐次方程$(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$的一个解,求此方程的通解.
5. 已知$y_1=x$是线性齐次方程$x^2y''-2xy'+2y=0$的一个解,求线性非齐次方程$x^2y''-2xy'+2y=2x^3$的通解.

答案与提示

(A)

3. $\alpha=\pm\sqrt{5}$, $A=-\dfrac{3\sqrt{5}}{5\sin\sqrt{5}}$.
4. $A=2$, $B=3$, $\omega=4$.
5. (1) $(4-3x)e^x$; (2) $3\sqrt{3}x\sin\sqrt{3}x$; (3) $2-3x^2$.
6. (1),(2),(4)线性无关;(3),(5)线性相关.
7. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{3}{2}e^{-x}+2x$.
8. $y=(C_1+C_2x)e^{x^2}$.

(B)

1. $\dfrac{d^2V_C}{dt^2}+2\beta\dfrac{dV_C}{dt}+\omega_0^2V_C=\dfrac{E_m}{LC}\sin\omega t$, $\beta=\dfrac{R}{2L}$, $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.
2. 设重物质量为m,重物处于静止状态时使弹簧伸长a,用x表示只悬挂一个重物时,在铅直方向上从平衡位置算起的重物的坐标,则$x=a\cos\sqrt{\dfrac{g}{a}}\,t$.
3. (1) $y''+y=0$; (2) $x^2y''-2xy'+2y=0$.
4. $y=C_1e^x+C_2(2x+1)$.
5. $y=C_1x+C_2x^2+x^3$.

5.6 二阶常系数线性微分方程

5.6.1 常系数线性齐次微分方程

首先讨论二阶常系数线性齐次微分方程

$$L[y]=y''+py'+qy=0 \tag{5.6.1}$$

的解法,其中 p 和 q 都是常数.

本章5.5.3中的定理5.5.3告诉我们,只要求出方程(5.6.1)的两个线性无关解 y_1 和 y_2,则方程(5.6.1)的通解就是 y_1 与 y_2 的线性组合 $y=C_1y_1+C_2y_2$. 但遗憾的是这个定理并未说明如何求出方程(5.6.1)的两个解. 所以,我们来尝试作一个合理的猜测.

我们注意到,如果函数 $y(x)$ 的二阶导数加上 $y(x)$ 的一阶导数的 p 倍,再加上 $y(x)$ 本身的 q 倍(p、q 均为常数)之后恒等于零,则 $y(x)$ 就是方程(5.6.1)的解. 一般来说,只有当 $y(x)$、$y'(x)$ 和 $y''(x)$ 是"同类型的函数"时,y''、py' 和 qy 这三项才能够相互抵消. 比方说,函数 $y(x)=x^3$ 决不会是方程(5.6.1)的解,因为 $6x$、$3px^2$ 和 qx^3 是 x 的不同次数的多项式,所以不能相互抵消. 然而,函数 $y(x)=e^{rx}$(r 为常数)却具有这样的性质:y' 和 y'' 都是 y 的倍数. 于是可以猜测,取 $y(x)=e^{rx}$ 作为方程(5.6.1)的解. 计算

$$L[e^{rx}]=(e^{rx})''+p(e^{rx})'+q(e^{rx})=(r^2+pr+q)e^{rx},$$

于是,当且仅当

$$r^2+pr+q=0 \tag{5.6.2}$$

时,$y(x)=e^{rx}$ 是方程(5.6.1)的解. 代数方程(5.6.2)称为微分方程(5.6.1)的**特征方程**. 它的两个根由公式

$$r_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

给出,称 r_1 和 r_2 为方程(5.6.1)的**特征根**.

根据特征根的不同情况,可得方程(5.6.1)的不同特解.

(1) **两个不同的实特征根**

这时 $p^2-4q>0$,$r_1\neq r_2$ 是实根. 在这种情形,方程(5.6.1)有两个线性无关的特解

$$y_1=e^{r_1x},\quad y_2=e^{r_2x},$$

通解为

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}.$$

(2) **一个二重实特征根**

这时 $p^2-4q=0$,$r_1=r_2=r$ 为二重实根. 由特征根只能得到一个特解 $y_1=e^{rx}$. 我们

再设法求另一个线性无关的特解 y_2,即要求 y_2 不是 y_1 的常数倍. 为此,令

$$\frac{y_2}{y_1}=u(x) \quad 或 \quad y_2(x)=u(x)e^{rx},$$

$u(x)$ 待定. 将 $y_2=u(x)e^{rx}$ 代入方程(5.6.1),有

$$\begin{aligned}L[y_2]=L[u(x)e^{rx}]&=(u''e^{rx}+2ru'e^{rx}+r^2ue^{rx})+p(u'e^{rx}+rue^{rx})+que^{rx}\\&=[u''+(2r+p)u'+(r^2+pr+q)u]e^{rx}=0,\end{aligned}$$

即
$$u''+(2r+p)u'+(r^2+pr+q)u=0.$$

由于 r 是特征根,故 $r^2+pr+q=0$;又由于 $2r$ 是两根之和,故 $2r=-p$,即 $2r+p=0$. 于是得

$$u''=0.$$

不妨选取 $u=x$,就可得到

$$y_2=xe^{rx}.$$

因此,当 r 为二重实特征根时,方程(5.6.1)有两个线性无关的特解 $y_1=e^{rx}$,$y_2=xe^{rx}$,通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{rx}.$$

(3) 一对共轭复根

当 $p^2-4q<0$ 时,特征方程(5.6.2)有一对共轭复根

$$r_1=\alpha+i\beta,\quad r_2=\alpha-i\beta.$$

相应地,方程(5.6.1)有两个线性无关的特解

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x},\quad y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

由于这两个特解中含有虚数 i,对讨论解的物理意义不很方便. 下面我们设法将其转化为实值解的形式. 为此,先利用欧拉公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

将 y_1 与 y_2 改写为

$$y_1=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),\quad y_2=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x).$$

再利用线性叠加原理 1 即可求出方程(5.6.1)的两个线性无关的实值解

$$\tilde{y}_1=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \tilde{y}_2=\frac{1}{2i}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

于是得到通解

$$y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

例 5.6.1 求方程

$$y''+5y'+4y=0 \tag{5.6.3}$$

的通解.

解 特征方程 $r^2+5r+4=0$ 有两个不同的实根 $r_1=-4$ 和 $r_2=-1$. 因此 $y_1=e^{-4x}$ 和 $y_2=e^{-x}$ 构成方程(5.6.3)的基础解系,从而(5.6.3)的通解是

$$y_1 = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-x},\quad C_1 \text{与} C_2 \text{为任意常数}.$$ □

例 5.6.2　求初值问题

$$y'' + 4y' + 4y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 3 \tag{5.6.4}$$

的解.

解　特征方程 $r^2 + 4r + 4 = 0$ 有两个相等的实根,即二重实根 $r = -2$,因此方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x},$$

常数 C_1 和 C_2 由初始条件确定,即

$$1 = y(0) = C_1,\quad 3 = y'(0) = -2C_1 + C_2,$$

由此得 $C_1 = 1, C_2 = 5$,故得

$$y = (1 + 5x)e^{-2x}.$$ □

例 5.6.3　求方程

$$y'' + y' + 2y = 0 \tag{5.6.5}$$

的通解.

解　特征方程 $r^2 + r + 2 = 0$ 有一对共轭复根

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2},$$

故通解为

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right).$$ □

下面,我们简述 n 阶常系数线性齐次微分方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{5.6.6}$$

的类似结果(证明从略).

特征方程为

$$r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0. \tag{5.6.7}$$

① 每一个实特征单根 r,对应一个特解:

$$e^{rx}.$$

② 每一个 k 重实特征根 r,对应 k 个线性无关的特解:

$$e^{rx}, xe^{rx}, x^2 e^{rx}, \cdots, x^{k-1} e^{rx}.$$

③ 每一对复共轭特征单根 $\alpha \pm i\beta$(实系数的代数方程的复根必共轭成对出现),对应一对线性无关的特解:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

④ 每一对 k 重复共轭特征根 $\alpha \pm i\beta$,对应 k 对线性无关的特解:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad x^2 e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \cdots,\quad x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x.\quad xe^{\alpha x}\sin\beta x.\quad x^2 e^{\alpha x}\sin\beta x.\quad \cdots.\quad x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

可以证明,以上所有的特解都线性无关.

例5.6.4 求方程

$$y^{(5)}+2y^{(3)}+y'=0 \tag{5.6.8}$$

的通解.

解 特征方程为 $r^5+2r^3+r=r(r^2+1)^2=0$,

特征根为 $r=0$(单根), $r=\pm\mathrm{i}$(二重根).

相应的特解为

$$\mathrm{e}^{0x}=1,\quad \cos x,\quad \sin x,\quad x\cos x,\quad x\sin x.$$

通解为

$$y=C_1+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x.$$ □

最后,我们用本节的方法来求解本章5.5.1中的自由振动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2y=0 \tag{5.6.9}$$

与阻尼自由振动方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+ky=0. \tag{5.6.10}$$

方程(5.6.9)的特征方程是$r^2+\omega_0^2=0$,特征根为$r=\pm\mathrm{i}\omega_0$,故方程(5.6.9)的通解形如

$$y=C_1\cos\omega_0t+C_2\sin\omega_0t.$$

我们看到,这与在本章5.5.2中用合理猜测法求出的通解完全一样.利用三角函数的有关公式,我们可以把上述通解改写成下面的形式:

$$y=A\sin(\omega_0t+\varphi),$$

其中 $$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\quad \varphi=\arctan\frac{C_1}{C_2}.$$

A 称为运动的**振幅**,φ称为运动的**相角**,$T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$为运动的**自然周期**,而$\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$称为系统的**固有频率**.这种简谐振动的图形如图5.9所示.

下面考察方程(5.6.10),特征方程是$mr^2+cr+k=0$,它的根为

$$r_{1,2}=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4km}}{2m}.$$

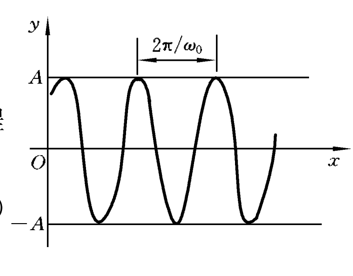


图5.9

分三种情形讨论.

① $c^2-4km>0$.这时 r_1 与 r_2 都是负的,方程(5.6.10)的通解形如

$$y(t)=C_1\mathrm{e}^{r_1t}+C_2\mathrm{e}^{r_2t}. \tag{5.6.11}$$

② $c^2-4km=0$.这时(5.6.10)的通解形如

$$y(t)=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{-\frac{c}{2m}t}. \tag{5.6.12}$$

③ $c^2-4km<0$. 这时(5.6.10)的通解形如

$$y(t)=e^{-\frac{c}{2m}t}(C_1\cos\mu t+C_2\sin\mu t), \tag{5.6.13}$$

其中 $\mu=\sqrt{4km-c^2}/(2m)$.

情形③是小阻尼情形,将(5.6.13)改写成

$$y(t)=Ae^{-\frac{c}{2m}t}\sin(\mu t+\varphi),$$

位移 y 在曲线 $y=\pm Ae^{-ct/(2m)}$ 之间摆动,因此它表示一条振幅逐渐衰减的正弦曲线(见图5.10),物体的运动周期 $T=\dfrac{2\pi}{\mu}$. 物体将随时间 t 的增大而趋于平衡位置.

前两种情形分别称为超阻尼和临界阻尼. 由表达式(5.6.11)和(5.6.12)可见,物体都随时间 t 的增大而趋于平衡位置.

现在我们看到,如果在系统中存在阻尼,则物体的运动最终总会消失. 换句话说,系统的任何初始振动都将被系统中存在的阻尼消耗尽. 这就是机械系统中广泛采用弹簧-质量-阻尼系统的原因之一:弹簧减震系统能够用来消灭任何有害的扰动.

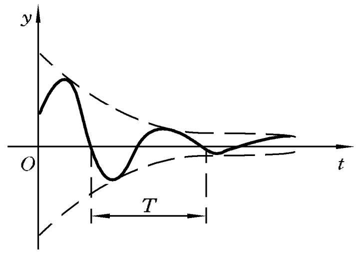


图5.10

5.6.2 常系数线性非齐次微分方程

下面讨论形如

$$L[y]=y''+py'+qy=f(x) \tag{5.6.14}$$

的二阶常系数线性非齐次微分方程的解法. 由本章5.5.3中的定理5.5.4知,非齐次微分方程(5.6.14)的通解等于对应齐次微分方程

$$L[y]=y''+py'+qy=0 \tag{5.6.15}$$

的通解加上方程(5.6.14)的一个特解. 齐次微分方程(5.6.15)的通解我们已经会求了,现在的问题是怎样求方程(5.6.14)的特解. 我们只介绍 $f(x)$ 取两种常见形式时求特解 y^* 的方法,这种方法的特点是不用积分就可求出 y^* 来,称之为**待定系数法**. 下面分别介绍.

(1) $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$

这里 λ 是常数,$P_m(x)$ 是 x 的 m 次多项式:

$$P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m.$$

我们知道,指数函数与多项式乘积的导数,其形式仍为指数函数与多项式的乘积. 因此,运用合理猜测法,可以猜想所求的特解 y^* 具有如下的形式:

$$y^*=e^{\lambda x}Q(x),\quad Q(x)\text{ 是某多项式}.$$

我们把这个 y^* 代到方程(5.6.14)中试探一下,有

$$\begin{aligned}L[y^*]&=L[e^{\lambda x}Q(x)]=(e^{\lambda x}Q(x))''+p(e^{\lambda x}Q(x))'+q(e^{\lambda x}Q(x))\\&=e^{\lambda x}[Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)]\\&\equiv e^{\lambda x}P_m(x),\end{aligned}$$

即得

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)\equiv P_m(x).\tag{5.6.16}$$

下面分三种情况进行讨论.

① λ不是特征方程$r^2+pr+q=0$的根,则$\lambda^2+p\lambda+q\neq0$,由于$P_m(x)$是一个$m$次多项式,要使恒等式(5.6.16)成立,我们可以取$Q(x)$为另一个m次多项式:

$$Q(x)=Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m.$$

将它代入(5.6.16)式,并比较两端x同次幂的系数,就得到以$b_0,b_1,\cdots,b_m$为未知数的$m+1$个方程的联立方程组,由此便可确定系数$b_0,b_1,\cdots,b_m$. 这样便求得方程(5.6.14)的一个特解

$$y^*=e^{\lambda x}Q_m(x).$$

② λ是特征方程$r^2+pr+q=0$的单根,则$\lambda^2+p\lambda+q=0$,但$2\lambda+p\neq0$. 这时,$Q'(x)$必须为m次多项式才能使(5.6.16)式成立. 故取

$$Q(x)=xQ_m(x),$$

这时同样用比较系数的方法来确定$Q_m(x)$的系数$b_0,b_1,\cdots,b_m$.

③ λ是特征方程$r^2+pr+q=0$的重根,则$\lambda^2+p\lambda+q=0$且$2\lambda+p=0$. 因此,要使(5.6.16)式成立,必须$Q''(x)$为m次多项式. 故取

$$Q(x)=x^2Q_m(x),$$

并用同样的方法确定$Q_m(x)$中的系数.

总之,当非齐次微分方程(5.6.14)的右端函数$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$时,方程(5.6.14)有形如

$$y^*=x^ke^{\lambda x}Q_m(x)\tag{5.6.17}$$

的特解,其中$Q_m(x)$是与$P_m(x)$同次的多项式,而k按λ不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取为0,1,2.

例 5.6.5 求微分方程$y''+y=2x^2-3$的一个特解.

解 这是二阶常系数线性非齐次方程,右端函数$f(x)=2x^2-3$,是$e^{\lambda x}P_m(x)$型的,其中$\lambda=0$,$P_2(x)=2x^2-3$. 对应的齐次方程为$y''+y=0$,其特征方程为

$$r^2+1=0,$$

特征根为$r=\pm i$. 所以$\lambda=0$不是特征根. 令特解为

$$y^*=b_0x^2+b_1x+b_2.$$

代入原方程,得
$$2b_0+b_0x^2+b_1x+b_2\equiv2x^2-3,$$
即
$$b_0x^2+b_1x+(2b_0+b_2)\equiv2x^2-3,$$

比较 x 的同次幂系数,得

$$\begin{cases} b_0 = 2, \\ b_1 = 0, \\ 2b_0 + b_2 = -3, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} b_0 = 2, \\ b_1 = 0, \\ b_2 = -7, \end{cases}$$

因此特解为
$$y^* = 2x^2 - 7. \qquad \square$$

例 5.6.6　求 $y'' - y = 2x\mathrm{e}^x$ 的通解.

解　特征方程为 $r^2 - 1 = 0$,特征根为 $r_1 = 1, r_2 = -1, f(x) = 2x\mathrm{e}^x$,其中 $\lambda = 1$ 是特征方程的单根,$P_1(x) = 2x$ 为一次多项式. 故设

$$y^* = x\mathrm{e}^x(b_0x + b_1).$$

将其代入原方程,得
$$4b_0x + 2(b_0 + b_1) \equiv 2x,$$
比较两端 x 的同次幂系数,得

$$4b_0 = 2, \quad 2(b_0 + b_1) = 0,$$

解得
$$b_0 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = -\frac{1}{2}.$$

所以 $y^* = \dfrac{1}{2}(x^2 - x)\mathrm{e}^x$,原方程的通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}(x^2 - x)\mathrm{e}^x. \qquad \square$$

(2) $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}[P_m(x)\cos\omega x + Q_m(x)\sin\omega x]$

这里多项式 $P_m(x)$ 与 $Q_m(x)$ 中有一个是 m 次的,而另一个不超过 m 次. 利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$,把三角函数变成指数函数的形式,则 $f(x)$ 的形状变为

$$f(x) = \mathrm{e}^{(\lambda + \mathrm{i}\omega)x}R_m(x) + \mathrm{e}^{(\lambda - \mathrm{i}\omega)x}T_m(x), \tag{5.6.18}$$

其中 $R_m(x)$ 与 $T_m(x)$ 都是 m 次多项式. 于是对 $f(x)$ 的每一项都可应用前面的规则,即若 $\lambda + \mathrm{i}\omega$ 不是特征方程的根,那么就可以求形如(5.6.18)式的特解;若 $\lambda + \mathrm{i}\omega$ 是特征方程的根,那么特解就还要乘上一个因子 x.

若再回到三角函数,那么这个规则可以叙述如下.

① 若 $\lambda + \mathrm{i}\omega$ 不是特征方程的根,则应当求形如

$$y^* = \mathrm{e}^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x + R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$$

的特解,其中 $R_m^{(1)}(x)$ 与 $R_m^{(2)}(x)$ 是系数待定的 m 次多项式.

② 若 $\lambda + \mathrm{i}\omega$ 是特征方程的根,则应当求形如

$$y^* = x\mathrm{e}^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x + R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$$

的特解.

例 5.6.7　求 $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$ 的一个特解.

解　特征方程为 $r^2 + 4r + 4 = 0$,所以在这里 $\lambda + \mathrm{i}\omega = 0 + \mathrm{i}2$ 不是特征根,故应当求形如

$$y^* = A\cos 2x + B\sin 2x$$

的特解. 将 y^* 代入原方程, 得

$$(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) + 4(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + 4(A\cos 2x + B\sin 2x) \equiv \cos 2x,$$

即

$$8B\cos 2x - 8A\sin 2x \equiv \cos 2x,$$

比较两端同类项系数, 得 $8B = 1, -8A = 0$,

即 $A = 0, B = \frac{1}{8}$. 所以特解为

$$y^* = \frac{1}{8}\sin 2x. \qquad \square$$

例 5.6.8 考虑本章 5.5.2 中的无阻尼强迫振动方程

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\cos\omega t, \tag{5.6.19}$$

求这个方程的通解.

解 对应齐次方程为 $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0$,

它的通解是

$$y = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t.$$

我们感兴趣的是 $\omega = \omega_0$ 的情形, 即当外力的频率等于系统的固有频率时的情形, 这种情形称为**共振**. 这时物体的运动微分方程是

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t. \tag{5.6.20}$$

由于 $\pm i\omega_0$ 是特征根, 因此方程(5.6.20)有形如

$$y^* = At\cos\omega_0 t + Bt\sin\omega_0 t$$

的特解. 将它代入方程(5.6.20), 得

$$\begin{aligned}&(-2\omega_0 A\sin\omega_0 t + 2\omega_0 B\cos\omega_0 t - \omega_0^2 At\cos\omega_0 t \\ &\quad - \omega_0^2 Bt\sin\omega_0 t) + \omega_0^2(At\cos\omega_0 t + Bt\sin\omega_0 t) \\ &= -2\omega_0 A\sin\omega_0 t + 2\omega_0 B\cos\omega_0 t \equiv \frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t,\end{aligned}$$

比较两端同类项的系数, 得 $A = 0, \quad B = \frac{F_0}{2m\omega_0}$,

所以特解为

$$y^* = \frac{F_0}{2m\omega_0}t\sin\omega_0 t,$$

从而方程(5.6.20)的通解为

$$y = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0}t\sin\omega_0 t. \tag{5.6.21}$$

我们看到, (5.6.21)式中前两项为周期函数之和, 仍为周期函数. 但是第三项则表示振幅不断增长的振动, 如图 5.11 所示. 因此, 如果外力项 $F_0\cos\omega t$ 与系统的固有

频率处于共振状态,则它将会引起无限增长的振动. 这种现象曾经使得1831年英国曼彻斯特附近的布劳顿吊桥倒塌. 当时一队士兵以整齐的步伐通过这座大桥,因而产生了振幅相当大的周期性的力,这个力的频率正好等于大桥的固有频率. 因此,引起了很大的振动,使得大桥倒塌了. 正是由于这个原因,当士兵列队通过大桥时,就要下令步伐不要一致.

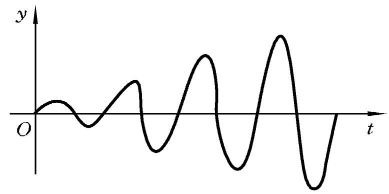


图5.11

□

5.6.3 欧拉方程

我们看到,对于常系数线性微分方程来说,有一套行之有效的解法. 然而,对于变系数线性微分方程来说,一般是很不容易求解的. 本节介绍一类可以**常系数化**的方程,即欧拉(Euler)方程.

形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x) \tag{5.6.22}$$

的方程称为**欧拉方程**,其中$p_1, p_2, \cdots, p_n$为常数.

通过变换$x = e^t$或$t = \ln x$,可将方程(5.6.22)化为常系数线性微分方程. 我们以二阶微分方程的情形为例加以介绍.

二阶的欧拉方程形状为

$$x^2 y'' + p_1 x y' + p_2 y = f(x). \tag{5.6.23}$$

令$x = e^t$或$t = \ln x$,则有

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt},$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

于是方程(5.6.23)化为

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (p_1 - 1)\frac{dy}{dt} + p_2 y = f(e^t). \tag{5.6.24}$$

这是常系数的线性微分方程,未知函数仍记为$y(t)$,自变量已换成t. 用上两节的方法求解(5.6.24),再用$t = \ln x$代回去即得方程(5.6.23)的解$y(x)$.

例5.6.9 求解方程

$$x^2 y'' - 2y = x. \tag{5.6.25}$$

解 令$t = \ln x$,则方程(5.6.25)化为

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = e^t, \tag{5.6.26}$$

特征方程为$r^2 - r - 2 = 0$.特征根为$r_1 = 2$.$r_2 = -1$. 由于$\lambda = 1$不是特征根.故方程

(5.6.26)有形如

$$y^* = Ae^t$$

的特解,代入方程(5.6.26)后可求得$A=-\frac{1}{2}$,故方程(5.6.26)有特解

$$y^* = -\frac{1}{2}e^t.$$

从而方程(5.6.26)的通解为

$$y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} - \frac{1}{2}e^t.$$

代回原来的变量得方程(5.6.25)的通解

$$y(x) = C_1x^2 + C_2\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x.$$ □

例5.6.10 假设对一切实数x,函数$f(x)$满足等式$f'(x)=x^2+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,且$f(0)=2$.试求函数$f(x)$.

解 由假设知$f'(x)$存在,故$f(x)$连续,从而积分$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$对上限x可导,所以$f'(x)$可导,在所给等式两端对x求导数,得二阶常系数线性微分方程

$$f''(x) - f(x) = 2x. \tag{5.6.27}$$

特征方程为$r^2-1=0$,特征根为$r=\pm 1$.由观察易见,方程(5.6.27)有一个特解$-2x$.因此其通解为

$$f(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} - 2x,$$

其中C_1,C_2为任意常数.

由题设可知$f(0)=2,f'(0)=0$,由此求出$C_1=2,C_2=0$.故函数$f(x)=2(e^x-x)$即为所求. □

习 题 5.6

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 方程$L[y]=y''+py'+qy=0$的特征方程是什么?

(2) k个函数线性无关是怎样定义的?

2. 求下列微分方程的通解:

(1) $y''-6y'+9y=0$; (2) $4y''-12y'+9y=0$; (3) $y''+6y'+13y=0$;

(4) $y''-2y'+y=0$; (5) $y^{(4)}-y=0$; (6) $y'''-6y''+3y'+10y=0$.

3. 求下列初值问题的解:

(1) $y''+4y'+29y=0,y(0)=0,y'(0)=15$; (2) $4y''+4y'+y=0,y(0)=2,y'(0)=0$;

(3) $y''-4y'+3y=0,y(0)=6,y'(0)=10$; (4) $y''+25y=0,y(0)=2,y'(0)=5$.

4. 求下列微分方程的通解:

(1) $y''+y'-2y=-2\sin x$; (2) $y''+y=4\sin x$;

(3) $y''+4y=17e^{-x}\cos 2x$; (4) $y''+a^2y=e^x$;

(5) $y''+5y'+4y=3-2x$; (6) $y''-6y'+9y=e^{2x}(x+1)$;

(7) $y''+y=3xe^x+5\sin x$; (8) $y''-y=\sin^2 x$.

5. 求下列初值问题的解:

(1) $y''+y+\sin 2x=0, y(\pi)=1, y'(\pi)=1$; (2) $y''-3y'+2y=5, y(0)=1, y'(0)=2$;

(3) $y''-y=4xe^x, y(0)=0, y'(0)=1$; (4) $y'-4y'=5, y(0)=1, y'(0)=0$.

6. 求下列微分方程的通解:

(1) $y''+4y'+4y=e^{ax}$; (2) $y''+a^2y=\sin x\ (a>0)$.

7. 求下列欧拉方程的通解:

(1) $x^2y''-xy'+y=0$; (2) $x^2y''+xy'+y=x$;

(3) $x^2y''+2xy'-n(n+1)y=0$; (4) $xy''+2y'=12\ln x$;

(5) $x^2y''-xy'+4y=x\sin(\ln x)$; (6) $x^2y''-3xy'+4y=0$.

8. 求方程$x^2y''-xy'+y=2x$ 满足条件$y(1)=0, y'(1)=1$ 的特解.

(B)

1. 一个重p(kg)的物体挂在弹簧下,把弹簧拉长a(cm),再用手把弹簧拉长A 厘米后无初速地松开. 求弹簧的振动规律(不计介质阻力).

2. 一个质量为m 的质点在一个与距离成正比的外力作用下离开中心O 点,介质的阻力与速度成正比,求质点的运动规律.

3. 在图5.12 所示的电路中先将开关K 拨向A,达到稳定状态后再将开关K 拨向B,求电压$V_C(t)$及电流$I(t)$. 已知$E=20$ V,$C=0.5\times10^{-6}$F,$L=0.1$ H,$R=2000\ \Omega$.

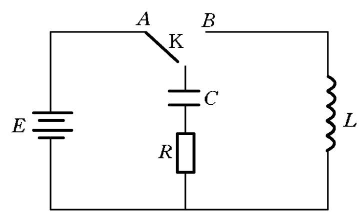


图5.12

4. 设函数$y=y(x)$满足微分方程$y''-3y'+2y=2e^x$,且其图形在点(0,1)处的切线与曲线$y=x^2-x+1$ 在该点的切线重合. 求函数$y=y(x)$.

5. 一质量均匀的链条挂在一无摩擦的钉子上,运动开始时,链条的一边下垂8 m,另一边下垂10 m. 试问整个链条滑过钉子需多少时间?

6. 设有长度为l 的弹簧,其上端固定,用五个都为m 的重物同时挂于弹簧下端,使弹簧伸长了$5a$. 今突然取去其中的一个重物,使弹簧由静止状态开始振动. 若不计弹簧本身重量,求所挂重物的运动规律.

7. 一质点徐徐沉入液体,当下沉时,液体的阻力与下沉速度成正比,求此质点的运动规律.

8. 弹簧的弹性力与其伸缩量成正比. 设长度增加1 cm 时,弹性力等于1 kg. 现把2 kg 的重物悬挂在弹簧上,如果先稍微把重物往下拉,然后放开它,求重物由此所产生的振动周期.

9. 设重量为4 kg 的物体悬挂在弹簧上,使弹簧伸长1 cm. 如果弹簧的上端作铅直的简谐振动,即$y=2\sin 30t$,且在初始时刻重物处于静止状态(介质阻力不计),求重物的运动规律.

10. 设$f(0)=0, f'(x)=1+\int_0^x[6\sin^2 t-f(t)]\mathrm{d}t$,其中$f(x)$二次可微,求$f(x)$.

答案与提示

(A)

2. (1) $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$; (2) $y=(C_1+C_2x)e^{\frac{3}{2}x}$; (3) $e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$;
   (4) $y=(C_1+C_2x)e^{x}$; (5) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$;
   (6) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+C_3e^{5x}$.
3. (1) $y=3e^{-2x}\sin 5x$; (2) $y=e^{-\frac{x}{2}}(2+x)$; (3) $y=4e^{x}+2e^{3x}$; (4) $y=2\cos 5x+\sin 5x$.
4. (1) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}+\dfrac{1}{5}\cos x+\dfrac{3}{5}\sin x$; (2) $y=C_1\cos x+C_2\sin x-2x\cos x$;
   (3) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-e^{-x}(\cos 2x-4\sin 2x)$;
   (4) $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\dfrac{e^{x}}{1+a^2}$; (5) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{11}{8}$;
   (6) $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+e^{2x}(x+3)$; (7) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{3}{2}e^{x}(x-1)-\dfrac{1}{2}x\cos x$;
   (8) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}\cos 2x$.
5. (1) $y=-\cos x-\dfrac{1}{3}\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 2x$; (2) $y=-5e^{x}+\dfrac{7}{2}e^{2x}+\dfrac{5}{2}$;
   (3) $y=(x^2-x+1)e^{x}-e^{-x}$; (4) $y=\dfrac{11}{16}+\dfrac{5}{16}e^{4x}-\dfrac{5}{4}x$.
6. (1) $a\neq-2$ 时, $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\dfrac{1}{(a+2)^2}e^{ax}$; $a=-2$ 时, $y=(C_1+C_2x+\dfrac{1}{2}x^2)e^{-2x}$;
   (2) $a\neq1$ 时, $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\dfrac{1}{a^2-1}\sin x$; $a=1$ 时, $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{1}{2}x\cos x$.
7. (1) $y=(C_1+C_2\ln x)x$; (2) $y=C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)+\dfrac{x}{2}$;
   (3) $y=C_1x^{n}+C_2x^{-(n+1)}$; (4) $y=C_1+\dfrac{C_2}{x}+3x(2\ln x-3)$;
   (5) $y=x[C_1\cos(\sqrt{3}\ln x)]+C_2\sin(\sqrt{3}\ln x)+\dfrac{x}{2}\sin(\ln x)$;
   (6) $y=C_1x^2+C_2x^2\ln x$;
8. $y=x(\ln x+\ln^2x)$.

(B)

1. $x=A\cos\sqrt{\dfrac{g}{a}}t$.
2. $x=\dfrac{v_0}{\sqrt{p^2+4q}}\left(\exp\left[\dfrac{-p+\sqrt{p^2+4q}}{2}t\right]-\exp\left[\dfrac{-p-\sqrt{p^2+4q}}{2}t\right]\right)$, $p=\dfrac{k_2}{m}$, $q=\dfrac{k_1}{m}$.
3. $V_C(t)=\dfrac{10}{9}(19e^{-10^3t}-e^{-1.9\times10^4t})$ V, $I(t)=\dfrac{19}{18}\times10^{-2}(e^{-1.9\times10^4t}-e^{-10^3t})$ A.
4. $y=e^{x}(1-2x)$.
5. $T=\dfrac{3}{\sqrt{g}}\ln(9+4\sqrt{5})$.
6. $x=a\cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{4a}}t\right)$.

7. $x=\frac{mg}{k}-\frac{m^2g}{k^2}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$.

8. $T=2\pi\sqrt{\frac{2}{g}}$.

9. $x=\frac{1}{g(g-900)}(2g\sin 30t-60\sqrt{g}\sin\sqrt{g}t)$.

10. $f(x)=-4\cos x+\sin x+3+\cos 2x$.

5.7　微分方程组

单个微分方程有丰富的实际背景,如单种群的增长和衰减、振动等等.这一节我们将介绍方程组的情形.微分方程组同样也有极其广阔的实际背景,在这里先介绍一个有趣的生态系统模型.

捕食者-食饵模型

考虑两个相互作用的生物种群,其中一个是捕食者,而另一个是食饵,即一个群体完全是另一个群体的捕食对象.这样两个群体组成一个捕食系统.我们来考虑一种简化的、理想化的情形(即略去若干因素而不予考虑).

假设知更鸟是捕食者,小爬虫(我们姑且叫做虫子)是食饵.设在时刻 t 有 y 千只知更鸟和 x 百万只虫子.如果没有知更鸟存在,则虫子将按指数增长,即 x 满足下列方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax,\quad a>0\text{ 为常数}.$$

如果知更鸟单独存在,没有虫子供其捕食,则 y 服从下面的规律而减少:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-by,\quad b>0\text{ 为常数}.$$

通常我们称常数 a 为虫子的出生率,而 b 称为知更鸟的死亡率.

现在把这两个群体的相互影响考虑进去,那么就有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax-(\text{知更鸟对虫子的作用}),$$

这里知更鸟对虫子的作用是坏作用,因为知更鸟要吃掉虫子.另一方面,虫子则为知更鸟提供食物,因而有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-by+(\text{虫子对知更鸟的作用}).$$

那么,这两个群体的相互间作用实际上是怎样的呢?我们设想一个群体对另一个群体的影响与所谓“遭遇战”的次数有关(“遭遇战”是指知更鸟遇到虫子并吃掉它).而遭遇战的数目又与群体总数的乘积成正比,这是因为群体总数越多,遭遇的机会也就越多.因此,我们假设

$$\frac{dx}{dt}=ax-cxy \quad 及 \quad \frac{dy}{dt}=-by+kxy.$$

其中 c 和 k 是正的常数. 这样,我们就建立了一个描述捕食者-食饵系统的微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax-cxy,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-bx+kxy.\end{cases} \tag{5.7.1}$$

这个方程组称为Lotka-Volterra **方程组**.

5.7.1　微分方程组的基本概念

如果有多个未知函数的多个微分方程联立,其中微分方程的个数等于未知函数的个数,则称这多个联立的方程为一个**微分方程组**. 在微分方程组所含有的所有未知函数中,最高阶导数的阶数称为微分方程组的**阶**. 例如方程组(5.7.1)就是一个**一阶微分方程组**.

下面我们以两个未知函数的情形介绍几个有关的基本概念,多个未知函数的情形与此类似.

令 t 表示自变量,x 和 y 表示因变量,即 $x=x(t)$,$y=y(t)$. 一阶微分方程组的**一般形式**为

$$\begin{cases}F_1\left(t,x,y,\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt}\right)=0,\\[2mm] F_2\left(t,x,y,\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt}\right)=0.\end{cases} \tag{5.7.2}$$

有时可写成导数已解出的**典则形式**

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f_1(t,x,y),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=f_2(t,x,y).\end{cases} \tag{5.7.3}$$

条件

$$x\big|_{t=t_0}=x_0,\quad y\big|_{t=t_0}=y_0 \tag{5.7.4}$$

称为一阶微分方程组的**初始条件**. 微分方程组连同初始条件一起,称为微分方程组的**定解问题**.

对于含两个未知函数的一阶微分方程组来说,含有两个独立的任意常数的解称为它的**通解**,记为

$$\begin{cases}x=x(t,C_1,C_2),\\ y=y(t,C_1,C_2).\end{cases} \tag{5.7.5}$$

如果将通解写成隐函数的形式,则

$$\begin{cases} \Phi_1(t,x,y,C_1,C_2)=0, \\ \Phi_2(t,x,y,C_1,C_2)=0 \end{cases} \tag{5.7.6}$$

称为一阶微分方程组的**通积分**. 通积分也称为通解.

二阶微分方程组的**一般形式**为

$$\begin{cases} F_1\left(t,x,y,\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt},\dfrac{d^2x}{dt^2},\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=0, \\ F_2\left(t,x,y,\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt},\dfrac{d^2x}{dt^2},\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=0. \end{cases} \tag{5.7.7}$$

其**典则形式**为

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=f_1\left(t,x,y,\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt}\right), \\ \dfrac{d^2x}{dt^2}=f_2\left(t,x,y,\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt}\right). \end{cases} \tag{5.7.8}$$

条件 $$x\big|_{t=t_0}=x_0,\quad y\big|_{t=t_0}=y_0,\quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}=x'_0,\quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}=y'_0 \tag{5.7.9}$$

称为二阶微分方程组的**初始条件**.

对于含两个未知函数的二阶微分方程组,含有4个独立任意常数的解称为它的**通解**,记为

$$\begin{cases} x=x(t,C_1,C_2,C_3,C_4), \\ y=y(t,C_1,C_2,C_3,C_4). \end{cases} \tag{5.7.10}$$

若通解写成隐函数形式,则

$$\begin{cases} \Phi_1(t,x,y,C_1,C_2,C_3,C_4)=0, \\ \Phi_2(t,x,y,C_1,C_2,C_3,C_4)=0 \end{cases} \tag{5.7.11}$$

称为二阶微分方程组的通积分.

5.7.2 常系数线性微分方程组解法举例

如果微分方程组中的每一个微分方程都是常系数线性微分方程,则称其为**常系数线性微分方程组**. 下面我们通过例子来介绍**消元解法**.

例 5.7.1 求解微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-3x-y, & (5.7.12) \\ \dfrac{dy}{dt}=x-y. & (5.7.13) \end{cases}$$

解 由方程(5.7.12)解出 y,得

$$y=-\frac{dx}{dt}-3x, \tag{5.7.14}$$

求导得
$$\frac{dy}{dt}=-\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}. \tag{5.7.15}$$
将(5.7.14)、(5.7.15)式代入(5.7.13)式,得
$$-\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}=x-\left(-\frac{dx}{dt}-3x\right),$$
即
$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=0. \tag{5.7.16}$$
这是一个二阶常系数齐次线性方程,解出
$$x=(C_1+C_2t)e^{-2t} \tag{5.7.17}$$
将(5.7.17)式代入(5.7.14)式,得
$$\begin{aligned}y&=-\frac{dx}{dt}-3x=-\left[C_2e^{-2t}-2(C_1+C_2t)e^{-2t}\right]-3(C_1+C_2t)e^{-2t}\\&=-(C_1+C_2+C_2t)e^{-2t}.\end{aligned}$$
于是通解为
$$\begin{cases}x=(C_1+C_2t)e^{-2t},\\y=-(C_1+C_2+C_2t)e^{-2t}.\end{cases}$$
□

例 5.7.2 求解定解问题
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x-2y, & (5.7.18)\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=2x-y, & (5.7.19)\\[2mm]x\big|_{t=0}=1,y\big|_{t=0}=0. & (5.7.20)\end{cases}$$

解 设法消去未知函数x.由(5.7.19)式得
$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}+y\right), \tag{5.7.21}$$
求导得
$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\right). \tag{5.7.22}$$
将(5.7.21)、(5.7.22)式代入(5.7.18)式,并整理得
$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0,$$
解出
$$y=(C_1+C_2t)e^t. \tag{5.7.23}$$
再把(7.23)式代入(7.21)式,得
$$x=\frac{1}{2}(2C_1+C_2+2C_2t)e^t. \tag{5.7.24}$$
于是(5.7.23)、(5.7.24)两式给出方程组的通解.

最后将初始条件(5.7.20)代入(5.7.23)、(5.7.24)式,得
$$\begin{cases}1=\dfrac{1}{2}(2C_1+C_2),\\0=C_1.\end{cases}$$

即求得$C_1=0$,$C_2=2$.因此,所给定解问题的解为

$$\begin{cases} x=(1+2t)\mathrm{e}^t, \\ y=2t\mathrm{e}^t. \end{cases}$$

□

我们把消元解法的步骤叙述如下:

① 从方程组中消去一些未知函数及其各阶导数,得到只含一个未知函数的高阶常系数线性微分方程.

② 解此高阶微分方程,求出满足该方程的未知函数.

③ 把已求得的函数代入原方程组,再求出其余的未知函数.

习 题 5.7

(A)

1. 求下列微分方程组的通解或特解:

(1)$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x; \end{cases}$ (2)$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y, x(0)=0, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x, y(0)=1; \end{cases}$ (3)$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+2y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=4x+3y; \end{cases}$ (4)$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x-5y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x-y. \end{cases}$

2. 炮弹以初速度v_0且与水平线成α角从炮口射出.设空气阻力与速度成正比,求炮弹的运动方程.

3. 设质点M受力心O的吸引力与距离成正比,今有一质点从与力心相距a的点A出发,以垂直于线段OA的初速度v_0开始运动,求质点M的轨迹.

答案与提示

(A)

1. (1) $x=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-t}, y=C_1\mathrm{e}^t-C_2\mathrm{e}^{-t}$; (2) $x=\sin t, y=\cos t$;

(3) $x=C_1\mathrm{e}^{5t}+C_2\mathrm{e}^{-t}, y=2C_1\mathrm{e}^{5t}-C_2\mathrm{e}^{-t}$;

(4) $x=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t, y=\dfrac{C_1-3C_2}{5}\cos 3t+\dfrac{C_2+3C_1}{5}\sin 3t$.

2. $x=\dfrac{1}{k}v_0 m\cos\alpha(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}), y=\dfrac{m}{k^2}(kv_0\sin\alpha+mg)(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t})-\dfrac{mg}{k}t$.

3. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{k^2y^2}{mv_0^2}=1$.

总 习 题 (5)

1. 填空题:

(1) $(y''')^3+(y')^4+x^2+x+1=0$是______阶微分方程.

(2) 曲线族$y=\cos(x+c)$(c为任意常数)所满足的一阶微分方程是______.

(3) 已知线性齐次方程的基础解系为$y_1=\mathrm{e}^x$,$y_2=x\mathrm{e}^x$,则该方程为______.

(4) 设方程$y''+a(x)y'+b(x)y=0$有非零特解$y=u(x)$,则与其线性无关的特解为______.

(5) 设$y_1=3,y_2=3+x^2,y_3=3+x^2+e^x$都是方程

$$(x^2-2x)y''-(x^2-2)y'+(2x-2)y=6x-6$$

的解,则方程的通解为______.

2. 选择题(四个答案中只有一个是正确的):

(1) 若y_1和y_2是非齐次线性方程$y''+ay'+by=f(x)$的两个特解,则下面结论正确的是(　).

(A) y_1+y_2是非齐次线性方程的解;

(B) y_1-y_2是非齐次线性方程的解;

(C) y_1+y_2是$y''+ay'+by=0$的解;

(D) y_1-y_2是$y''+ay'+by=0$的解.

(2) 方程$(y-\ln x)dx+xdy=0$是(　).

(A)可分离变量方程;　(B)一阶线性非齐次方程;

(C)一阶线性齐次方程;　(D)非线性方程.

(3) 下述函数中(　)可能是二阶微分方程$f(x,y,y'')=0$的通解.

(A) $C_1x+C_2y=0$;　(B) $y-C_1^2=e^x+C_2$;

(C) $C_1y=C_2e^{C_3x}$;　(D) $y=C_1\ln x+C_2x+C_3$.

(4) 某种植物的年生长率随着其当前高度和成熟高度与当前高度之差的乘积而变化,要给这一问题以恰当的数学描述,应选取参量(　).

(A) 年变化率,当前高度,成熟高度;

(B) 年变化率,当前高度,成熟高度,比例常数;

(C) 当前高度,成熟高度;

(D) 当前高度,成熟高度,比例常数.

(5) 上述问题(4)可描述为(　).

(A) $y'(t)=y(t)[H(t)-y(t)]$;　(B) $y'(t)=y(t)[H-y(t)]$;

(C) $y'(t)=ky(t)[H-y(t)]$;　(D) $y'(t)=ky(t)[H(t)-y(t)]$.

3. 已知意大利在1980年的人口总数为5 700万.假定人口的年增长率保持为2%,试求2000年的人口总数.

4. 设y_1,y_2,y_3是线性方程$y'+P(x)y=Q(x)$的三个相异特解.证明$\dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}$是常数.

5. 在某一人群中推广新技术是通过其中已掌握新技术的人进行的.设该人群的总人数为N.在$t=0$时刻已掌握新技术的人数为x_0,在任意时刻t已掌握新技术的人数为$x(t)$(将$x(t)$视为连续可微变量),其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比,比例常数$k>0$,求$x(t)$.

6. 设曲线L的极坐标方程为$r=r(\theta)$,$M(r,\theta)$为L上任一点,$M_0(2,0)$为L上一定点.若极径OM_0,OM与曲线L所围成的曲边扇形面积值等于L上M_0,M两点间弧长值的一半,试求曲线L的方程.

7. 有一种球状的降血压药丸,直径为0.50 cm.它在胃中溶解时,其半径变小的速度与药丸的表面积成正比,实验室观察表明,当药丸吞下去两分钟后,直径从0.50 cm减少到0.38 cm.问要花多少分钟药丸的直径才会减小到0.02 cm(即几乎完全溶解)?(提示:单位球的表面积为4π.)

8. 物体下落时,空气阻力可以认为与速度的平方成正比.设初速为零,求运动规律.

9. 设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^{x}$ 的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^{x}$,试确定常数 α, β, γ,并求该方程的通解.

10. 求方程 $y''-4y'+3y=0$ 的积分曲线方程,使其在点 $(0,2)$ 处与直线 $2x-2y+9=0$ 相切.

11. 求方程 $y''+(4x+e^{2y})(y')^{3}=0$ 的通解. $\left(提示:\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^{-1}.\right)$

12. 设 $f(x)$ 为连续函数,

(1) 求初值问题 $y'+ay=f(x)$, $y(0)=0$ 的解 $y(x)$,其中 $a>0$ 为常数;

(2) 若 $|f(x)|\leqslant K$ (K 为常数),证明当 $x\geqslant 0$ 时,有 $|y(x)|\leqslant \dfrac{K}{a}(1-e^{-ax})$.

13. 设函数 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 分别满足下面的关系式:

$$u_1'=a(x)u_1+v(x),\quad u_1(0)=C,\tag{1}$$

$$u_2'\leqslant a(x)u_2+v(x),\quad u_2(0)=C,\tag{2}$$

其中 $a(x)$, $v(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 上连续, C 为常数. 证明不等式

$$u_2(x)\leqslant u_1(x),\quad x\geqslant 0.$$

14. 给定方程

$$y''-a(x)y=0,\tag{1}$$

其中 $a(x)\in C[0,+\infty)$,且 $a(x)>0$. 设 $y(x)$ 是方程的满足初始条件

$$y(0)=y_0,\quad y'(0)=y'_0\tag{2}$$

的解,其中 $y_0>0$, $y'_0>0$. 证明:当 $x\geqslant 0$ 时,函数 $y(x)y'(x)$ 及 $y(x)$ 都是递增的正函数.

15. 设连续函数 $f(x)$ 具有性质 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$,且 $f'(0)=4$. 试导出 $f(x)$ 所满足的微分方程,并求出 $f(x)$.

16. 设微分方程的初值问题

$$\frac{du(t)}{dt}=u(t)+\int_0^1 u(s)ds,\quad u(0)=1$$

有唯一解,求 $u(t)$.

17. 求满足条件 $\int_0^1 f(tx)dt=nf(x)-1$ ($n>0, n\neq 1$) 的连续函数 $f(x)$.

18. 设 $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$,其中 $f(x)$ 为连续函数. 求 $f(x)$.

答案与提示

1. (1) 3; (2) $y'=-\sqrt{1-y^2}$; (3) $y''-2y'+1=0$;

(4) $y=u\displaystyle\int \frac{1}{u^2}e^{-\int a(x)dx}dx$; (5) $y=C_1e^{x}+C_2x^2+3$.

2. (1) (D); (2) (B); (3) (C); (4) (D); (5) (C).

3. 8 500 万.

5. $x(t)=Nx_0e^{kNt}[N+x_0e^{kNt}-x_0]^{-1}$.

6. $r=\csc\left(\dfrac{\pi}{6}\mp\theta\right)$,或 $x\mp\sqrt{3}\,y=2$.

7. 约 152 min.

8. $x=\dfrac{m}{k}\ln\cosh\left(t\sqrt{g\dfrac{k}{m}}\right)$.

9. $\alpha=-3,\beta=2,\gamma=-1$；$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^x$.

10. $y=\dfrac{1}{2}(5e^x-e^{3x})$.

11. $x=C_1e^{-2y}+C_2e^{2y}+\dfrac{1}{4}ye^{2y}$.

12. (1)$y(x)=e^{-ax}\left[\int_0^x f(t)e^{at}dt+C\right]$，$C=0$.

13. 令$w(x)=u_2(x)-u_1(x)$，设法证明$\dfrac{d}{dx}\left(w(x)e^{-\int_0^x a(t)dt}\right)\leqslant 0$.

14. 设法证明在$x\geqslant 0$上，$[y(x)y'(x)]'>0$，$y'(x)>0$.

15. 先求出$f(0)=0$，再利用导数定义求得$f'(x)=f'(0)=[1+f^2(x)]$，最后得$f(x)=\tan 4x$.

16. 令 $a=\int_0^1 u(s)ds$. $u(t)=\dfrac{2}{3-e}e^t-\dfrac{e-1}{3-e}$.

17. $f(x)=Cx^{-\frac{n-1}{n}}+\dfrac{1}{n-1}$.

18. $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{x}{2}\cos x$.

附录一　积　分　表

(一)含有 $ax+b$ 的积分

1.$\int \frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$.

2.$\int (ax+b)^{\alpha}dx=\frac{1}{a(\alpha+1)}(ax+b)^{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1)$.

3.$\int \frac{x}{ax+b}dx=\frac{1}{a^2}(ax+b-b\ln|ax+b|)+C$.

4.$\int \frac{x^2}{ax+b}dx=\frac{1}{a^3}\left[\frac{1}{2}(ax+b)^2-2b(ax+b)+b^2\ln|ax+b|\right]+C$.

5.$\int \frac{dx}{x(ax+b)}=-\frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C$.

6.$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)}=-\frac{1}{bx}+\frac{a}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C$.

7.$\int \frac{x}{(ax+b)^2}dx=\frac{1}{a^2}\left[\ln|ax+b|+\frac{b}{ax+b}\right]+C$.

8.$\int \frac{x^2}{(ax+b)^2}dx=\frac{1}{a^3}\left[ax+b-2b\ln|ax+b|-\frac{b^2}{ax+b}\right]+C$.

9.$\int \frac{dx}{x(ax+b)^2}=\frac{1}{b(ax+b)}-\frac{1}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|+C$.

(二)含有 $\sqrt{ax+b}$ 的积分

10.$\int \sqrt{ax+b}\,dx=\frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3}+C$.

11.$\int x\sqrt{ax+b}\,dx=\frac{2}{15a^2}(3ax-2b)\sqrt{(ax+b)^3}+C$.

12.$\int x^2\sqrt{ax+b}\,dx=\frac{2}{105a^3}(15a^2x^2-12abx+8b^2)\sqrt{(ax+b)^3}+C$.

13.$\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}dx=\frac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b}+C$.

14.$\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}dx=\frac{2}{15a^3}(3a^2x^2-4abx+8b^2)\sqrt{ax+b}+C$.

15.$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right|+C & (b>0),\\ \frac{2}{\sqrt{-b}}\arctan\sqrt{\frac{ax+b}{-b}}+C & (b<0).\end{cases}$$

16.$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}}=-\frac{\sqrt{ax+b}}{bx}-\frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}+C$.

17.$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}dx=2\sqrt{ax+b}+b\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}+C$.

18.$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{ax+b}}{x}+\frac{a}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}+C$.

(三)含有 $x^2 \pm a^2$ 的积分

19. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$.

20. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$.

21. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

(四)含有 $ax^2+b(a>0)$ 的积分

22. $$\int \frac{dx}{ax^2+b} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{a}\,x-\sqrt{-b}}{\sqrt{a}\,x+\sqrt{-b}}\right| + C & (b<0), \\ \frac{2}{\sqrt{ab}}\arctan\sqrt{\frac{a}{b}}\,x + C & (b>0). \end{cases}$$

23. $\int \frac{x}{ax^2+b}dx = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+b| + C$.

24. $\int \frac{x^2}{ax^2+b}dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{ax^2+b}$.

25. $\int \frac{dx}{x(ax^2+b)} = \frac{1}{2b}\ln\frac{x^2}{|ax^2+b|} + C$.

26. $\int \frac{dx}{x^2(ax^2+b)} = -\frac{1}{bx} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{ax^2+b}$.

27. $\int \frac{dx}{x^3(ax^2+b)} = \frac{a}{2b^2}\ln\frac{|ax^2+b|}{x^2} - \frac{1}{2bx^2} + C$.

28. $\int \frac{dx}{(ax^2+b)^2} = \frac{x}{2b(ax^2+b)} + \frac{1}{2b}\int \frac{dx}{ax^2+b}$.

(五)含有 $ax^2+bx+c(a>0)$ 的积分

29. $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| + C & (b^2>4ac), \\ \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C & (b^2<4ac). \end{cases}$$

30. $\int \frac{x}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$.

(六)含有 $\sqrt{x^2+a^2}(a>0)$ 的积分

31. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{arsh}\frac{x}{a} + C_1 = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$.

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$.

33. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \sqrt{x^2+a^2} + C$.

34. $\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$.

35. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$.

36. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$.

37. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|}+C.$

38. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C.$

39. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$

40. $\int \sqrt{(x^2+a^2)^3}dx = \frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2}+\frac{3a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$

41. $\int x\sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+a^2)^3}+C.$

42. $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$

43. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2+a^2}+a\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|}+C.$

44. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}+\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$

(七)含有$\sqrt{x^2-a^2}\,(a>0)$的积分

45. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x}{|x|}\operatorname{arch}\frac{|x|}{a}+C_1 = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$

46. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C.$

47. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \sqrt{x^2-a^2}+C.$

48. $\int \frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}+C.$

49. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$

50. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$

51. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{|x|}+C.$

52. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+C.$

53. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$

54. $\int \sqrt{(x^2-a^2)^3}dx = \frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2}+\frac{3a^4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$

55. $\int x\sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-a^2)^3}+C.$

56. $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$

57. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{|x|}+C.$

58. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C.$

(八)含有$\sqrt{a^2-x^2}(a>0)$的积分

59. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

60. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C.$

61. $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\sqrt{a^2-x^2} + C.$

62. $\int \frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}dx = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} + C.$

63. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

64. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}dx = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \arcsin\frac{x}{a} + C.$

65. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{|x|} + C.$

66. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C.$

67. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

68. $\int \sqrt{(a^2-x^2)^3}dx = \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

69. $\int x\sqrt{a^2-x^2}dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + C.$

70. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

71. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2-x^2} + a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{|x|} + C.$

72. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{a} + C.$

(九)含有$\sqrt{\pm ax^2+bx+c}(a>0)$的积分

73. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}| + C.$

74. $\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8\sqrt{a^3}}\ln|2ax + b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}| + C.$

75. $\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2\sqrt{a^3}}\ln|2ax + b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}| + C.$

76. $\int \frac{dx}{\sqrt{c+bx-ax^2}} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$

77. $\int\sqrt{c+bx-ax^2}\,dx=\frac{2ax-b}{4a}\sqrt{c+bx-ax^2}+\frac{b^2+4ac}{8\sqrt{a^3}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C.$

78. $\int\frac{x}{\sqrt{c+bx-ax^2}}dx=-\frac{1}{a}\sqrt{c+bx-ax^2}+\frac{b}{2\sqrt{a^3}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C.$

(十)含有$\sqrt{\pm\frac{x-a}{x-b}}$或$\sqrt{(x-a)(b-x)}$的积分

79. $\int\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}dx=(x-b)\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}+(b-a)\ln\left(\sqrt{|x-a|}+\sqrt{|x-b|}\right)+C.$

80. $\int\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx=(x-b)\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+(b-a)\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C.$

81. $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C\quad(a<b).$

82. $\int\sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx=\frac{2x-a-b}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C\quad(a<b).$

(十一)含有三角函数的积分

83. $\int\sin x\,dx=-\cos x+C.$

84. $\int\cos x\,dx=\sin x+C.$

85. $\int\tan x\,dx=-\ln|\cos x|+C.$

86. $\int\cot x\,dx=\ln|\sin x|+C.$

87. $\int\sec x\,dx=\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C=\ln|\sec x+\tan x|+C.$

88. $\int\csc x\,dx=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C=\ln|\csc x-\cot x|+C.$

89. $\int\sec^2x\,dx=\tan x+C.$

90. $\int\csc^2x\,dx=-\cot x+C.$

91. $\int\sec x\tan x\,dx=\sec x+C.$

92. $\int\csc x\cot x\,dx=-\csc x+C.$

93. $\int\sin^2x\,dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

94. $\int\cos^2x\,dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

95. $\int\sin^nx\,dx=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx.$

96. $\int\cos^nx\,dx=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx.$

97. $\int\frac{dx}{\sin^nx}=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^{n-2}x}.$

98. $\int\frac{dx}{\cos^nx}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x}.$

99. $\int \cos^m x\sin^n x\,dx = \frac{1}{m+n}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2}x\sin^n x\,dx$

$= -\frac{1}{m+n}\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x\sin^{n-2}x\,dx.$

100. $\int \sin ax\cos bx\,dx = -\frac{1}{2(a+b)}\cos(a+b)x - \frac{1}{2(a-b)}\cos(a-b)x + C.$

101. $\int \sin ax\sin bx\,dx = -\frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C.$

102. $\int \cos ax\cos bx\,dx = \frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C.$

103. $\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{a\tan\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C \quad (a^2>b^2).$

104. $\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{a\tan\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\tan\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}\right| + C \quad (a^2<b^2).$

105. $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}{\tan\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}\right| + C \quad (a^2<b^2).$

106. $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) + C \quad (a^2>b^2).$

107. $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b}{a}\tan x\right) + C.$

108. $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x-b^2\sin^2 x} = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{b\tan x+a}{b\tan x-a}\right| + C.$

109. $\int x\sin ax\,dx = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{1}{a}x\cos ax + C.$

110. $\int x^2\sin ax\,dx = -\frac{1}{a}x^2\cos ax + \frac{2}{a^2}x\sin ax + \frac{2}{a^3}x\cos ax + C.$

111. $\int x\cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{1}{a}x\sin ax + C.$

112. $\int x^2\cos ax\,dx = \frac{1}{a}x^2\sin ax + \frac{2}{a^2}x\cos ax - \frac{2}{a^3}x\sin ax + C.$

(十二)含有反三角函数的积分(其中 $a>0$)

113. $\int \arcsin\frac{x}{a}dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C.$

114. $\int x\arcsin\frac{x}{a}dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2} + C.$

115. $\int x^2\arcsin\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2} + C.$

116. $\int \arccos\frac{x}{a}dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C.$

117. $\int x\arccos\frac{x}{a}dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a} - \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2} + C.$

118. $\int x^2\arccos\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{a} - \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2} + C.$

119. $\int \arctan\frac{x}{a}dx = x\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2) + C.$

120. $\int x\arctan\frac{x}{a}dx = \frac{1}{2}(a^2+x^2)\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}x + C.$

121. $\int x^2\arctan\frac{x}{a}dx = \frac{1}{3}x^3\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{6}x^2 + \frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2) + C.$

(十三)含有指数函数的积分

122. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C.$

123. $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C.$

124. $\int xe^{ax}dx = \frac{1}{a^2}(ax-1)e^{ax} + C.$

125. $\int x^n e^{ax}dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx.$

126. $\int xa^x dx = \frac{x}{\ln a}a^x - \frac{1}{(\ln a)^2}a^x + C.$

127. $\int x^n a^x dx = \frac{1}{\ln a}x^n a^x - \frac{n}{\ln a}\int x^{n-1}a^x dx.$

128. $\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$

129. $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx) + C.$

130. $\int e^{ax}\sin^n bx dx = \frac{1}{a^2+b^2n^2}e^{ax}\sin^{n-1}bx(a\sin bx - nb\cos bx) + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+b^2n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}bx dx.$

131. $\int e^{ax}\cos^n bx dx = \frac{1}{a^2+b^2n^2}e^{ax}\cos^{n-1}bx(a\cos bx + nb\sin bx) + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+b^2n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}bx dx.$

(十四)含有对数函数的积分

132. $\int \ln x dx = x\ln x - x + C.$

133. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x| + C.$

134. $\int x^n\ln x dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$

135. $\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}dx + C.$

136. $\int x^m(\ln x)^n dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1}(\ln x)^n - \frac{n}{m+1}\int x^m(\ln x)^{n-1}dx + C.$

(十五)含有双曲函数的积分

137. $\int \mathrm{sh}x dx = \mathrm{ch}x + C.$

138. $\int \mathrm{ch}x dx = \mathrm{sh}x + C.$

139. $\int \mathrm{th}x dx = \ln\mathrm{ch}x + C.$

140. $\int \mathrm{sh}^2x dx = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{sh}2x + C.$

141. $\int \mathrm{ch}^2x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{sh}2x + C.$

(十六)定积分

142. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \mathrm{d}x = 0$.

143. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \mathrm{d}x = 0$.

144. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi & (m = n). \end{cases}$

145. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi & (m = n). \end{cases}$

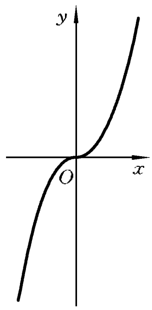
146. $\int_{0}^{\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi/2 & (m = n). \end{cases}$

147. $I_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x$, $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, $I_1 = 1$, $I_0 = \frac{\pi}{2}$.

附录二　几种常用的曲线

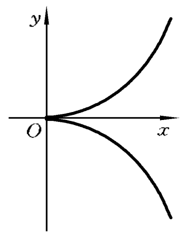
(1) 三次抛物线

$$y = ax^3.$$



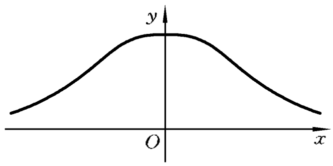
(2) 半立方抛物线

$$y^2 = ax^3.$$



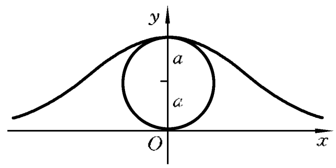
(3) 概率曲线

$$y = e^{-x^2}.$$



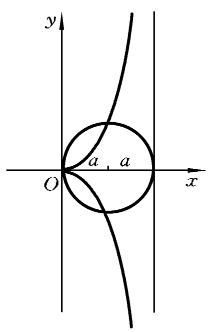
(4) 箕舌线

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}.$$



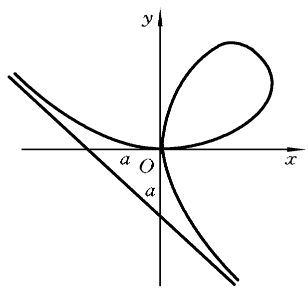
(5) 蔓叶线

$$y^2(2a - x) = x^3.$$



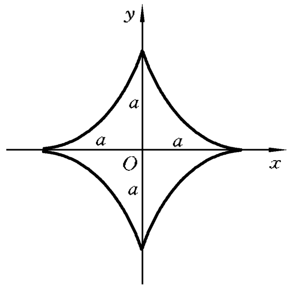
(6) 笛卡儿叶形线

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}, y = \frac{3at^2}{1 + t^3}.$$



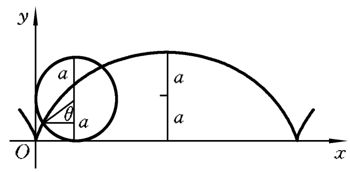
(7) 星形线(内摆线的一种)

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3},\quad \begin{cases} x=a\cos^3\theta, \\ y=a\sin^3\theta. \end{cases}$$



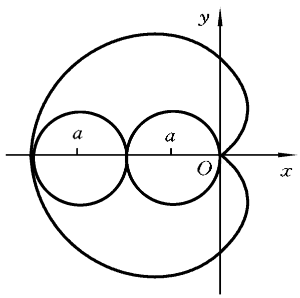
(8) 摆线

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta), \\ y=a(1-\cos\theta). \end{cases}$$



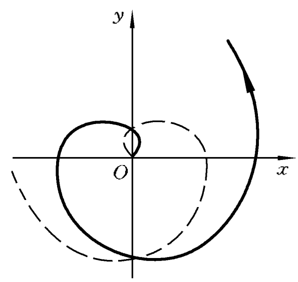
(9) 心形线(外摆线的一种)

$$x^2+y^2+ax=a\sqrt{x^2+y^2},$$
$$\rho=a(1-\cos\varphi).$$



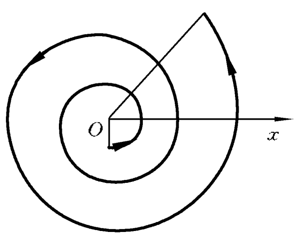
(10) 阿基米德螺线

$$\rho=a\varphi.$$



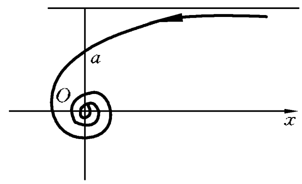
(11) 对数螺线

$$\rho=e^{a\varphi}.$$



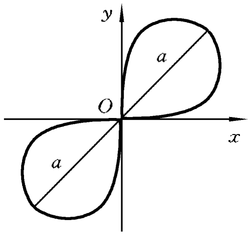
(12) 双曲螺线

$$\rho\varphi=a.$$



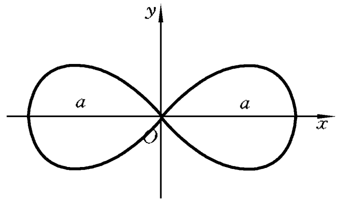
(13) 伯努利双纽线

$$(x^2+y^2)^2=2a^2xy,$$
$$\rho^2=a^2\sin 2\varphi$$



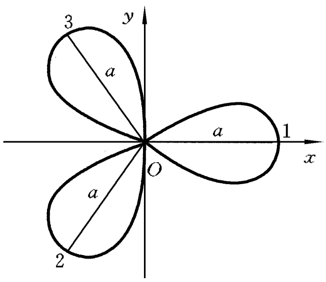
(14) 伯努利双纽线

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2),$$
$$\rho^2=a^2\cos 2\varphi$$



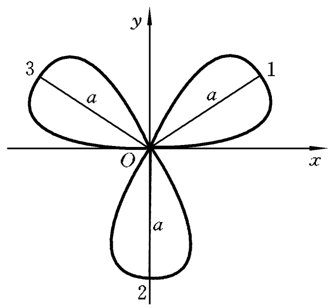
(15) 三叶玫瑰线

$$\rho=a\cos 3\varphi$$



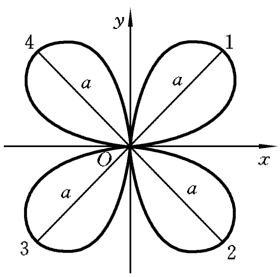
(16) 三叶玫瑰线

$$\rho=a\sin 3\varphi$$



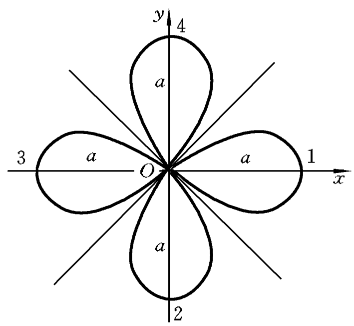
(17) 四叶玫瑰线

$$\rho=a\sin 2\varphi$$



(18) 四叶玫瑰线

$$\rho=a\cos 2\varphi$$



参 考 文 献

1 方企勤. 数学分析(第一册). 北京:高等教育出版社,1986
2 沈燮昌. 数学分析(第二册). 北京:高等教育出版社,1986
3 廖可人,李正元. 数学分析(第三册). 北京:高等教育出版社,1986
4 林源渠等. 数学分析习题集. 北京:高等教育出版社,1986
5 同济大学应用数学系. 微积分(上册). 北京:高等教育出版社,1999
6 同济大学应用数学系. 微积分(下册). 北京:高等教育出版社,2000
7 同济大学应用数学系. 高等数学(上、下册). 第五版. 北京:高等教育出版社,2002
8 欧阳光中,姚允龙. 数学分析(上、下册). 上海:复旦大学出版社,1993
9 Hallett D H, Gleason A M, et al. Calculus. John Wiley & Sons, Inc., 1994
10 McCallum W G, Hallett D H, Gleason A M, et al. Multivariable Calculus. John Wiley & Sons, Inc., 1996
11 Stein S K. Calculus and Analytic Geometry. 4th ed. McGraw-Hill Book Company, 1987
12 Braun M. Differential Equations and Their Applications. 3rd ed. Springer-Verlag New York, Inc., 1983
13 李心灿主编. 高等数学应用 205 例. 北京:高等教育出版社,1997

21 世纪数学系列教材

工科数学分析(下)

(第二版)

李大华　林　益　汤燕斌　王德荣

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析(下)(第二版)/李大华　等

武汉:华中科技大学出版社, 2004年5月

ISBN 7-5609-2122-1

Ⅰ. 工…

Ⅱ. ①李…　②林…　③汤…　④王…

Ⅲ.

Ⅳ.

工科数学分析(下)(第二版)　　李大华　等

责任编辑:周芬娜　　封面设计:

责任校对:封春英　　责任监印:

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87545012

录　　排:华大图文设计室

印　　刷:

开本: ×　1/16　　印张:　　字数:

版次:2003年　月第1版　　印次:2003年　月第1次印刷　　印数:1—5 000

ISBN 7-5609-2122-1/O17　　定价: 28.00 元

内容提要

本书是第二版,是针对我国各重点院校对数学教学的要求及教学实际予以修订的.上册内容为一元函数微积分和微分方程,下册内容为空间解析几何、多元函数微积分及无穷级数,每节末附有习题答案与提示.

本书与一般工科《高等数学》教材相比,适当地补充了实数基本定理、一致连续性、一致收敛和含参量积分等内容,加强了微积分的理论基础;注重无穷小分析等数学思想的讲解和应用;在数学逻辑性、严谨性及抽象性方面也有相应要求和训练;引进现代数学语言、术语和符号,为读者进一步学习现代数学理论和方法提供了帮助;同时注重学生的工程应用意识的训练,培养学生应用数学解决实际问题的能力.

本书结构严谨、条理清晰、通俗易懂、例题典范、习题分层、可读性强,便于使用.适用于理工科(非数学)专业中对数学要求较高的专业使用,若略去部分内容也完全适合一般工科专业使用.

前　　言

随着科学技术的飞速发展,数学的科学地位发生了巨大的变化.高技术本质上是数学技术的观念已日益为人们所共识.计算机和信息技术的迅速发展正在改变着人们对数学知识的需求,冲击着传统的观念和方法.面临着培养21世纪人才的挑战性任务,许多高等院校理工科(非数学)专业和管理、经济类专业对数学基础课程提出了新的更高的要求.数学基础课程不再仅仅是学到某些知识,为专业课程提供数学工具,更重要的是提高学生的数学素质和数学修养水平.

本书正是在这种形势下应运而生的.本书的宗旨是,在传授知识的同时,加强和拓宽基础,加强应用;注意传授数学思想,培养学生的创造性思维;着重提高学生的数学素养和能力.本书与传统的高等数学教材的主要区别是,本书加强了微积分的理论基础,注重无穷小分析的思想的运用.在数学的逻辑性、严谨性及抽象性方面也有相应的要求和训练.但本书又与数学专业用的数学分析教材不同,在内容的深度和广度上没有数学分析教材要求那么高.我们注意了对学生的工程意识的培养,即通过典型例题的介绍及相应习题的训练,培养学生运用数学知识解决实际问题的能力.基于上述理由,我们将本书定名为《工科数学分析》.

本书有以下特点.

1. 引进一些近代数学的术语、符号和概念.如集合、映射、度量性等,这将有助于学生进一步阅读使用数学工具较多的现代科技文献.

2. 拓宽和加强数学基础.本书加强了极限理论,从确界定理出发,介绍并证明了实数理论的几个基本定理;证明了有界闭区间上连续函数的基本性质;简要介绍了欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中关于点集的某些基本概念,并在此基础上引进多元函数的极限与连续性概念;增加了理科数学分析中的一些重要内容,如一致连续、一致收敛、向量值函数的导数、含参变量的积分等.这些知识不仅有实用价值,而且对学生的逻辑思维训练是十分有益的.

3. 突出数学建模,培养学生把实际问题转化为数学问题并加以解决的能力.本书除介绍微积分应用的经典例子(如物理、力学、几何等方面的例子)外,还介绍了若干工程、经济、人口、生态等领域中的例子,在习题中设置了许多实际应用的问题,这些问题在提高学生对数学应用的兴趣及能力方面有较大的作用.

4. 重视数学思想方法的训练.本书注意突出无穷小分析的思想,将逼近的思想贯穿始终.尽可能将演绎与归纳的方法有机地结合起来,通过"问题(包括背景)—观察与思考—归纳总结—给出解答"这种模式来组织若干教学内容(如最优化问题—极

值与条件极值等)，以利于培养学生的创造能力.

5. 在习题的配置上，本书把每节的习题分成(A)、(B)两类.(A)类为基本要求题，用于巩固基础知识和基本技能；(B)类为提高题，用于扩大视野和熟练技巧，提高学生的综合能力. 另外，每章还配有总习题，供学生作综合练习或复习使用.

本书适用于理工科(非数学)专业和管理、经济类专业中对数学要求较高的专业. 但如果略去理论性较强的部分及“*”号部分，一般工科及经济、管理类专业也可使用本书.

在本书的编写过程中，得到华中科技大学教务处的大力支持. 本书的第一版曾得到李楚霖教授，李静瑶、何瑞、杨林锡和乔维佳等4位副教授的支持和具体的帮助. 华中科技大学出版社的有力支持，以及责任编辑龙纯曼老师和周芬娜老师的辛勤劳动，使得本书能顺利出版并再版. 在此我们一并表示衷心的感谢!

对于书中的不足和错误，恳请专家、同行及热心的读者批评指正.

编　者

2004年3月于华中科技大学

目　录

第 6 章　向量代数与空间解析几何

到目前为止,我们讨论的基本上都是一元函数,即 $y=f(x)$,这个函数关系中只有一个自变量和一个因变量. 但是在实际问题中,经常要考虑多种因素、多方面的关系,因此必须考虑有多个自变量的情形. 为此,我们需要作一些相应的准备工作. 本章所要介绍的向量代数与空间解析几何的内容,就是这种准备的一部分.

向量是描述那些既有大小、又有方向的量,它是一种重要的数学工具,在工程技术中有着广泛的应用. 本章将介绍向量的概念及向量的几种基本运算.

我们知道,平面解析几何的知识是学习一元函数的基础. 类似地,学习多元函数微积分时,我们必须首先学习空间解析几何的基础知识. 本章将介绍空间的平面和直线的方程,平面与直线的关系,以及空间曲面、曲线的方程.

6.1　向量及其线性运算

6.1.1　空间直角坐标系

通过平面直角坐标系,可以用有序数对来表示平面上任意一点的位置. 为了确定空间中任一点的位置,我们需要建立空间直角坐标系. 为此,引进三条互相垂直的直线,称之为 x **轴**、y **轴**和 z **轴**,它们相交于一点 O,称之为**原点**. 通常将这三个坐标轴按右手系规则排列(见图6.1). 当右手握拳的方向是从 x 轴的正向到 y 轴的正向时,右手大拇指的指向便是 z 轴的正向.

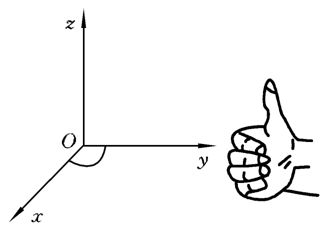


图6.1

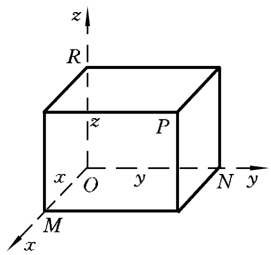


图6.2

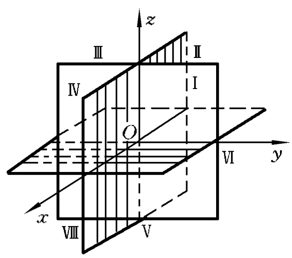


图6.3

在空间中任取一点 P,过 P 点作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴,并交 x 轴、y 轴和 z 轴于 M、N、R 三点(见图6.2). M、N、R 这三个点分别称为点 P 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的**投影**. 设 M、N、R 在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x、y 和 z. 于是,点 P 的坐标就可以表示成一个三元有序组 (x,y,z). 易见,xy 平面上的点满足 $z=0$.

反过来,给定一个三元有序组(x,y,z),我们可以在x轴上取坐标为x的点M,在y轴上取坐标为y的点N,在z轴上取坐标为z的点R,然后通过M、N及R分别作x轴、y轴及z轴的垂直平面,这三个垂直平面的交点P便是以有序组(x,y,z)为坐标的点.由此可见,空间的点与有序组(x,y,z)之间便建立了一一对应的关系.

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面,称之为**坐标面**.三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分叫做**卦限**.满足$x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$的那个卦限称为**第一卦限**(见图6.3).第一到第八卦限内点的坐标的符号如下表所示:

卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

我们知道,在实直线R上,两个点a_1与b_1之间的距离定义为

$$|b_1-a_1|=\sqrt{(b_1-a_1)^2},$$

其中"$\sqrt{\quad}$"表示取非负平方根.现在把两点间的距离公式推广到平面和空间中去.

为了表述方便,我们把由n个一维实空间(即实直线)R构成的乘积集合称为n维实空间,记作

$$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}.$$

于是,平面就是二维实空间$\mathbf{R}^2$,而空间就是三维实空间$\mathbf{R}^3$.在$\mathbf{R}^n$中,其元素称为**点**,它是n元有序组$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,其中$x_i(i=1,2,\cdots,n)$是实数.现在考察$\mathbf{R}^n$中两点间的距离.

$\mathbf{R}^2$中两点间的距离公式是熟知的,即若点$(x_1,y_1)\in\mathbf{R}^2$,则该点到原点的距离为(见图6.4)

$$\sqrt{(x_1-0)^2+(y_1-0)^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

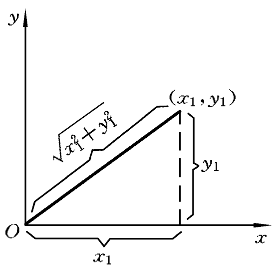


图6.4

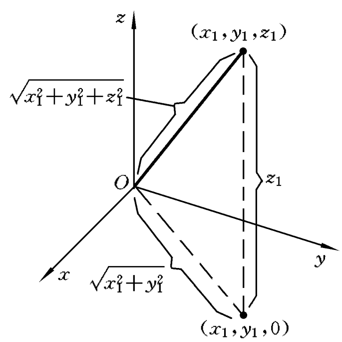


图6.5

类似地,由几何知识得知,在空间 $\mathbb{R}^3$ 中,点(x_1,y_1,z_1)到原点$(0,0,0)$的距离为(见图6.5)$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.一般地,在空间 $\mathbb{R}^n$ 中,很自然地把点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$到原点$(0,0,\cdots,0)$的距离定义为

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}.$$

由此可知,若$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$和$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$是 $\mathbb{R}^n$ 中任意两点,则可定义这两点间的距离为

$$\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+\cdots+(b_n-a_n)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}.$$

6.1.2　向量及其坐标表示

我们曾把有序组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$叫做 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点,现在在 $\mathbb{R}^n$ 中引进向量的概念.

先考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的情形.设P、Q 是平面 $\mathbb{R}^2$ 中的两个点,它们确定一条有向线段,记作$\overline{PQ}$.我们称这样的有向线段为**平面向量**,P 称为向量$\overline{PQ}$的起点,Q 称为这个向量的终点.$\overline{PQ}$的指向是这个向量的方向,而$\overline{PQ}$的长短则表示这个向量的大小.如果$\overline{P_1Q_1}$和$\overline{P_2Q_2}$是两个有向线段,它们有相同的长度和方向,则认为它们表示了同一个向量.这就是说,这两个有向线段是互相平行的,且长度、方向完全相同.有向线段具有确定的、特殊的位置,而向量则不然,图6.6中所有的箭头均表示同一个向量.这正如分数$\dfrac{2}{3}$与$\dfrac{4}{6}$表示同一个有理数那样,两个长度相等、方向相同的有向线段$\overline{P_1Q_1}$和$\overline{P_2Q_2}$表示同一个向量.因此,若一个向量能够由另一个向量经平行移动得到,则认为这两个向量**相等**.

我们可以根据不同场合的需要来选取向量的某种表示方式.有时把向量的起点放在直角坐标系的原点O 上(见图6.7(a)),有时则可以把向量放在平面上的任何地方(见图6.7(b)).

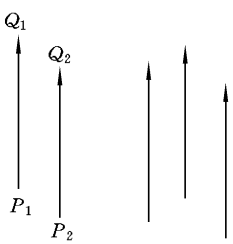


图6.6

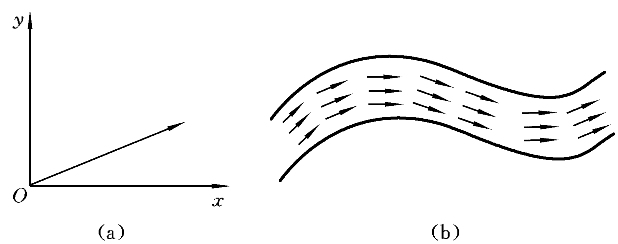


图6.7

一般地,我们把具有大小和方向的量称为**向量**.例如质点运动的速度,拖曳重物

的作用力等. 在物理上,向量常用有向线段来作为几何表示,因此,前面所述的平面向量的概念可以推广到三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中以及一般的 n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 中.

我们用黑体字母 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}$ 等表示向量,向量的长度则表示为 $|\boldsymbol{A}| = A$, $|\boldsymbol{r}| = r$ 等. 向量的长度又称为向量的**模**,向量的模是一个数量. 模为 1 的向量称为**单位向量**.

如果把向量 $\boldsymbol{A}$ 的起点放在原点 O 处,则向量 $\boldsymbol{A} = \overline{OA}$ 就与点 A 有一一对应的关系. 即给定向量 $\boldsymbol{A}$,把它的起点放在 O 点,就可以得到它的终点 A. 反之,给定一点 A,则 $\overline{OA}$ 确定一个向量. 如果平面向量 $\boldsymbol{A}$ 的起点放在坐标原点处,终点坐标是 (x, y),则称数 x 和 y 为向量 $\boldsymbol{A}$ 的(数量)**分量**. 在几何上, $|x|$ 及 $|y|$ 是向量 $\boldsymbol{A}$ 在 x 轴及 y 轴上的投影线段的长度(见图6.8). 因此,我们亦称 x 是向量 $\boldsymbol{A}$ **在 x 轴上的投影**, y 为 $\boldsymbol{A}$ **在 y 轴上的投影**. 于是,又可将向量 $\boldsymbol{A}$ 表示为

$$\boldsymbol{A} = \{x, y\}$$

并称之为 $\boldsymbol{A}$ 的坐标表示,由勾股定理知,向量 $\boldsymbol{A}$ 的模 $|\boldsymbol{A}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. 类似地,在 $\mathbb{R}^3$ 中,若向量 $\boldsymbol{A}$ 的起点在坐标原点 O 处,终点坐标为 (x, y, z),则 $\boldsymbol{A}$ 的坐标表示为

$$\boldsymbol{A} = \{x, y, z\},$$

其模 $|\boldsymbol{A}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$(见图6.9). 推而广之,我们把

$$\boldsymbol{A} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

称为 $\mathbb{R}^n$ 中起点在原点 $O = (0, 0, \cdots, 0)$、终点在 $A = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的 n 维向量,其模 $|\boldsymbol{A}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

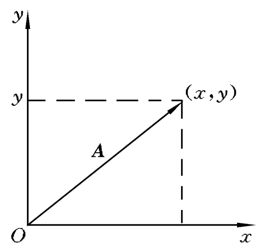


图6.8

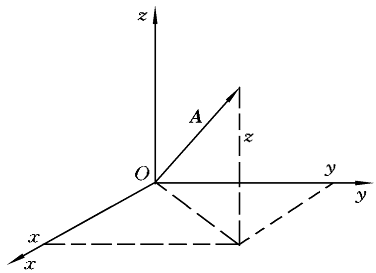


图6.9

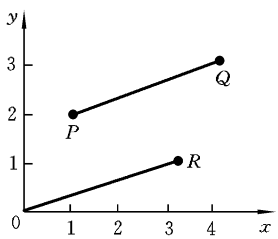


图6.10

有固定起点 O 的向量称为点 A 的**向径**,或称为**位置向量**. A 点的向径的分量就是 A 点的坐标. 分量均为零的向量称为**零向量**,记作 $\boldsymbol{0}$,它的长度是零而没有方向(或者认为它的方向是任意的). 例如,在 $\mathbb{R}^n$ 中,零向量 $\boldsymbol{0} = \{0, 0, \cdots, 0\}$.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于0或π,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **共线**(或**平行**),记作 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向可看作任意的,于是可以认为零向量与任何向量都平行.

例6.1.1　设向量 $\overline{PQ}$ 的起点为 $P(1,2)$,终点为 $Q(4,3)$,求 $\overline{PQ}$ 的坐标表示.

解　把 $\overline{PO}$ 的起点移到原点 O 处. 而将向量 $\overline{PO}$ 平行地移动成 $\overline{OR}$(见图6.10). 并

取 $|\overline{OR}|=|\overline{PQ}|$. 则$\overline{OR}$和$\overline{PQ}$表示同一个向量. 易见点$R$的坐标是$(3,1)$. 因此向量$\overline{PQ}$可表示为$\overline{PQ}=\{3,1\}$. □

例6.1.2　设$P=(4,1,-1)$,$Q=(7,-3,1)$. 求三维向量$\overline{PQ}$的模.

解　$\overline{PQ}$的三个数量分量分别为

$$x=7-4=3,\quad y=-3-1=-4,\quad z=1-(-1)=2,$$

因此$\overline{PQ}=\{3,-4,2\}$,它的模为

$$|\overline{PQ}|=\sqrt{3^2+(-4)^2+2^2}=\sqrt{29}.$$ □

6.1.3　向量的方向余弦

现在我们进一步找出向量的坐标与向量的模、方向之间的联系.

将向量$a=\{a_1,a_2,a_3\}$的起点放在坐标原点,向量a与三个坐标轴的正向的夹角分别设为α、β、γ,并规定$0\leqslant\alpha\leqslant\pi$, $0\leqslant\beta\leqslant\pi$, $0\leqslant\gamma\leqslant\pi$,则称$\alpha$、$\beta$、$\gamma$为向量$a$的**方向角**(见图6.11).

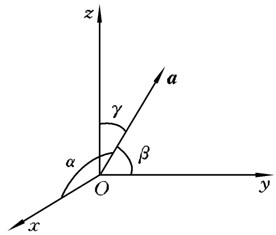


图6.11

因为向量的坐标就是向量在坐标轴上的投影,所以有

$$a_1=|a|\cos\alpha,\quad a_2=|a|\cos\beta,\quad a_3=|a|\cos\gamma.\qquad(6.1.1)$$

而
$$|a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2},$$

因此得
$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\quad \cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\quad \cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},$$

且
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

我们称$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为向量$a$的**方向余弦**.

例6.1.3　设有两点$P(1,2,\sqrt{2})$和$Q(2,1,0)$,求向量$\overline{PQ}$的模、方向余弦和方向角.

解　$\overline{PQ}=\{2-1,1-2,0-\sqrt{2}\}=\{1,-1,-\sqrt{2}\}$;

则
$$|\overline{PQ}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{1+1+2}=\sqrt{4}=2;$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{2},\quad \cos\beta=-\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\quad \beta=\frac{2\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}.$$ □

6.1.4　向量的线性运算

现在我们引进向量的加法和数乘这两种运算,称之为向量的**线性运算**.

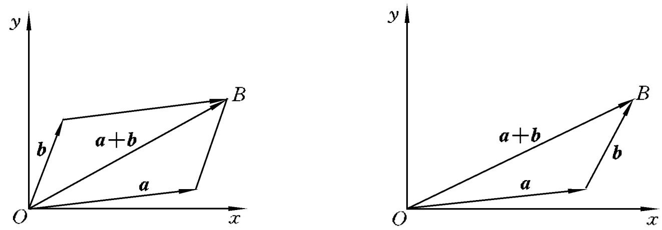
(1) 向量的加法

根据力学中两个力或两个速度的合成法则,我们用**平行四边形法则**来定义两个

向量的相加.

将两向量 a,b 平移至同一起点 O(原点),以此两向量为邻边作平行四边形,定义由起点 O 到平行四边形对顶点 B 所作成的向量 $\overline{OB}$ 为向量 a 与 b 之和(见图6.12(a)),即

$$a+b=\overline{OB}.$$



(a)　(b)

图6.12

为了解决两个平行向量相加的问题,我们进一步引进下面的**三角形法则**.

将两向量 a,b 首尾相接,则由起点到终点的向量 $\overline{OB}$ 为向量 a,b 之和(见图6.12(b)),即

$$a+b=\overline{OB}.$$

不难看出,三角形法则蕴含了平行四边形法则.

下面我们给出向量加法的坐标表示.不妨先考察平面向量的情形.设 $a=\overline{OA}=\{a_1,a_2\}$,$b=\overline{AB}=\{b_1,b_2\}$,并设 B 点的坐标为 (x,y)(见图6.13),则

$$a+b=\overline{OB}=\{x,y\}.$$

由于 A 点的坐标为 (a_1,a_2),因此

$$\overline{AB}=\{x-a_1,y-a_2\}.$$

由向量 $\overline{AB}$ 的坐标的唯一性知,

$$b_1=x-a_1,\quad b_2=y-a_2,$$

亦即有

$$x=a_1+b_1,\quad y=a_2+b_2.$$

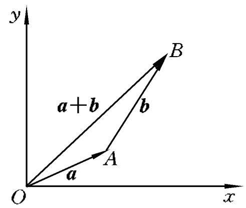


图6.13

由此可得向量 $a+b$ 的坐标表示为

$$a+b=\{a_1+b_1,a_2+b_2\}. \tag{6.1.2}$$

类似地,对于 $\mathbb{R}^3$ 中的向量 $a=\{a_1,a_2,a_3\}$,$b=\{b_1,b_2,b_3\}$,$a+b$ 的坐标表示为

$$a+b=\{a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3\}. \tag{6.1.3}$$

而对于 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 $a=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 及 $b=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$,$a+b$ 的坐标表示为

$$a+b=\{a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n\}.$$

这就是说,**两向量和的坐标等于两向量对应坐标之和**.

(2) 向量的数乘

数 k 与向量 a 的乘积(称为**数乘**)定义为一个向量.记作 ka.其大小为 $|ka|=$

$|k||a|$,方向与 a 平行. 当 $k>0$ 时,ka 与 a 同向;当 $k<0$ 时,ka 与 a 反向(见图6.14),即

$$ka=\begin{cases}|k|a, & k>0,\\ -|k|a, & k<0;\end{cases}$$

当 $k=0$ 时,$ka=0a=0$.

由向量的数乘可以导出向量的减法,即 a 与 b 相减定义为

$$a-b=a+(-1)b,$$

也就是将 b 变成 $-b$ 再和 a 相加(见图6.15).

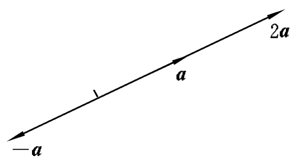


图6.14

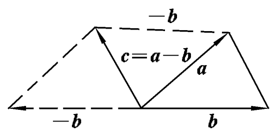


图6.15

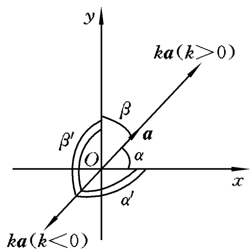


图6.16

如果用记号 e_a 表示与向量 a 同方向的单位向量,则依向量的数乘的定义,有

$$a=|a|e_a.$$

因此,一个非零向量除以它的模便可得到一个同方向的单位向量,即

$$\frac{a}{|a|}=e_a. \tag{6.1.4}$$

根据(6.1.1)式,单位向量 e_a 又可以用方向余弦表示为

$$e_a=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}. \tag{6.1.5}$$

下面我们给出向量的数乘的坐标表示. 还是以平面向量为例. 令 $a=\{a_1,a_2\}$,k 为任意实数,设 a 的方向角为 α,β,ka 的方向角为 α',β'. 当 $k>0$ 时,向量 ka 与 a 同方向,故 $\alpha=\alpha',\beta=\beta'$(见图6.16). 因此,$ka$ 的坐标为

$$x=|k||a|\cos\alpha,\quad y=|k||a|\cos\beta.$$

而 $a_1=|a|\cos\alpha, a_2=|a|\cos\beta$,故有

$$x=ka_1,\quad y=ka_2.$$

当 $k<0$ 时,向量 ka 与 a 反方向,故 $\alpha=\pi-\alpha',\beta=\pi-\beta'$. 这时,$ka$ 的坐标应为

$$x=|ka|\cos\alpha'=-k|a|(-\cos\alpha)=ka_1,$$

$$y=|ka|\cos\beta'=-k|a|(-\cos\beta)=ka_2.$$

因此,不论 k 是正数还是负数,均有

$$ka=\{ka_1,ka_2\}.$$

类似地. 对于 $\mathbf{R}^3$ 中的向量 $a=\{a_1. a_2. a_3\}$. 有

$$ka = \{ka_1, ka_2, ka_3\}.$$

对于 $\mathbf{R}^n$ 中的向量 $a = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$,则有

$$ka = \{ka_1, ka_2, \cdots, ka_n\}.$$

可以证明,**对于向量** a, b,**若** $a \neq 0$,**则** $a /\!/ b$ **的充要条件是存在实数** k,**使得** $b = ka$.(证明留作习题)

例6.1.4　在 $\mathbf{R}^2$ 中,向量 $a = \{1, -3\}$ 与向量 $b = \{2, -6\}$ 是平行的,并且它们有相同的方向.而向量 $a = \{1, -3\}$ 与向量 $d = \{2, -7\}$ 是不平行的. □

例6.1.5　设 $|a| = 5$,则

$$|3a| = |3||a| = 3 \cdot 5 = 15,$$

且 $3a$ 与 a 同向.但是,$-7a$ 与 a 的方向相反,而

$$|-7a| = |-7||a| = 7 \cdot 5 = 35.$$ □

例6.1.6　设有 $\mathbf{R}^4$ 中的向量 $a = \{1, -2, 0, 4\}$, $b = \{2, 3, -1, 1\}$,则

$$3a - 5b = \{3, -6, 0, 12\} - \{10, 15, -5, 5\} = \{-7, -21, 5, 7\}.$$ □

下面我们给出向量加法和数乘的运算律,其证明留作练习.

定理6.1.1　对于任意向量 a, b, c 以及任意的数 α, β,以下的运算律成立:

(1) $a + b = b + a$(交换律);

(2) $(a + b) + c = a + (b + c)$(结合律);

(3) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$(数乘的结合律);

(4) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$(分配律);

(5) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$(分配律).

有了向量的加法和数乘运算后,我们还可以给出向量的分解表达式.为此,以 $\mathbf{R}^3$ 为例,我们在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的三个坐标轴上分别取单位向量

$$i = \{1, 0, 0\}, \quad j = \{0, 1, 0\}, \quad k = \{0, 0, 1\},$$

称之为 $\mathbf{R}^3$ 中的**单位坐标向量**.于是任何向量 $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ 可有如下的分解表达式:

$$\begin{aligned} a &= \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, 0, 0\} + \{0, a_2, 0\} + \{0, 0, a_3\} \\ &= a_1\{1, 0, 0\} + a_2\{0, 1, 0\} + a_3\{0, 0, 1\}, \end{aligned}$$

即

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k. \tag{6.1.6}$$

(6.1.6)式称为向量 a 的**按单位坐标向量的分解表达式**,而向量 $a_1 i$、$a_2 j$、$a_3 k$ 分别称为 a 在 x 轴、y 轴、z 轴上的**分向量**.

例6.1.7　设向量 a 的起点为 $P(5, 1, 2)$,终点为 $Q(7, 2, 4)$.求单位向量 e_a 关于单位坐标向量的分解式.

解

$$a = \overline{PQ} = \{7 - 5, 2 - 1, 4 - 2\} = \{2, 1, 2\},$$

故

$$|a| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

因此，
$$e_a=\frac{a}{|a|}=\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\},$$
即
$$e_a=\frac{2}{3}i+\frac{1}{3}j+\frac{2}{3}k.$$
□

习　题　6.1

(A)

1. 回答下列问题：
   (1) $\mathbf{R}^3$的空间直角坐标系是怎样建立的？
   (2) $\mathbf{R}^n$ 中两点的距离如何定义？
   (3) 向量是怎样的量？向量与有向线段有什么不同？
   (4) 什么叫单位向量？给定一个非零向量a，你能写出一个与a同方向的单位向量吗？
   (5) 向量的模及方向余弦怎样定义？
   (6) 向量的加法与数乘是怎样定义的？
2. 在空间直角坐标系中，定出下列各点的位置：
   $A(1,2,3)$；　$B(-1,2,4)$；　$C(2,-3,-4)$；　$D(3,4,0)$；　$E(0,2,1)$；　$F(4,0,0)$.
3. 求下列各点间的距离：
   (1) $(0,0,0),(2,3,4)$；　　(2) $(4,-1,2),(-2,1,3)$.
4. 求点$M(2,-1,3)$与原点及各坐标轴间的距离.
5. 证明：以三点$A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.
6. 给定一点$(a,b,c)\in\mathbf{R}^3$，试写出该点关于(1) 各坐标面；(2) 各坐标轴；(3) 坐标原点的对称点的坐标.
7. 求下列向量的模：
   (1) $\{1,2,3\}$；　　(2) $\{-1,0,5\}$；　　(3) $\{2,-4,7\}$.
8. 求下列向量的和，并画出$a+b$：
   (1) $a=\{2,1\},b=\{1,4\}$；　　(2) $a=\{2,2\},b=\{1,-1\}$；
   (3) $a=\{1,2,0\},b=\{2,3,5\}$；　　(4) $a=\{3,-2,1\},b=\{-4,3,2\}$.
9. 求下列向量的差，并画出$a-b$：
   (1) $a=\{4,3\},b=\{2,0\}$；　　(2) $a=\{1,1\},b=\{-2,4\}$；
   (3) $a=\{2,3,4\},b=\{1,5,0\}$；　　(4) $a=\{3,4,2\},b=\{0,0,0\}$.
10. 计算并画出kA，假设$A=2i+3j+k$，而k为
    (1)2；　(2)-2；　(3)$\frac{1}{2}$；　(4)$-\frac{1}{2}$.
11. 求一个单位向量，使它与向量$i+2j+3k$同方向.
12. 求向量$a=2i+3j+4k$的方向余弦.
13. 设$A=a-b+2c,B=-a+3b-c$. 试用a、b、c表示向量$2A-3B$.

(B)

1. 设风速为每小时48 km，风向为东北. 一架飞机相对于风以每小时160 km 的速度飞行，由飞机的

尾部到飞机头部的指向是东南方向(见图6.17).

(1) 求飞机相对于地面的速度大小;

(2) 飞机相对于地面的飞行方向是什么?

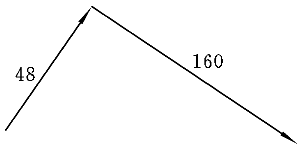


图6.17

2. 证明本节定理6.1.1中的各条运算律.

3. 证明,若$a\neq 0$,则向量a与b平行的充要条件是存在实数k,使得$b=ka$.

答案与提示

(A)

3. (1)$\sqrt{29}$; (2)$\sqrt{41}$.

4. $\overline{MO}=\sqrt{14}$,$d_x=\sqrt{10}$,$d_y=\sqrt{13}$,$d_z=\sqrt{5}$.

5. $\overline{AB}=\sqrt{49}$,$\overline{BC}=\sqrt{98}$,$\overline{CA}=\sqrt{49}$,$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$.

6. (1) $(a,b,-c)$,$(-a,b,c)$,$(a,-b,c)$; (2) $(a,-b,-c)$,$(-a,b,-c)$,$(-a,-b,c)$; (3) $(-a,-b,-c)$.

7. (1) $\sqrt{14}$; (2) $\sqrt{26}$; (3) $\sqrt{69}$.

8. (1) $\{3,5\}$; (2) $\{3,1\}$; (3) $\{3,5,5\}$; (4) $\{-1,1,3\}$.

9. (1) $\{2,3\}$; (2) $\{3,-3\}$; (3) $\{1,-2,4\}$; (4) $\{3,4,2\}$.

10. (1) $4i+6j+2k$; (2) $-4i-6j-2k$; (3) $i+\frac{3}{2}j+\frac{1}{2}k$; (4) $-i-\frac{3}{2}j-\frac{1}{2}k$.

11. $l^0=\frac{1}{\sqrt{14}}i+\frac{2}{\sqrt{14}}j+\frac{3}{\sqrt{14}}k$.

12. $\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{3}{\sqrt{29}},\frac{4}{\sqrt{29}}$.

(B)

1. (1)速度大小为167(km/h); (2) 方向为东偏南28.3°.

6.2 向量的点积与叉积

6.2.1 两个向量的点积

我们先来看一个简单的物理问题.设一物体在常力F的作用下,沿直线从P点移动到Q点.令$r=\overline{PQ}$.由物理学的知识可知,力F所作的功为

$$W=|F||r|\cos\theta,$$

其中θ为F与r的夹角(见图6.18).

由于功W是数量,这个实例表明两个向量可能产生一个数量.这是两个向量间的一种特殊运算,它在理论和实际中是经常遇到的.为此,我们给出下面的定义.

定义6.2.1(点积) 向量a与b的**点积**(或称为**数量积**)定义为

$$a \cdot b = |a||b|\cos\theta,$$

其中θ为向量a与b之间的夹角,$0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

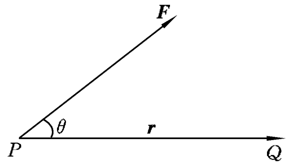


图6.18

由于$|b|\cos\theta$是向量b在向量a的方向上的**投影**(**射影**),记作b_a,因此,a与b的点积等于其中一个向量的模和另一个向量在这个向量的方向上的投影的乘积,即$a\cdot b=|a|b_a$.

例6.2.1　设b是一固定单位向量,向量a可以自由旋转,其长度为6.试问当a旋转到什么位置时可使点积$a\cdot b$达到最大值和最小值?

解　因为
$$a \cdot b = |a||b|\cos\theta = 6\cos\theta,$$
所以当a与b同向时,即$\theta=0$时,$a\cdot b$取最大值6.当a与b反向时,即$\theta=\pi$时,$a\cdot b$取最小值-6.　□

6.2.2　点积的性质

由点积的定义可以推得:

(1) 对任一向量a,有$a\cdot a=|a|^2$,例如在$\mathbf{R}^3$中,三个单位坐标向量i、j、k满足:$i\cdot i=1,j\cdot j=1,k\cdot k=1$.

(2) **两个非零向量正交(即相互垂直)的充要条件是它们的点积等于零**,即

$$a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0.$$

例如$i\cdot j=0,j\cdot k=0,i\cdot k=0$.

对于向量a,b,c及数λ,由定义知点积符合下列运算规律:

(1) $a\cdot b=b\cdot a$(交换律);

(2) $a\cdot(\lambda b)=\lambda(a\cdot b)=(\lambda a)\cdot b$(结合律);

(3) $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$(分配律).

请读者给出证明.

我们还可以利用向量的分量来计算两个向量的点积.假设在$\mathbf{R}^3$中有向量

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k,\quad b = b_1 i + b_2 j + b_3 k.$$

则
$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_1 i + a_2 j + a_3 k)\cdot(b_1 i + b_2 j + b_3 k) \\ &= a_1b_1 i\cdot i + a_1b_2 i\cdot j + a_1b_3 i\cdot k + a_2b_1 j\cdot i + a_2b_2 j\cdot j \\ &\quad + a_2b_3 j\cdot k + a_3b_1 k\cdot i + a_3b_2 k\cdot j + a_3b_3 k\cdot k \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \end{aligned}$$

一般地,在$\mathbf{R}^n$中,若$a=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,$b=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$,则

$$a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.$$

例6.2.2　设有$\mathbf{R}^3$中的三个向量:

$$u = i + \sqrt{3}k,\quad v = i + \sqrt{3}j,\quad w = \sqrt{3}i + j - k.$$

试问:其中相互正交的是哪两个向量?

解

$$\begin{aligned} v\cdot u &= (i+\sqrt{3}j+0k)\cdot(i+0j+\sqrt{3}k)\\ &= 1\cdot 1+\sqrt{3}\cdot 0+0\cdot\sqrt{3}=1,\\ v\cdot w &= (i+\sqrt{3}j+0k)\cdot(\sqrt{3}i+j-k)\\ &= 1\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot 1+0\cdot(-1)=2\sqrt{3},\\ w\cdot u &= (\sqrt{3}i+j-k)\cdot(i+0j+\sqrt{3}k)\\ &= \sqrt{3}\cdot 1+1\cdot 0+(-1)\cdot\sqrt{3}=0. \end{aligned}$$

因此,只有向量 w 和 u 是互相正交的. □

在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中,一个点又可称为一个 n 维向量. 元素 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$,一方面 a 可以看作是以 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为分量的向量,另一方面 a 又可以看作是以 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为坐标的点. 看作向量时,我们习惯上写作

$$a=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},$$

这个向量起点在原点,终点在 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 处,由于这个缘故,我们又可以把点 a 到原点的距离表示为

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}=\sqrt{a\cdot a}=|a|,$$

6.2.3 $\mathbf{R}^3$ 中两个向量的叉积

我们仍然从一个简单的物理问题开始. 我们知道,把一个钉子直接锤击入桌面,和把一个螺丝钉拧入桌面是不同的. 当然,这两种运动都有力的作用,但是,对锤击钉子的情形,所用的力和钉子的运动方向都是铅直的;而对拧螺丝钉的情形,所用的力是水平方向的(见图6.19),而螺丝钉的运动方向则不仅与力 F 垂直,并且还垂直于半径向量 r. 下面将探讨如何计算这种垂直于两个给定向量的向量.

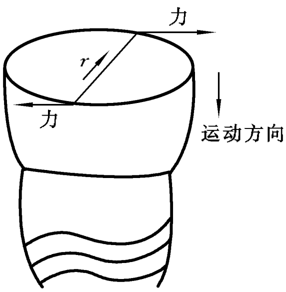


图6.19

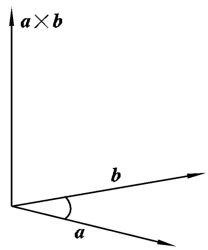


图6.20

定义 6.2.2(**叉积**)　设 $a,b\in \mathbb{R}^3$, a 与 b 的**叉积**(或称**向量积**)定义为

$$a\times b=(|a||b|\sin\theta)e_n,$$

其中θ是向量 a 和 b 的夹角, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, e_n 是垂直于 a 和 b 的单位向量, e_n 的指向按右手系规则从 a 转向 b 来确定(见图6.20).

注意,叉积 $a\times b$ 是一个向量,而点积 $a\cdot b$ 是一个数量.叉积只对三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中的向量定义,而点积则适用于一般的 $\mathbb{R}^n$ 中的向量,其中 n 是任意给定的自然数.

例6.2.3　设 i 和 j 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位坐标向量,求 $i\times j$.

解　向量 i 与 j 的模都是1,它们的夹角是 $\frac{\pi}{2}$,按右手系规则, $i\times j$ 的方向向量为 k,故

$$i\times j=\left(|i||j|\sin\frac{\pi}{2}\right)k=k.$$ □

例6.2.4　设 v 是任意的三维向量,求 $v\times v$.

解　v 与 v 的夹角为0,所以

$$v\times v=0.$$

即 v 与自身的叉积为零向量. □

例6.2.5　设 $a\in\mathbb{R}^3$ 是一个长度为2的固定向量,其方向指向 x 轴的正向, $b\in\mathbb{R}^3$ 是一个长度为3的向量,它在 xy 平面上可自由旋转.求向量 $a\times b$ 的模的最大值和最小值.当 b 旋转时, $a\times b$ 的方向如何?

解
$$|a\times b|=|a||b|\sin\theta=2\cdot 3\sin\theta=6\sin\theta,$$

因此,当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时, $|a\times b|$ 取最大值,即当 a 和 b 正交时, $|a\times b|$ 有最大值6;而当 $\theta=0$ 或 π 时,即当 a 与 b 平行时, $|a\times b|$ 有最小值0.

当 b 位于 xy 平面的第一或第二象限时, $a\times b$ 的方向指向 z 轴的正向;当 b 位于 xy 平面的第三或第四象限时, $a\times b$ 的方向指向 z 轴的负向. □

向量的叉积符合下列运算律:

(1) $a\times b=-b\times a$(反交换律);

(2) $(\lambda a)\times(b)=\lambda(a\times b)=a\times(\lambda b)$, λ 是数(结合律);

(3) $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$(分配律).

对于 $\mathbb{R}^3$ 中的单位坐标向量 i,j,k,不难验证有 $i\times j=k$, $j\times i=-k$, $k\times i=j$, $j\times k=i$, $i\times i=j\times j=k\times k=0$.所以,若

$$a=a_1i+a_2j+a_3k,\quad b=b_1i+b_2j+b_3k,$$

则
$$\begin{aligned}a\times b&=(a_1i+a_2j+a_3k)\times(b_1i+b_2j+b_3k)\\&=a_1b_1i\times i+a_1b_2i\times j+a_1b_3i\times k+a_2b_1j\times i+a_2b_2j\times j\\&\quad+a_2b_3j\times k+a_3b_1k\times i+a_3b_2k\times j+a_3b_3k\times k\\&=0+a_1b_2k+a_1b_3(-j)+a_2b_1(-k)\\&\quad+0+a_2b_3i+a_3b_1j+a_3b_2(-i)+0\end{aligned}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k.$$

为方便记忆,我们引进**行列式**的记号. 称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

为**二阶行列式**. 它含有两行,两列. 横写的称为**行**,竖写的称为**列**. 行列式中的数 a_{ij}称为行列式的**元素**,例如a_{12}就是在第1行、第2列上的元素. 由上式可知,二阶行列式就是这样两个项的代数和:一个是在从左上角到右下角的对角线(又称为行列式的**主对角线**)上两个元素的乘积,取正号;另一个是在从右上角到左下角的对角线(又称为行列式的**次对角线**)上两个元素的乘积,取负号. 例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = 2(-6) - 5(-4) = 8.$$

下面的记号是**三阶行列式**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

它含有三行、三列,实际上等于6个项的代数和:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(15 - 0) - 1(0 - (-4)) + (-3)(0 - 12) = 32.$$

于是　$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k,$$

可用行列式表示为　$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

将这个行列式展开即得

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k = a \times b.$$

例6.2.6　求向量$v = 2i + j - k$与$w = i - j + 2k$的叉积,并考察$v \times w$是否与v及w都正交.

解

$$v\times w=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$=i-5j-3k.$$

为检查 $v\times w$ 是否与 v、w 都正交,我们来计算点积:

$$v\cdot(v\times w)=(2i+j-k)\cdot(i-5j-3k)=2-5+3=0,$$
$$w\cdot(v\times w)=(i-j+2k)\cdot(i-5j-3k)=1+5-6=0.$$

所以,$v\times w$ 与 v 及 w 都正交. □

例 6.2.7　设平面上一平行四边形的顶点为$(0,0)$,(a_1,a_2),(b_1,b_2)和(a_1+b_1,a_2+b_2). 求它的面积.

解　如图 6.21 所示,该平行四边形由向量

$$A=a_1i+a_2j+0k,\quad B=b_1i+b_2j+0k$$

张成. 由向量叉积的定义知,$A\times B$ 的大小为

$$|A\times B|=|A||B|\sin\theta,$$

它恰好表示以 A、B 为邻边的平行四边形的面积. 因此,由

$$A\times B=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix}=0i+0j+(a_1b_2-a_2b_1)k$$

即得平行四边形的面积为

$$|A\times B|=|a_1b_2-a_2b_1|.$$ □

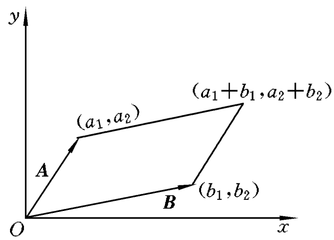


图 6.21

6.2.4　向量的混合积

定义 6.2.3(**混合积**)　三个向量 a,b,c 中两个向量的叉积与另一个向量作点积,如 $a\cdot(b\times c)$,$(a\times b)\cdot c$,称为这三个向量的**混合积**.

若已知

$$a=a_1i+a_2j+a_3k,\quad b=b_1i+b_2j+b_3k,\quad c=c_1i+c_2j+c_3k,$$

则由叉积和点积的计算公式可以推出混合积的坐标表达式:

$$a\cdot(b\times c)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

可以证明:**混合积 $a\cdot(b\times c)$ 的绝对值等于以 a,b,c 为邻边所作成的平行六面体的体积**(见图 6.22).

当混合积 $a\cdot(b\times c)=0$ 时,平行六面体的体积为零,即该六面体的三条棱落在同一平面上,换句话说,三个向量 a、b、c 共面,反之亦然. 因此我们得到下面的命题.

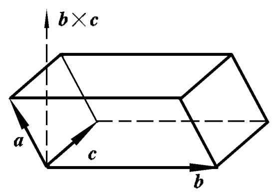


图 6.22

三向量 a、b、c 共面的充要条件是 $a \cdot (b \times c) = 0$,即

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

习　题　6.2

(A)

1. 回答下列问题:
   (1) 两个向量的点积是什么?
   (2) 如何用点积来刻划两个向量互相正交?
   (3) 两个三维向量的叉积怎样定义?
   (4) 点积与叉积的区别是什么?
   (5) 叉积的几何意义是什么?
   (6) 如何用叉积来刻划两个向量互相平行?
2. 在下列各题中计算 $A \cdot B$:
   (1) A 的长度为3,B 的长度为4,A 与 B 之间的夹角为 $\pi/4$.
   (2) A 是零向量,B 的长度是5.
   (3) $A = 2i - 3j + 5k$,$B = i - j - k$.
   (4) $A = \overline{PQ}$,$B = \overline{PR}$,其中 $P = (1,0,2)$,$Q = (1,1,-1)$,$R = (2,3,5)$.
3. 设 $A = (1,2,-5)$,$B = (1,0,1)$,$C = (0,-1,3)$,$D = (2,1,4)$. 求 $\overline{AB}$ 与 $\overline{CD}$ 之间夹角的余弦.
4. 求向量 $a = \{4,-3,4\}$ 在向量 $b = \{2,2,1\}$ 上的投影及与 a 同向的单位向量.
5. 设向量 a 与向量 $b = 2i - j + 2k$ 共线,且满足关系 $a \cdot b = -18$. 求向量 a.
6. 在下列各题中计算 $A \times B$:
   (1) $A = k$,$B = i + j$;　　(2) $A = i + j + k$,$B = i + j$;
   (3) $A = 2i - 3j + k$,$B = i + j + 2k$;　　(4) $A = i - j$,$B = j + 4k$.
7. 已知平行四边形的三个顶点是(0,0,0),(1,5,4)和(2,-1,3),求它的面积.
8. 求同时垂直于 $i - 3j + 2k$ 与 $-2i + j - 5k$ 的向量.

(B)

1. 证明:若 $B = \lambda A$,λ 是常数,则 $A \times B = 0$.
2. 证明:$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.
3. 证明混合积 $a \cdot (b \times c)$ 的绝对值等于以 a,b,c 为邻边所作成的平行六面体的体积.

答案与提示

(A)

2. (1) $6\sqrt{2}$; (2) 0; (3) 0; (4) -6.

3. $\dfrac{1}{3\sqrt{10}}$.

4. $a_b=2, e_a=\dfrac{1}{\sqrt{41}}\{4,-3,4\}$.

5. $a=\{-4,2,-4\}$.

6. (1) $-i+j$;　(2) $-i+j$;　(3) $-7i-3j+5k$;　(4) $-4i-4j+k$.

7. $13\sqrt{3}$.

8. $l=\pm(13i+j-5k)$.

(B)

2. 利用行列式的性质.

3. 注意平面六面体的高 h 等于向量 a 在向量 $b\times c$ 上的投影.

6.3　直线与平面

本节讨论直线与平面的基本几何性质.

6.3.1　$\mathbb{R}^2$ 中的直线

设 $n=ai+bj$ 是一个非零的平面向量，(x_0,y_0) 是 xy 平面上某一点. 如图 6.23 所示，显然，过点 (x_0,y_0) 且垂直于向量 n 的直线只有一条. 我们称 n 为这条直线的**法向量**. 下面我们来导出这条直线的方程.

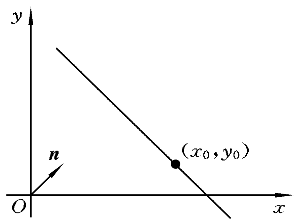


图6.23

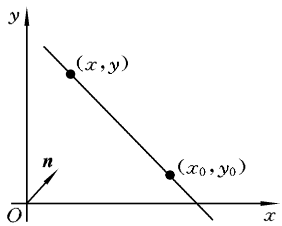


图6.24

设 (x,y) 是这条直线上的任一点(见图 6.24). 则向量 $(x-x_0)i+(y-y_0)j$ 是垂直于 n 的. 因此有

$$0=[(x-x_0)i+(y-y_0)j]\cdot n=a(x-x_0)+b(y-y_0).$$

反之，如果 $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$，则点 (x,y) 必定在过点 (x_0,y_0) 且垂直于 n 的直线上. 这是因为数 $a(x-x_0)+b(y-y_0)$ 是向量 n 与向量 $(x-x_0)i+(y-y_0)j$ 的点积，而点积等于 0 正说明这两个向量是互相垂直的. 这样我们便得到了过 (x_0,y_0) 点且垂直于向量 n 的($\mathbb{R}^2$ 中的)直线方程

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0. \tag{6.3.1}$$

若直线L的方程为$ax+by+c=0$,由中学几何课程知,点$P_1(x_1,y_1)$到L的距离为

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{6.3.2}$$

6.3.2 $\mathbb{R}^3$ 中的平面

一个非零向量垂直于一平面,是指该向量垂直于这个平面上的每一条直线(见图6.25). 如果一个非零向量n垂直于一平面π,则称n为平面π的**法向量**. 利用法向量以及向量的点积,我们可以导出平面的方程.

设$n=Ai+Bj+Ck$是平面π的法向量,$P_0=(x_0,y_0,z_0)$是平面π上一个定点,则向量

$$\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0)i+(y-y_0)j+(z-z_0)k,$$

并且n与$\overrightarrow{P_0P}$正交(见图6.26). 于是有

$$n\cdot\overrightarrow{P_0P}=(Ai+Bj+Ck)\cdot[(x-x_0)i+(y-y_0)j+(z-z_0)k],$$

即

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{6.3.3}$$

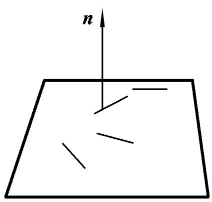


图6.25

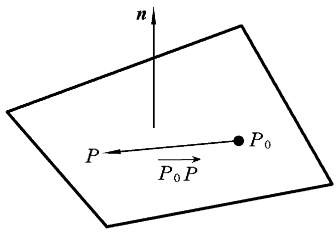


图6.26

称方程(6.3.3)为平面的**点法式方程**. 若记$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$,则方程(6.3.3)又可写成

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{6.3.4}$$

以上的推导表明,一个平面可以用一个三元一次方程表示.

反过来,如果任给一个三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{6.3.5}$$

我们任取满足该方程的一组数x_0,y_0,z_0,即

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \tag{6.3.6}$$

将(6.3.5)、(6.3.6)两式相减,得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \tag{6.3.7}$$

这恰好是通过点(x_0,y_0,z_0)且以$n=\{A,B,C\}$为法向量的平面的点法式方程. 由此可知,任何一个三元一次方程(6.3.5)的图形总是一个平面,我们称(6.3.5)为平面的**一般方程**.

如果一平面与x、y、z三轴分别交于点$P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$,将这三个点的坐标分别代入平面的一般方程(6.3.5),即得

$$A=-\frac{D}{a},\quad B=-\frac{D}{b},\quad C=-\frac{D}{c},$$

将其再代回(6.3.5)式并遍除$D(D\neq 0)$,得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{6.3.8}$$

方程(6.3.8)称为平面的**截距式方程**,数a、b、c分别为平面在x、y、z轴上的**截距**.

例6.3.1　求过点(1,0,4)且以$\boldsymbol{n}=\{-1,3,2\}$为法向量的平面的方程.

解　平面的点法式方程为

$$-(x-1)+3(y-0)+2(z-4)=0,$$

化简得

$$-x+3y+2z-7=0.$$

□

例6.3.2　求下列平面的法向量:

(1) $x-y+2z=5$;　　(2) $z=0.5x+1.2y$.

解　(1)法向量的三个(数值)分量是平面方程中x、y、z的系数,故法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{1,-1,2\}.$$

(2)先把平面方程写成下列标准形状:

$$0.5x+1.2y-z=0,$$

则法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{0.5,1.2,-1\}.$$

□

例6.3.3　求通过x轴及点(4,-3,-1)的平面的方程.

解　因平面通过x轴,故其法向量垂直于x轴,于是法向量$\boldsymbol{n}$在x轴上的投影为零.设所求平面方程为$Ax+By+Cz+D=0$,则$A=0$.又平面通过x轴,必通过原点,于是$D=0$.因此平面方程形如

$$By+Cz=0.$$

又因这平面过点(4,-3,-1),故有

$$-3B-C=0\quad 或\quad C=-3B.$$

于是平面方程变成$By-3Bz=0$.用B除等式两端($B\neq 0$),便得所示平面方程

$$y-3z=0.$$

□

例6.3.4　求过三点$P(1,3,0)$,$Q(3,4,-3)$和$R(3,6,2)$的平面的方程.

解　由于点P、Q在平面上,故下列向量也在平面上:

$$\boldsymbol{v}=\overline{PQ}=(3-1)\boldsymbol{i}+(4-3)\boldsymbol{j}+(-3-0)\boldsymbol{k}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

同理,向量$\boldsymbol{w}=\overline{PR}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$也在平面上.于是这个平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&-3\\2&3&2\end{vmatrix}=11\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}.$$

由于点$P(1,3,0)$在这个平面上,故该平面的点法式方程为

$$11(x-1)-10(y-3)+4(z-0)=0,$$

即

$$11x-10y+4z+19=0. \qquad \square$$

6.3.3 $\mathbb{R}^3$ 中的直线

我们仍然利用向量来导出空间 $\mathbb{R}^3$ 中的直线的方程.

设空间直线L 过点$P_0(x_0,y_0,z_0)$,且平行于向量$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$(见图6.27),则点$P(x,y,z)$在直线$L$ 上的充要条件是向量$\overline{P_0P}$平行于$\boldsymbol{a}$.因此我们可以这样表示向量$\overline{P_0P}$:

$$\overline{P_0P}=t\boldsymbol{a},\quad t\in\mathbb{R}. \tag{6.3.9}$$

于是

$$(x-x_0)\boldsymbol{i}+(y-y_0)\boldsymbol{j}+(z-z_0)\boldsymbol{k}=ta_1\boldsymbol{i}+ta_2\boldsymbol{j}+ta_3\boldsymbol{k},$$

亦即

$$x-x_0=ta_1,\quad y-y_0=ta_2,\quad z-z_0=ta_3.$$

这样我们便得到了过点(x_0,y_0,z_0)且平行于向量$\boldsymbol{a}$ 的空间直线L 的**参数方程**:

$$\begin{cases} x=x_0+a_1t, \\ y=y_0+a_2t, \\ z=z_0+a_3t, \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}. \tag{6.3.10}$$

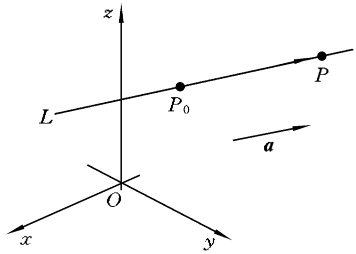


图6.27

方程(6.3.10)可写成向量形式

$$P=P_0+t\boldsymbol{a}, \tag{6.3.11}$$

其中$P=\overline{OP}$,$P_0=\overline{OP_0}$.

当a_1、a_2、a_3都不等于零时,(6.3.10)式又可写为如下的形式:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}, \tag{6.3.12}$$

上式称为直线L 的**对称式方程**.注意:如果a_1、a_2、a_3 中有一个为零,例如$a_1=0$,而$a_2\neq0$,$a_3\neq0$,则(6.3.12)式应理解为

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ \dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}; \end{cases}$$

若a_1、a_2、a_3 中有两个为零,例如$a_1=a_2=0$,而$a_3\neq0$,则(6.3.12)式应理解为

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ y-y_0=0. \end{cases}$$

例6.3.5 写出过点(1,2,2)且平行于向量$3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 的直线的参数方程.点(10,-1,16)是否在此直线上?

解 根据(6.3.10)式可得参数方程

$$x=1+3t,\quad y=2-t,\quad z=2+5t.$$

为判断点$(10,-1,16)$是否在此直线上,只需验明该点是否满足上述参数方程.假定有

$$10=1+3t,\quad -1=2-t,\quad 16=2+5t,$$

则由$10=1+3t$得$t=3$.但$t=3$这个值却不满足上面的第三个方程.所以点$(10,-1,16)$不在这条直线上. □

由于空间直线可以看成是两平面的交线,因此,如果两个平面的方程分别为

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

则它们的交线L上的点的坐标应满足方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \tag{6.3.13}$$

我们称方程组(6.3.13)为空间直线的**一般方程**.

下面,我们给出直线的方向数和方向余弦的概念.

若向量$a=a_1i+a_2j+a_3k$平行于直线L,则称a_1、a_2、a_3为**直线L的方向数**,而称a为直线L的**方向向量**.若直线L平行于向量a,则a的方向余弦亦称为**直线L的方向余弦**.

例6.3.6　求直线$\begin{cases} x+2y+3z-6=0 \\ 2x-3y+4z-8=0 \end{cases}$的方向余弦.

解　由于两平面的交线与这两平面的法向量$n_1=\{1,2,3\}$,$n_2=\{2,-3,4\}$都垂直,所以直线的方向向量可取为

$$s=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}=17i+2j-7k.$$

由方向余弦公式得

$$\cos\alpha=\frac{17}{\sqrt{17^2+2^2+(-7)^2}}=\frac{17}{\sqrt{342}},\quad \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{342}},\quad \cos\gamma=\frac{-7}{\sqrt{342}}.$$ □

习　题　6.3

(A)

1. 回答下列问题:
   (1) $\mathbb{R}^3$中平面的方程有哪些表示形式?
   (2) $\mathbb{R}^3$中直线的方程有哪些表示形式?
   (3) 怎样求平面的法向量? 法向量唯一吗?
   (4) 怎样求直线的方向数? 方向数唯一吗?
2. 求下列平面的法向量:
   (1) $2x+y-z=23$;　　(2) $1.5x+3.2y+z=0$;

(3) $2(x-z)=3(x+y)$; (4) $\pi(x-1)=(1-\pi)(y-z)+\pi$.

3. 求下列直线的方向数:

(1) $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-6}{-3}$; (2) $x=2+t, y=-1+2t, z=1+t$;

(3) $\begin{cases}4x+y+3z=0,\\ 2x+3y+2z=9;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}3x-2y+z+5=0,\\ x-3y-2z=3.\end{cases}$

4. 求下列过点P,法向量为n的平面的方程:

(1) $P=(-1,2,3), n=\{-4,15,-\frac{1}{2}\}$. (2) $P=(\pi,0,-\pi), n=\{2,3,-4\}$.

(3) $P=(9,17,-7), n=\{2,0,-3\}$. (4) $P=(-1,-1,-1), n=\frac{\sqrt{2}}{2}(i+j-k)$.

(5) $P=(2,3,5), n=j$.

5. 求下列过点P,方向向量为s的直线的方程:

(1) $P=(-2,1,0), s=\{3,-1,5\}$. (2) $P=(3,4,5), s=\{\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{6}\}$.

(3) $P=(2,0,5), s=2j+3k$. (4) $P=(4,2,-1), s=j$.

6. (1) 求过三点$(0,0,0)$,$(4,1,2)$和$(2,5,0)$的平面方程.

(2) 求过点$(1,1,-1)$,$(0,2,3)$和$(4,1,5)$的平面方程.

7. 求过两点$(3,-2,1)$和$(-1,0,2)$的直线方程.

8. 用对称式方程和参数方程表示直线

$$\begin{cases}x-y+z=1,\\ 2x+y+z=4.\end{cases}$$

9. 求过两点$(1,0,3)$和$(2,1,-1)$的直线的对称式方程.

10. 写出过两点$(1,2,3)$和$(4,5,7)$的直线的参数方程.

(B)

1. 求过原点且方向数为$1,-1,1$的直线方程.

2. 求直线$\begin{cases}x+y+3z-5=0\\ 2x-y+z-2=0\end{cases}$的方向余弦.

答案与提示

(A)

2. (1) $\{2,1,-1\}$; (2) $\{1.5,3.2,1\}$; (3) $\{1,3,2\}$; (4) $\{\pi,\pi-1,1-\pi\}$.

3. (1) $1,2,-3$; (2) $1,2,1$; (3) $-7,-2,10$; (4) $7,7,-7$.

4. (1) $8x-30y+z+65=0$; (2) $2x+3y-4x-6\pi=0$;

(3) $2x-3z-39=0$; (4) $x+y-z+1=0$; (5) $y=3$.

5. (1) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{5}$; (2) $\frac{x-3}{1/2}=\frac{y-4}{-1/3}=\frac{z-5}{1/6}$;

(3) $x=2, \frac{y}{2}=\frac{z-5}{3}$; (4) $x-4=0, z+1=0$.

6. (1) $5x-2y-9z=0$; (2) $2x+6y-z-9=0$.

7. $\frac{x-3}{-4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$.

8. 对称式：$\frac{x-3}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{3}$；参数式：$x=3-2t, y=t, z=-2+3t$.

9. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{-4}$.

10. $x=1+3t, y=2+3t, z=3+4t$.

(B)

1. $x=-y=z$.

2. $\frac{4}{\sqrt{50}}, \frac{5}{\sqrt{50}}, \frac{-3}{\sqrt{50}}$.

6.4　直线与平面的位置关系

本节讨论直线与直线、平面与平面以及直线与平面之间的位置的关系.

6.4.1　两直线的夹角

两直线的方向向量之间的夹角称为**两直线的夹角**(通常取锐角).

设直线L_1的方向数为m_1, n_1, p_1，而直线L_2的方向数为m_2, n_2, p_2，则它们的方向向量分别为

$$s_1=\{m_1, n_1, p_1\},\quad s_2=\{m_2, n_2, p_2\}.$$

由点积公式 $\quad s_1\cdot s_2=|s_1||s_2|\cos\varphi\quad$ (φ是L_1与L_2的夹角)

可得
$$\cos\varphi=\frac{s_1\cdot s_2}{|s_1||s_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}},\tag{6.4.1}$$

由此即可确定角φ.

请读者验证下列结论：

两直线L_1与L_2垂直的充要条件是 $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$；

两直线L_1与L_2平行的充要条件是 $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

例6.4.1　求两直线
$$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1},\quad L_2:\begin{cases}x=2t,\\ y=-2-2t,\\ z=-t\end{cases}$$
之间的夹角.

解　L_1与L_2的方向向量分别为

$$s_1=\{1,-4,1\},\quad s_2=\{2,-2,-1\}.$$

由公式(6.4.1)，有 $\quad\cos\varphi=\frac{1\cdot 2+(-4)\cdot(-2)+1\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

故
$$\varphi=\frac{\pi}{4}.$$
□

6.4.2　两平面的夹角

两平面的法向量之间的夹角称为**两平面的夹角**(通常取锐角).

设有两个平面

$$\pi_1:\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\pi_2:\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

则它们的法向量分别为

$$n_1=\{A_1,B_1,C_1\},\quad n_2=\{A_2,B_2,C_2\}.$$

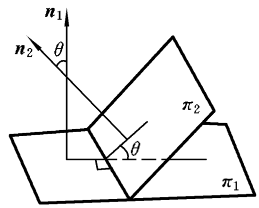


图 6.28

于是 n_1 与 n_2 的夹角 θ(见图 6.28)可由下面的公式确定:

$$\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.\qquad(6.4.2)$$

读者容易证明:

两平面 π_1 与 π_2 垂直的充要条件是 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$;

两平面 π_1 与 π_2 平行的充要条件是 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

例 6.4.2　求两平面 $x+2y-z-4=0$ 与 $2x+y+z-5=0$ 的夹角.

解　由公式(6.4.2),有

$$\cos\theta=\frac{1\cdot2+2\cdot1+(-1)\cdot1}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2},$$

故

$$\theta=\frac{\pi}{3}.$$

□

6.4.3　直线与平面的夹角

直线和它在平面上的投影直线所成的两邻角中的任何一个都可以定义为**直线与平面的夹角** φ(见图 6.29). 这两个角互为补角,它们的正弦值相等,一般取

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

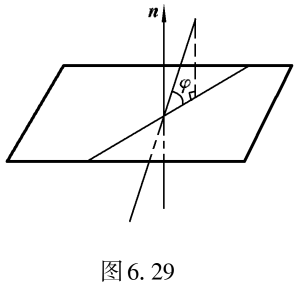


图 6.29

设直线 L 的方向向量为 $s=\{m,n,p\}$,平面的法向量为 $n=\{A,B,C\}$, 则 s 与 n 的夹角就是 $\dfrac{\pi}{2}-\varphi$ 或 $\dfrac{\pi}{2}+\varphi$. 由两向量夹角余弦的公式,有

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\right|=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

而 $\sin\varphi=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)$,所以有

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.\tag{6.4.3}$$

不难证明：

直线与平面垂直的充要条件是 $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$；

直线与平面平行的充要条件是 $Am+Bn+Cp=0$.

例6.4.3　求过点$(1,2,-1)$且与直线$x=-t+2,y=3t-4,z=t-1$垂直的平面方程.

解　直线的方向向量为$\{-1,3,1\}$,依题意,所求平面的法向量应为$n=\{-1,3,1\}$,于是所求平面的点法式方程为

$$(-1)(x-1)+3\cdot(y-2)+1\cdot(z+1)=0,$$

即

$$x-3y-z+4=0.$$

□

6.4.4　点到平面的距离

设$P_0(x_0,y_0,z_0)$是平面$Ax+By+Cz+D=0$外一点,求点P_0到这个平面的距离(见图6.30).

在平面上任取一点$P_1(x_1,y_1,z_1)$,并作法向量n,如图6.30所示,P_0到平面的距离

$$d=|\overline{P_1P_0}\text{在}n\text{上的投影}|=|e_n\cdot\overline{P_1P_0}|,$$

其中e_n是与n的方向一致的单位法向量,即

$$e_n=\left\{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right\},$$

而

$$\overline{P_1P_0}=\{x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1\},$$

故推得

$$d=\left|\frac{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|,$$

利用$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$将上式化简整理,得

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\tag{6.4.4}$$

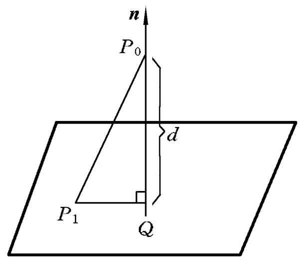


图6.30

例6.4.4　求原点到平面$x+\frac{y}{-4}+\frac{z}{3}=1$的距离.

解　将平面方程写成一般式

$$12x-3y+4z-12=0,$$

由公式(6.4.4)得

$$d=\frac{|-12|}{\sqrt{12^2+(-3)^2+4^2}}=\frac{12}{13}.$$

□

例6.4.5　求点$P(1,2,-1)$到直线L:$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{3}$的距离.

解法一 过点P 且垂直于直线L 的平面的方程为$2(x-1)-(y-2)+3(z+1)=0$,即

$$2x-y+3z+3=0.$$

该平面与直线的交点可如下求出:由直线L 的方程,可令

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{3}=t,$$

则$x=2t+1, y=-t-1, z=3t+2$,代入平面方程中可求得$t=-\frac{6}{7}$,因此平面与直线L的交点为$Q(-\frac{5}{7},-\frac{1}{7},-\frac{4}{7})$,从而$P$ 点到直线L 的距离为

$$d=|\overline{PQ}|=\sqrt{(1+\frac{5}{7})^2+(2+\frac{1}{7})^2+(-1+\frac{4}{7})^2}=\frac{3}{7}\sqrt{42}.$$

解法二 如图6.31 所示,点$P_0(1,-1,2)$在直线L 上,而L 的方向向量为$s=\{2,-1,3\}$. 所以P 点到直线L 的距离为

$$d=|\overline{PP_0}|\sin\theta,$$

θ是 s 与$\overline{PP_0}$的夹角.

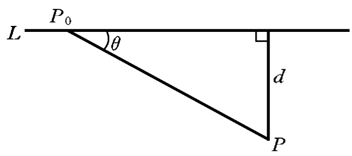


图6.31

由向量的叉积定义知,

$$|\overline{PP_0}\times s|=|\overline{PP_0}||s|\sin\theta,$$

所以 $$d=\frac{|\overline{PP_0}\times s|}{|s|}.$$

而 $$\overline{PP_0}\times s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=6i-6j-6k,$$

因此 $$d=\frac{\sqrt{6^2+(-6)^2+(-6)^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\sqrt{\frac{108}{14}}=\frac{3}{7}\sqrt{42}.$$ □

6.4.5 平面束

设有两个不平行的平面

$$\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

对于不全为0 的常数λ,μ,作方程

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \quad (6.4.5)$$

它可以写成

$$(\lambda A_1+\mu A_2)x+(\lambda B_1+\mu B_2)y+(\lambda C_1+\mu C_2)z+(\lambda D_1+\mu D_2)=0. \quad (6.4.6)$$

由于π_1 与π_2 不平行,故(6.4.6)式中x,y,z 的系数不会全为0. 因此,对于任何两个不全为0 的常数λ,μ,三元一次方程(6.4.5)恒表示平面. 当λ 和μ 取不同值时所得到的

平面的全体称为由不平行的平面 π_1 和 π_2 所决定的**平面束**.

由于 λ 和 μ 不全为0,因此平面束方程也常写成如下含一个参数 λ 的形式:

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0. \quad (6.4.7)$$

可以证明,由平面 π_1 与 π_2 所决定的平面束中的任一个平面,都通过平面 π_1 与 π_2 的交线 L. 反之,通过平面 π_1 与 π_2 的交线 L 的任何平面必为由 π_1、π_2 所决定的平面束中的一个平面.

例6.4.6　一平面过直线 $L:\begin{cases}x+2y-z=0\\3x-y+z-5=0\end{cases}$ 且过点 $(2,3,-4)$,求此平面的方程.

解　所求平面的方程必具有如下的形式:

$$(x+2y-z)+\lambda(3x-y+z-5)=0. \quad (6.4.8)$$

由于此平面过点 $(2,3,-4)$,故这点的坐标必满足方程(6.4.8),即有

$$(2+6+4)+\lambda(6-3-4-5)=0,$$

由此求得 $\lambda=2$,将其代入(6.4.8)式,即得所求平面的方程

$$(x+2y-z)+2(3x-y+z-5)=0,$$

即
$$7x+z-10=0.$$
□

习　题　6.4

(A)

1. 回答下列问题:
   (1) 两直线的夹角怎样定义?
   (2) 两直线垂直或平行的充要条件是什么?
   (3) 两平面的夹角怎样定义?
   (4) 两平面垂直或平行的充要条件是什么?
   (5) 直线与平面的夹角怎样定义?
   (6) 直线与平面垂直或平行的充要条件是什么?
2. 求满足下列条件的平面方程:
   (1) 垂直于 $\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 且过点 $(1,0,2)$;
   (2) 垂直于 $\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$ 且过点 $(1,-1,2)$;
   (3) 平行于平面 $2x+4y-3z=1$ 且过点 $(1,0,-1)$;
   (4) 过直线 L_1 且平行于直线 L_2,其中

$$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-2}{-2},\qquad L_2:\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}.$$

3. 求过原点且与两直线

$$L_1:\begin{cases}x=1,\\y=-1+t,\\z=2+t.\end{cases}\qquad L_2:\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$$

都平行的平面方程.

4. 求满足下列条件的直线方程:

(1) 过点$(4,-1,3)$且平行于直线$\frac{x-3}{2}=y=\frac{z-1}{5}$;

(2) 过点$(2,4,0)$且与直线$\begin{cases}x+2z-1=0,\\ y-3z-2=0\end{cases}$平行;

(3) 过点$(-1,2,3)$且平行于平面$7x+8y+9z+10=0$,又垂直于直线$\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$;

(4) 过点$(1,2,3)$和z轴相交,且垂直于直线$x=y=z$.

5. 求下列两直线的夹角:

$$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1},\qquad L_2:\begin{cases}x-y=6,\\ 2y+z=3.\end{cases}$$

6. 设平面π通过z轴,且与平面$\pi_1:2x+y-\sqrt{5}z=0$的夹角为$\frac{\pi}{3}$,求平面π的方程.

7. 求直线$\begin{cases}x+y+3z=0\\ x-y-z=0\end{cases}$与平面$x-y-z+1=0$间的夹角.

8. 试确定下列各组中直线和平面间的关系:

(1) $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$和$4x-2y-2z=3$;　　(2) $\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$和$3x-2y+7z=8$;

(3) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$和$x+y+z=3$.

9. 求点$M(3,-1,2)$到直线$\begin{cases}x+y-z+1=0,\\ 2x-y+z-4=0\end{cases}$的距离.

(B)

1. 求过点$(2,1,3)$且与直线$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$垂直相交的直线的方程.

2. 已知一平面通过平面$\pi_1:x+y-z=0$和平面$\pi_2:x-y+z-1=0$的交线,且过点$(1,1,-1)$,求这个平面的方程.

3. 求直线$L:\begin{cases}2y+3z-5=0,\\ x-2y-z+7=0\end{cases}$在平面$\pi:x-y+3z+8=0$上的投影直线方程.

答案与提示

(A)

2. (1) $x-2y-z+1=0$;　(2) $2x-3y+7z-19=0$;

(3) $2x+4y-3z-5=0$;　(4) $2x-8y+z-12=0$.

3. $x-y+z=0$.

4. (1) $\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{5}$;　(2) $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z}{1}$;

(3) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$;　(4) $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-6}{-3}$.

5. $\frac{\pi}{3}$.

6. $x+3y=0$或$3x-y=0$.

7. 0.

8. (1) 直线与平面平行,但直线不在平面上; (2) 直线与平面垂直; (3) 直线在平面上.

9. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

(B)

1. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$.

2. $5x-y+z-3=0$.

3. $\begin{cases} x-y+3z-8=0, \\ x-2y-z+7=0. \end{cases}$

6.5 曲　　面

6.5.1 曲面及其方程

取定一个空间直角坐标系$Oxyz$. 设有一个三元的函数方程

$$F(x,y,z)=0. \tag{6.5.1}$$

如果空间曲面S与方程(6.5.1)之间有下列关系:若点$P(x,y,z)\in S$,则其坐标必满足方程(6.5.1);反过来,若一组数x、y、z满足方程(6.5.1),则点$P(x,y,z)\in S$. 则称方程(6.5.1)为曲面S的方程,称曲面S是方程(6.5.1)的图像. 通常称方程(6.5.1)为曲面S的**一般方程**.

例如,三元一次方程$Ax+By+Cz+D=0$是平面的方程. 由于这个方程是一次的,又称平面为一次曲面.

曲面还可以用参数方程来表示. 设有方程组

$$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \quad u\in I, \quad v\in J, \\ z=z(u,v), \end{cases} \tag{6.5.2}$$

其中$x(u,v)$、$y(u,v)$和$z(u,v)$是u、v的表达式,I和J是某两个区间. 如果曲面S与方程组(6.5.2)之间有如下关系:若点$P(x,y,z)$位于曲面S上,则必存在确定的数$u\in I$,$v\in J$,使得$x(u,v)=x$,$y(u,v)=y$,$z(u,v)=z$;反过来,若对于任意的数$u\in I$,$v\in J$,由方程组(6.5.2)所确定的一组数x、y、z总使得点$P(x,y,z)$位于曲面S上. 则称方程组(6.5.2)为曲面S的**参数方程**,其中u、v为参数. 我们将在第9章中介绍并运用某些曲面的参数方程.

例6.5.1 平面$Ax+By+Cz+D=0(C\neq 0)$可用参数方程表示如下:

$$x=u, \quad y=v, \quad z=-\frac{A}{C}u-\frac{B}{C}v-\frac{D}{C}. \qquad \square$$

下面介绍一些常见的曲面及其方程.

6.5.2 柱面

先看一个例子.

例6.5.2 方程$y=x^2$在空间$\mathbb{R}^3$中的图像有如一堵弯曲的墙(见图6.32),它竖立在xOy平面内的抛物线$y=x^2$上面.这是一个曲面.类似地,方程$z=x^2$在空间中的图像有相同的模样,但是曲面是凹向上的(见图6.33). □

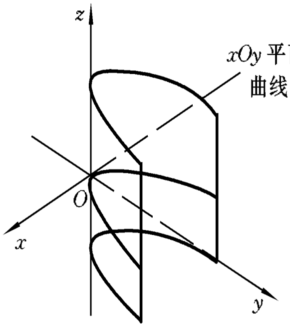


图6.32

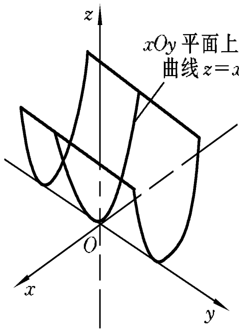


图6.33

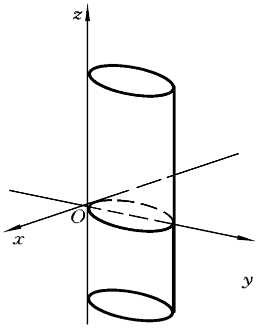


图6.34

曲面$y=x^2$和$z=x^2$都是柱面的特殊情形.一般地,若C是平面上的一条曲线,由平行于某定直线并沿C移动的直线L形成的轨迹称为**柱面**,定曲线C称为柱面的**准线**,动直线L称为柱面的**母线**.

例6.5.2中的曲面$y=x^2$就是一个柱面,由于它的准线是抛物线,故又叫做**抛物柱面**.

如果C是一个圆周,那么它所确定的柱面就是我们所熟知的**圆柱面**(见图6.34),这个圆柱面没有上底和下底.

如果一个方程中至多出现变量x、y、z中的两个,那么这个方程的图像在$\mathbb{R}^3$中就是一个柱面.

6.5.3 球面

由所有与定点(a,b,c)有定距离r的点所组成的集合称为**球面**,这个球面的中心是点(a,b,c),半径是r(见图6.35).若点(x,y,z)在这个球面上,则该点到球心(a,b,c)的距离等于r,即

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r,$$

或者等价地有

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2. \tag{6.5.3}$$

这就是中心在点(a,b,c)、半径为r的球面的方程.

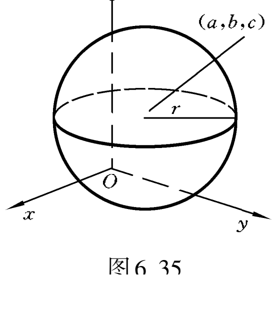


图6.35

6.5.4　椭球面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{6.5.4}$$

的图像称为**椭球面**,其中 a、b、c 为正的常数(见图6.36). 当 $a=b=c$ 时,它就是一个中心在原点、半径为 a 的球面. 由方程(6.5.4)可知,

$$|x|\leqslant a,\quad |y|\leqslant b,\quad |z|\leqslant c.$$

即椭球面(6.5.4)完全含于一个以原点(0,0,0)为中心的长方体内,这个长方体的六个面的方程为 $x=\pm a$, $y=\pm b$, $z=\pm c$,数 a、b、c 称为**椭球面的半轴**.

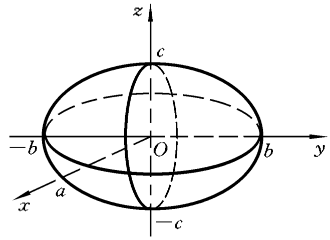


图6.36

椭球面与坐标平面的交线是椭圆. 例如,椭球面(6.5.4)与 xOy 平面($z=0$)的交线是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$. 实际上,椭球面与任何平面的交线都是椭圆.

6.5.5　旋转曲面

先看一个例子.

例6.5.3　方程

$$z=x^2+y^2 \tag{6.5.5}$$

的图形可以看成是由抛物线

$$z=y^2,\quad x=0 \tag{6.5.6}$$

绕 z 轴旋转一周而成的曲面,称之为**旋转抛物面**(见图6.37). 下面验证这个结论.

设 $M_1(0,y_1,z_1)$ 是曲线(6.5.6)上的一点,则有

$$z_1=y_1^2.$$

当曲线(6.5.6)转动时,点 M_1 转到点 $M(x,y,z)$(见图6.37). 由于动曲线在旋转的过程中点 M 的竖坐标总有 $z=z_1$,且点 M 到 z 轴的距离

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|.$$

这样,将 $z_1=z$, $y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入等式 $z_1=y_1^2$,即得

$$z=x^2+y^2.$$

由此还可以看到,只要将旋转的曲线(6.5.6)中 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$,就可得到旋转抛物面的方程(6.5.5). □

一般地,设在 yOz 平面上有一已知曲线 C,它的方程是

$$f(y,z)=0,\quad x=0.$$

把这曲线绕 z 轴旋转一周,就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面(见图6.38), 仿照上面的讨论可知,将曲线 C 的方程 $f(y,z)=0$ 中的 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$,就可得到这个旋转

曲面的方程

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0. \tag{6.5.7}$$

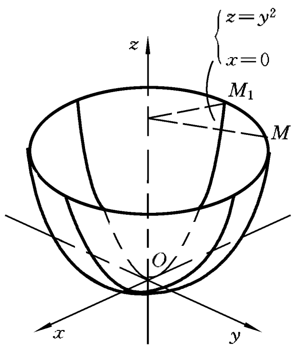


图6.37

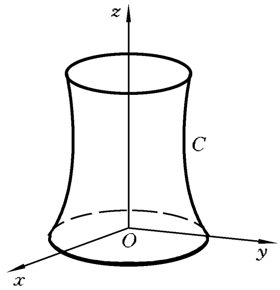


图6.38

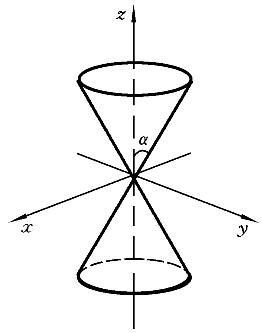


图6.39

例 6.5.4　设一直线 L 绕 z 轴旋转一周,转动时始终与 z 轴保持定角 $\alpha(0<\alpha<\pi/2)$. 这种直线所形成的旋转曲面叫做**圆锥面**(见图6.39).

若动直线 L 在开始时位于 yOz 平面上,其方程是

$$z=y\cot\alpha,\quad x=0.$$

那么按前面所讲的方法,圆锥面的方程就是

$$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha$$

或

$$z^2=a^2(x^2+y^2), \tag{6.5.8}$$

其中 $a=\cot\alpha$. □

6.5.6　其他曲面的例子

例 6.5.5　方程 $x^2+y^2-z^2=1$ 的图像.

解　为了画出这个曲面,我们先看看坐标平面 $z=0$ 与它的交线. 在 $z=0$ 上,方程变成

$$x^2+y^2=1.$$

这就是说,xOy 平面与这个曲面的交线是一个中心在原点的单位圆周(见图6.40). 如果用平面 $z=1$ 去截这个曲面,则得交线 $x^2+y^2=2,z=1$(称为截痕). 类似地,对于任意常数 k,曲面与平面 $z=k$ 的交线仍然是一个圆周 $x^2+y^2=1+k^2,z=k$.

现在我们来考察 $x^2+y^2-z^2=1$ 与 yOz 平面的交线. 令 $x=0$,得方程 $y^2-z^2=1$,这是双曲线方程. 这双曲线就可帮助我们把曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 的图形画出来(见图6.40). □

对于任意的正常数 a、b、c,方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 的图形称为**单叶双曲面**. 用平行

于 xOy 平面的平面 $z=k$ 去截这个曲面时，所得截痕为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$，$z=k$.

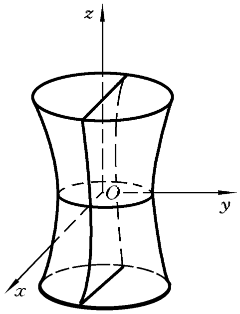


图6.40

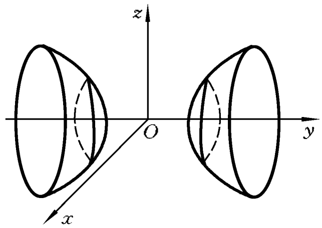


图6.41

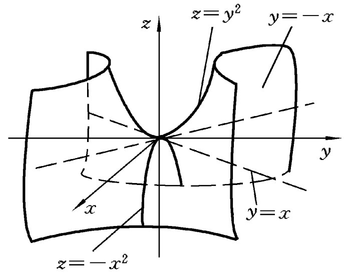


图6.42

所谓**双叶双曲面**是方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ 的图形(见图6.41).

例6.5.6　求方程 $z=y^2-x^2$ 的图形.

解　这个曲面与 xOz 平面的交线是抛物线

$$z=-x^2,\quad y=0;$$

曲面与 yOz 平面的交线则是抛物线

$$z=y^2,\quad x=0.$$

令 $z=0$，则得到曲面与 xOy 平面的交线

$$0=y^2-x^2$$

或

$$y=x \text{ 与 } y=-x,$$

这个曲面称为**双曲抛物面**或**鞍形曲面**(见图6.42). □

习　题　6.5

(A)

1. 回答下列问题：
   (1) 曲面的一般方程是怎样的？如何定义？
   (2) 柱面如何定义？准线和母线是指什么？
   (3) 旋转曲面如何生成？它的方程怎样得到？
2. 画出下列方程的图像：
   (1) $x=y^2$；　(2) $x^2+y^2+\frac{z^2}{2}=1$；　(3) $z^2=x^2+y^2$；
   (4) $z=xy$；　(5) $y^2+z^2=9$；　(6) $y^2-x^2=4$.
3. 对任意的正常数 p、q，方程 $z=\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}$ 的图像称为**椭圆抛物面**(当 $p=q$ 时，这就是一个旋转抛物面). 试找出三个坐标平面与它的交线，并画出草图.

4. 在同一坐标系下画出方程 $z=x^2+y^2$ 与 $z=x^2+(y-1)^2$ 的图形.

5. 求由下列曲线绕 z 轴旋转一周所形成的旋转曲面的方程(建议您最好把这些曲面都画出来)：

(1) $\begin{cases} z=x^2, \\ y=0; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} z=\sqrt{1-y^2}, \\ x=0; \end{cases}$　(3) $\begin{cases} z=3y, \\ x=0. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} z=2x, \\ y=0; \end{cases}$　(5) $\begin{cases} z=e^{-y^2}, \\ x=0. \end{cases}$

6. 指出下列各方程或方程组所表示的曲面或曲线的名称：

(1) $x^2+y^2=2x$；　(2) $2x^2-y^2+4=0$；　(3) $2x^2-y^2+z^2=1$；

(4) $2x^2-y^2-z^2=1$；　(5) $\begin{cases} x^2+y^2-2z=0, \\ x+z=1. \end{cases}$

(B)

1. 画出曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1+y$ 的交线,并求出这交线在 xOy 平面上的投影曲线. 投影时光线平行于 z 轴.

2. 画出由下列各曲面所围成的空间区域：

(1) $x=0, y=0, z=0, x+y+\dfrac{z}{2}=1$；　(2) $x^2+y^2+z^2=1, z=y$(顶部部分)；

(3) $z=x^2+y^2, z=x+1$(有界部分)；　(4) $z=x^2+3y^2, z=4$(有界部分).

答案与提示

(A)

3. 与 xOy 平面交于一点 $(0,0,0)$；与 xOz 平面的交线为抛物线 $x^2=p^2z, y=0$；与 yOz 平面的交线为抛物线 $y^2=q^2z, x=0$.

5. (1) $z=x^2+y^2$；　(2) $z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$；　(3) $z=\pm 3\sqrt{x^2+y^2}$；

(4) $z=\pm 2\sqrt{x^2+y^2}$；　(5) $z=e^{-(x^2+y^2)}$.

6. (1) 圆柱面；　(2) 双曲柱面；　(3) 单叶双曲面；　(4) 双叶双曲面；　(5) 椭圆.

6.6 曲　　线

6.6.1 平面曲线

在一元函数微积分中,我们已学习过平面曲线的解析表示,在这里作一简单的回顾.

在直角坐标系下,平面曲线有以下三种表示法：

显示法　$y=f(x)$　或　$x=g(y)$.　　(6.6.1)

隐示法　$F(x,y)=0$　(通常假定 $F_x\neq 0$ 或 $F_y\neq 0$).　　(6.6.2)

参数表示法　$x=\varphi(t), y=\psi(t)$　(通常假定 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$).　　(6.6.3)

在极坐标系下,平面曲线的方程形如

$$r = r(\theta), \tag{6.6.4}$$

若取 θ 为参数,则(6.6.4)可转换为参数方程

$$x = r(\theta)\cos\theta, \quad y = r(\theta)\sin\theta. \tag{6.6.5}$$

参数方程(6.6.3)可以写成向量形式:

$$r = r(t) = x(t)i + y(t)j, \tag{6.6.6}$$

这里 r 是起点在原点的向量(见图6.43),即位置向量. 我们称 $r(t)$ 为**二维向量值函数**,也常记作

$$r(t) = \{x(t), y(t)\}.$$

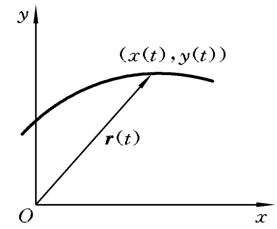


图6.43

6.6.2 空间曲线

空间曲线在直角坐标系下的显式方程为

$$y = y(x), \quad z = z(x). \tag{6.6.7}$$

其更一般的表示法是把空间曲线看成两个曲面的交线,因而空间曲线方程可表示为下列隐函数方程:

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases} \tag{6.6.8}$$

同时要对 F 及 G 作某些假设.

空间曲线的参数方程为

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \omega(t), \tag{6.6.9}$$

并设 $\varphi'(t), \psi'(t), \omega'(t)$ 中至少有一个不为零.

方程(6.6.9)也可写成向量的形式:

$$r = r(t) = \varphi(t)i + \psi(t)j + \omega(t)k, \tag{6.6.10}$$

其中 r 是位置向量(见图6.44). 这时我们称 $r(t)$ 为**三维向量值函数**,也记作

$$r(t) = \{\varphi(t), \psi(t), \omega(t)\}.$$

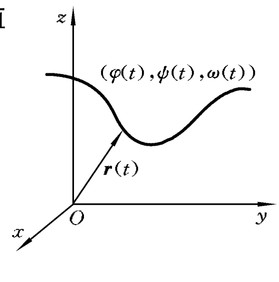


图6.44

例6.6.1　设在时刻 t,质点的位置向量是

$$r = r(t) = \cos ti + \sin tj + tk,$$

试描绘该质点的运动路径.

解　在时刻 t,质点所在的点的坐标为

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t.$$

注意到 $x^2 + y^2 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$,所以质点永远在柱面

$$x^2 + y^2 = 1$$

上面. 并且,当 t 增加时,$z = t$ 也是增加的,因此质点运动的轨迹是一条缠绕在柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 上盘旋上升的**螺旋线**(见图6.45). □

例6.6.2　对于由方程

$$y = f(x)$$

所表示的平面曲线,我们可以**参数化**:以 x 为参数,即令

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases}$$

这就是曲线的参数方程. 例如曲线

$$y = x^3 - x$$

可以参数化为 $\begin{cases} x = t, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$ □

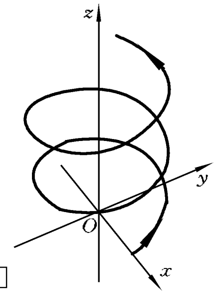


图 6.45

6.6.3 空间曲线的投影柱面和投影曲线

设给定空间曲线 C,以曲线 C 为准线,母线平行于 z 轴的柱面称为曲线 C 关于 xOy 平面的**投影柱面**,而该柱面和 xOy 平面的交线称为曲线 C 在 xOy 平面上的**投影曲线**.

例如,设有曲线 C:$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases}$ 消去变量 z,即可得到曲线 C 关于 xOy 平面的投影柱面方程

$$H(x,y) = 0;$$

而方程

$$\begin{cases} H(x,y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

就是 C 在 xOy 平面上的投影曲线方程.

例 6.6.3 求空间曲线 C:$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0, \\ x-z+1=0 \end{cases}$ 关于 xOy 平面的投影柱面方程,及 C 在 yOz 平面上的投影曲线方程.

解 由曲线 C 的方程中消去变量 z,得

$$x^2 + y^2 - (x+1)^2 = 0,$$

化简得

$$2x - y^2 + 1 = 0,$$

此即 C 关于 xOy 平面的投影柱面方程.

由曲线 C 的方程中消去变量 x 后化简得

$$y^2 - 2z + 1 = 0,$$

这是 C 关于 yOz 平面的投影柱面方程,而 C 在 yOz 平面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} y^2 - 2z + 1 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$ □

习 题 6.6

(A)

1. 在平面上给出下列三组参数方程,试说明它们所描述的运动的类似与不同的地方:

(1) $\begin{cases} x=t, \\ y=t^2; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=t^2, \\ y=t^4; \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x=t^3, \\ y=t^6. \end{cases}$

2. 写出中心在点$(-1,2)$、半径为3的圆的参数方程.

3. 写出过点$(2,-1,3)$和点$(-1,5,4)$的直线的参数方程.

4. 设在时刻t,质点的位置向量为

$$r(t)=t\cos 2\pi t i+t\sin 2\pi t j+tk.$$

(1) 证明该质点在一个锥面上;

(2) 画出质点的运动轨迹.

(B)

1. 求曲线C:$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+y^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$在$xOy$平面上的投影曲线方程.

2. 求曲线C:$\begin{cases} z=x^2+2y^2, \\ z=2-x^2 \end{cases}$关于$xOy$平面的投影柱面方程和$xOy$平面的投影曲线方程.

答案与提示

(A)

2. $x=-1+3\cos\theta, y=2+3\sin\theta, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

3. $x=2-3t, y=-1+6t, z=3+t, -\infty<t<+\infty$.

(B)

1. $x^2+y^2=\dfrac{3}{4}$;$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4}, \\ z=0. \end{cases}$

2. $x^2+y^2=1$;$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$

总 习 题 (6)

1. 填空题:

(1) 设a、b、c为单位向量,且满足$a+b+c=0$,则$a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=$ ______.

(2) 设$a=i+2j+k, b=-i-\dfrac{1}{2}j+\dfrac{1}{2}k$,则$\cos(a,2b)=$ ______.

(3) 已知$(a\times b)\cdot c=2$,则$[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a)=$ ______.

(4) 已知平面$x+ky-2z=9$与平面$2x-3y+z=0$的夹角为$\dfrac{\pi}{4}$,则$k=$ ____.

(5) 过点$M(1,2,-1)$且与直线$x=-t+2, y=3t-4, z=t-1$垂直的平面方程是______.

(6) 已知直线$\dfrac{x-a}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{a}$在平面$3x+4y-az=3a-1$内,则$a=$ ____.

(7) 曲线$\begin{cases} 4x^2-9y^2=36, \\ z=0 \end{cases}$绕$y$轴旋转一周所成的旋转曲面方程为_____.

(8) 母线平行y轴且通过曲线$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2-y^2+z^2=0 \end{cases}$的柱面方程是______.

(9) 两球面$x^2+y^2+z^2=1$和$x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$的交线在yOz平面上的投影曲线方程为__________,在xOy平面上的投影柱面方程为________.

2. 选择题(只有一个答案是正确的):

(1) 设a与b均为非零向量,则下列结论中的正确者是(　　).

(A) $a\times b=0$是a与b垂直的充要条件;

(B) $a\cdot b=0$是a与b平行的充要条件;

(C) a与b的对应分量成比例是a与b平行的充要条件;

(D) 若$a=\lambda b$(λ为实数),$a\cdot b=0$.

(2) 非零向量a与b垂直,则(　　).

(A) $|a+b|=|a|+|b|$;　　(B) $|a+b|\leqslant|a-b|$;

(C) $|a+b|=|a-b|$;　　(D) $|a+b|\geqslant|a-b|$.

(3) 设有直线$L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+6}{1}$与$L_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$,则$L_1$与$L_2$的夹角等于(　　).

(A) $\dfrac{\pi}{6}$;　　(B) $\dfrac{\pi}{4}$;　　(C) $\dfrac{\pi}{3}$;　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$.

(4) 已知直线$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{m}=\dfrac{z-1}{5}$与直线$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$相交,则$m$等于(　　).

(A) 0;　　(B) 6;　　(C) -2;　　(D) 8.

(5) 直线$L:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$与平面$\pi:x+2y-2z=6$的关系是(　　).

(A) 平行;　　(B) 垂直;　　(C) 相交但不垂直;　　(D) 重合.

(6) 在$\mathbb{R}^3$中,方程$x^2=4y$的图形是(　　).

(A) 抛物线;　　(B) 抛物柱面;　　(C) 椭圆抛物面;　　(D) 旋转抛物面.

3. 已知向量p、q和r两两正交,且$|p|=1$,$|q|=2$,$|r|=3$.求向量$s=p+q+r$的模.

4. 已知向量$a=-i+3j$,$b=3i+j$,$|c|=r$(常数).求当c满足关系式$a=b\times c$时,r的最小值.

5. 已知向量$a=\{2,2,1\}$,$b=\{8,-4,1\}$,求(1)a在b上的投影;(2)与a同方向的单位向量;(3)b的方向余弦.

6. 设非零向量a与b互相正交,λ为任意的非零实数,试比较$|a+\lambda b|$与$|a|$的大小.

7. 给定四点$M_1(1,1,1)$,$M_2(2,3,4)$,$M_3(3,6,10)$,$M_4(4,10,20)$,求四面体$M_1M_2M_3M_4$的体积.

8. 若$a\times b+b\times c+c\times a=0$,证明$a,b,c$三向量共面.

9. 求两条平行直线$L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$与$L_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$之间的距离.

10. 求过点$P_1(4,1,2)$与$P_2(-3,5,-1)$,且垂直于平面$6x-2y+3z+7=0$的平面的方程.

11. 设有直线$L_1:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$与$L_2:\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{3}$,试求与直线$L_1$、$L_2$都垂直且相交的直线方程.

12. 试求由平面$\pi_1:2x-z+12=0$,$\pi_2:x+3y+17=0$所构成的两平面角的平分面的方程.

13. 求直线$L:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$与平面$\pi:2x+3y+3z-8=0$的交点.

14. 已知直线$L_1:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$与$L_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$,

(1) 求L_1与L_2之间的距离;　　(2) 求L_1,L_2的公垂线方程.

15. 指出下列方程在空间代表什么曲面,若是旋转曲面,则指出它们是由什么曲线绕什么轴旋转而产生的.

(1) $x^2+y^2+z^2+2z=3$;　(2) $x^2=4z$;　(3) $x^2+\frac{y^2}{4}+z^2=1$;

(4) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=z$;　(5) $x^2-y^2=0$;　(6) $x^2-y^2=4z$.

16. 求下列旋转曲面的方程:

(1) $C:\begin{cases} z^2=5x, \\ y=0, \end{cases}$绕 x 轴旋转而成的曲面;　(2) $L:\begin{cases} y=ax, \\ z=0, \end{cases}$绕 y 轴旋转而成的曲面.

17. 求顶点在原点,母线和 z 轴正向夹角保持$\frac{\pi}{6}$的锥面方程.

18. 求通过曲面 $x^2+y^2+4z^2=1$ 和 $x^2=y^2+z^2$ 的交线,而母线平行于 z 轴的柱面方程.

19. 证明:两圆柱面 $x^2+z^2=R^2$ 与 $y^2+z^2=R^2$ 的交线在两个平面上.

20. 求曲线$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ y=c(|c|<a) \end{cases}$关于平面 $\pi: x+y+z=0$ 的投影柱面及投影曲线方程.

答案与提示

1. (1) $-\frac{3}{2}$;　(2) $-\frac{1}{2}$;　(3) 4;　(4) $\pm\frac{\sqrt{70}}{2}$;　(5) $x-3y-z+4=0$;　(6) 1;

(7) $4(x^2+z^2)-9y^2=36$;　(8) $3x^2+2z^2=16$.

(9)投影曲线:$y+z=1, x=0$;投影柱面:$x^2+2y^2-2y=0$.

2. (1) (C);　(2) (C);　(3) (C);　(4) (D);　(5) (C);　(6) (B).

3. $\sqrt{14}$.

4. r 的最小值为1.

5. (1) $a_b=1$　(2) $e_a=\{\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\}$;　(3) $\frac{8}{9},-\frac{4}{9},\frac{1}{9}$.

7. $\frac{1}{6}$.

8. a, b, c 共面$\Leftrightarrow a\cdot(b\times c)=0$.

9. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

10. $6x+3y-10z-7=0$.

11. $\begin{cases} 2x+7y+5z-12=0, \\ 3x-9y+z+8=0. \end{cases}$

12. $(2\sqrt{2}\pm1)x\pm3y-\sqrt{2}z+(12\sqrt{2}\pm17)=0$.

13. $(1,1,1)$.

14. (1)$\frac{\sqrt{3}}{3}$;　(2)$\begin{cases} x-y+1=0, \\ 7x-5y+2z-9=0. \end{cases}$

15. (1)球面. 由曲线$\begin{cases} x^2+(z+1)^2=4 \\ y=0 \end{cases}$或$\begin{cases} y^2+(z+1)^2=4 \\ x=0 \end{cases}$绕 z 轴旋转而成;

(2)抛物柱面; (3)椭球面. 由曲线$\begin{cases}\dfrac{y^2}{4}+z^2=1\\x=0\end{cases}$或$\begin{cases}x^2+\dfrac{y^2}{4}=1\\z=0\end{cases}$绕$y$轴旋转而成;

(4)旋转抛物面. 由曲线$\begin{cases}z=\dfrac{x^2}{2}\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}z=\dfrac{y^2}{2}\\x=0\end{cases}$绕$z$轴旋转而成;

(5)母线平行于z轴的柱面,又是两个相交于z轴的平面;

(6)双曲抛物面(鞍形曲面).

16. (1) $y^2+z^2=5x$; (2) $y=a\sqrt{x^2+z^2}$.

17. $z^2=3(x^2+y^2)$.

18. $5x^2-3y^2=1$

20. 投影柱面:$(x-y+c)^2+c^2+(z-y+c)^2=a^2$,

投影曲线:$(x-y+c)^2+c^2+(z-y+c)^2=a^2,x+y+z=0$.

第7章　多元函数微分学

在实际问题中,很多量都依赖于多个变量,如庄稼的生长依赖于水和肥;化学反应的速率依赖于反应过程中环境的温度与压力;圆柱体的体积依赖于底半径和高.本章将讨论含有两个或两个以上自变量的函数,即多元函数及其微分学.

7.1　n 维欧氏空间中某些基本概念

我们知道,一元函数的定义域是一维实空间(即数直线) $\mathbb{R}$ 的子集,而 n 个自变量的函数,即 n 元函数则将定义在 n 维实空间 $\mathbb{R}^n$ 的子集上,因此我们必须进一步考察 $\mathbb{R}^n$.为此,我们将首先在 $\mathbb{R}^n$ 中引进代数运算、内积和范数,使之成为 n 维欧几里德(Euclid)空间(简称为**欧氏空间**),然后再介绍 n 维欧氏空间中的点集拓扑的基本概念.

7.1.1　n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$

我们在第6章6.1节中以集合的乘积方式引进了 n 维实空间 $\mathbb{R}^n$,即

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times \mathbb{R}\times \cdots \times \mathbb{R} \quad (\text{有 } n \text{ 个 } \mathbb{R}),$$

$\mathbb{R}^n$ 中的元素是形如

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

的 n 元有序组,其中 $x_i \in \mathbb{R}(i=1,2,\cdots,n)$,元素 x 亦称为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点.

下面在 $\mathbb{R}^n$ 中引进代数运算以及内积和范数.

定义 7.1.1　设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点.定义

(1) 相等: $x=y$,当且仅当 $x_1=y_1, x_2=y_2,\cdots,x_n=y_n$.

(2) 和: $x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$.

(3) 数乘: $\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n)$　(α 是实数).

(4) 差: $x-y=x+(-1)y$.

(5) 零向量(或原点): $0=(0,0,\cdots,0)$.

(6) 内积(或点积): $x\cdot y=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

(7) 范数(或模): $\| x \| = \sqrt{x\cdot x}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$,范数 $\| x-y \|$ 称为 x 与 y 之间的**距离或度量**,而 x 与 y 的内积常记作

$$\langle x, y\rangle = x\cdot y.$$

具有上述的运算和结构的空间 $\mathbb{R}^n$ 称为 n **维欧氏空间**.在线性代数中,$\mathbb{R}^n$ 是一个

重要的线性空间(或向量空间).

范数具有下列基本性质.

定理 7.1.1 设 $x, y \in \mathbb{R}^n$,则有

(1) $\|x\| \geqslant 0$,而 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$;

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,$\alpha$ 为任意实数;

(3) $\|x - y\| = \|y - x\|$;

(4) $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \|y\|$ (柯西-许瓦兹不等式);

(5) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (三角不等式);

证 结论(1)、(2)及(3)可直接从范数的定义推得.

为证结论(4),我们令 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$. 显然,对任意实数 λ,都有

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k \lambda + y_k)^2 \geqslant 0,$$

并且等号成立的充要条件是和式中的每一项均为零. 我们把这个不等式写成如下形式:

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geqslant 0,$$

其中
$$A = \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \quad B = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \quad C = \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

若 $A > 0$,则令 $\lambda = -\dfrac{B}{A}$,可得 $B^2 - AC \leqslant 0$,此即所要证的不等式

$$|\langle x, y\rangle| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2} = \|x\| \|y\|.$$

若 $A = 0$,则证明是平凡的.

结论(5)可以从结论(4)推得,这是因为

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 + 2x_k y_k + y_k^2) \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

□

注:有时三角不等式可写成

$$\|x - z\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\|.$$

另外,我们还有不等式

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|.$$

这两个不等式请读者自己证明.

如果在 $\mathbb{R}^n$ 中选取一组单位向量:$e_1 = \{1, 0, \cdots, 0\}$,$e_2 = \{0, 1, \cdots, 0\}$,$\cdots$,$e_n = \{0, 0, \cdots, 1\}$,即 e_i 中第 i 个坐标为1,其余的坐标都是0,则由向量的加法和数乘,我们可以将 $\mathbb{R}^n$ 中任一向量 $a = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 表示为

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n.$$

称这 n 个单位向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为空间 $\mathbb{R}^n$ 中的单位坐标向量(或 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基).

下面我们简要地介绍 $\mathbb{R}^n$ 中点集拓扑的某些基本概念.

7.1.2 邻域

与实直线上点的邻域相仿,我们可以引进 $\mathbb{R}^2$ 中的邻域.

设 $P_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, $r>0$ 是某定数. 记

$$O(P_0,r)=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid \|P-P_0\|<r\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2\},$$

并称 $O(P_0,r)$ 为点 P_0 的 r **邻域**,或者称它为以 P_0 为中心、以 r 为半径的**二维开球**,实际上就是一个不包含边界圆周的**开圆盘**. 而**三维开球**就是 $\mathbb{R}^3$ 中的集合

$$O(P_0,r)=\{P\in\mathbb{R}^3 \mid \|P-P_0\|<r\}$$
$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<r^2\},$$

它是点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ 的邻域.

以上引进的邻域都是圆形的. 我们还可以定义方形的邻域,即

$$O'(P_0,r)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x-x_0|<r,\ |y-y_0|<r\},$$

它是一个以 $P_0(x_0,y_0)$ 点为中心、边长为 $2r$ 的开正方形(即不包含周界),见图7.1.

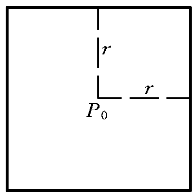


图7.1

在实直线 $\mathbb{R}$ 上,一维开球就是一个开区间.

7.1.3 内点、外点、边界点、聚点

设 $E\subset\mathbb{R}^2$,我们来考察点对点集的位置.

(1) 内点

设 $x=(x_1,x_2)\in E$. 若存在 x 的一个邻域 $O(x,\delta)\subset E$,则称 x 是集合 E 的一个**内点**(见图7.2). 换句话说,E 的内点 x 是这样的点,它本身属于集合 E,并且它近旁的一切点也属于 E. E 中全体内点组成的集合称为 E 的**内部**,记作 E^0.

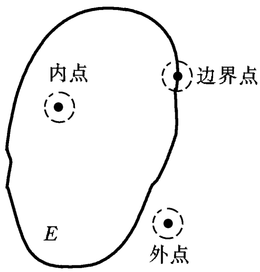


图7.2

(2) 外点

设点 $y\in\mathbb{R}^2$,但 $y\notin E$. 如果存在 y 的一个邻域 $O(y,\delta)$,使得 $O(y,\delta)\cap E=\varnothing$ 或者写为 $O(y,\delta)\subset E^C$, E^C 是 E 的余集,则称 y 是集合 E 的一个**外点**(见图7.2). 换句话说,E 的外点 y 是这样的点,它本身不属于 E,并且它近旁的一切点也不属于 E.

(3) 边界点

设点 $z\in\mathbb{R}^2$, z 可能属于 E 也可能不属于 E. 如果在点 z 的任何邻域 $O(z,\varepsilon)$ 内,既

有E中的点,又有非E中的点,亦即

$$O(z,\varepsilon)\cap E\neq\varnothing \quad 且 \quad O(z,\varepsilon)\cap E^{C}\neq\varnothing,$$

则称z是集合E的一个边界点(见图7.2).E的全体边界点组成的集合称为E的**边界**,记作∂E.

例7.1.1 考察$\mathbb{R}^2$中的点集

$$E=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}.$$

则E的内部 $$E^0=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\},$$

E的边界 $$\partial E=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}.$$ □

(4) 聚点

设点$x\in\mathbb{R}^2$,x可能属于E,也可能不属于E.如果在x的任何邻域$O(x,\varepsilon)$内至少含有E中一个异于x的点,也就是说

$$(O(x,\varepsilon)-\{x\})\cap E\neq\varnothing,$$

则称x是集合E的一个**聚点**.换句话说,E的聚点x是这样的点,在它的任意近旁总能找到E中的异于x的点,“聚”字的含义由此而来.

如果$x\in E$,而x不是E的聚点,则称x是E的**孤立点**.换句话说,E的孤立点x是这样的点,它本身属于E,并且至少存在x的一个邻域$O(x,\delta)$,使得在这个邻域内除x外,再也找不到集合E的点.“孤立”的含义由此而来.

例7.1.2 设集合(见图7.3)

$$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}\cup\{(2,2)\},$$

则E的聚点是集合

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$$

中的所有点,而点(2,2)是E的孤立点. □

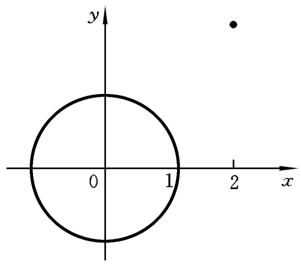


图7.3

7.1.4 开集

设$E\subset\mathbb{R}^2$.如果E中的每一点都是E的内点,则称E是$\mathbb{R}^2$中的一个**开集**.这就是说,开集是由内点组成的,或者说$E=E^0$.

7.1.5 闭集

设$E\subset\mathbb{R}^2$,如果E的余集$E^C=\mathbb{R}^2-E$是$\mathbb{R}^2$中的开集,则称E为$\mathbb{R}^2$中的一个**闭集**.下面给出判断一个集合为闭集的充要条件(证明略).

定理7.1.2 非空点集E是闭集的充要条件是,E的一切聚点(如果有的话)都属于E.

我们称集合

$$\overline{E}=E\cup\{E\text{ 的一切聚点}\}$$

为集合E 的**闭包**. 根据上述定理,任何一个集合E 的闭包$\overline{E}$ 都是闭集. 不难验证,闭包$\overline{E}$ 又可以写为

$$\overline{E}=E\cup\partial E.$$

例7.1.3　集合$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集,而闭包$\overline{E}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$. □

例7.1.4　设有 $\mathbb{R}^2$ 的子集

$$A=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\},$$

则A 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集,而$\overline{A}=[0,1]\times[0,1]$. □

7.1.6　区域

设D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个开集. 如果$\forall x$、$y\in D$,都可用D 内的一条折线(即由有限条直线段组成的连续曲线)将x 和y 连接起来,则称D 为一个**连通的开集**(见图7.4).

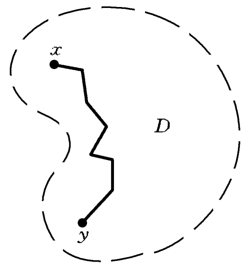


图7.4

连通的开集称为**开区域**. 开区域D 的闭包$\overline{D}=D\cup\partial D$ 称为**闭区域**. 闭区域显然是闭集.

例7.1.5　集合$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个开区域,而集合$\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$则是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭区域. □

习　题　7.1

(A)

1. 回答下列问题:
   (1) n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 如何定义?
   (2) $\mathbb{R}^2$ 中点的邻域如何定义?
   (3) 什么叫集合E 的内点和外点、边界点?
   (4) 集合E 的聚点怎样定义? 聚点和边界点有何不同?
   (5) $\mathbb{R}^2$ 中的开集和闭集怎样定义?
   (6) 闭包是指什么?
   (7) 什么叫开区域和闭区域?
2. 证明不等式:
   (1) $\|x-z\|\leqslant\|x-y\|+\|y-z\|$;　　(2) $\big|\|x\|-\|y\|\big|\leqslant\|x-y\|$.
   其中,$x,y,z\in\mathbb{R}^n$,并在 $\mathbb{R}^2$ 中给出不等式(1)的几何解释.
3. 集合$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$是否为 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集? 为什么?
4. 求下列点集的内点、外点和边界点:
   (1) $A=\{(x,y)\mid y<x^2\}$;　　(2) $B=\{(x,y)\mid 1\leqslant\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}<5\}$;
   (3) $E=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$;　　(4) $F=\{(x,y)\mid x$ 与y 都是有理数$\}$.

(B)

1. 证明 $\mathbb{R}^2$ 中每一个开球都是开集.
2. 试仿照 $\mathbb{R}^2$ 中邻域的定义,写出 $\mathbb{R}^n$ 中点的邻域的定义.

答案与提示

(A)

3. B 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集. 因为 B 中的点都是 B 的聚点,且 B 外的点都不是 B 的聚点. 实际上,任取 $P_0(x_0,y_0)\in B$,则 $x_0^2+y_0^2=1$,以 P_0 为圆心,以任意的 $\varepsilon>0$ 为半径作邻域,则此邻域内显然至少含有 B 中的一个异于 P_0 的点,所以 P_0 是 B 的聚点. 再任取 $P_1(x_1,y_1)\notin B$,则 $x_1^2+y_1^2\neq 1$,显然,以 P_1 为圆心,以充分小的 $\delta>0$ 为半径作邻域,则此邻域内不含 B 的点,所以 P_1 不是 B 的聚点.
4. (1) 内点,$y<x^2$;外点,$y>x^2$;边界点,$y=x^2$;

   (2) 内点,$1<\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}<5$;外点,$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}<1$,$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}>5$;边界点,$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$,$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=5$;

   (3) 内点,$0<x^2+y^2<1$;外点,$x^2+y^2>1$;边界点,$(0,0)$及 $x^2+y^2=1$;

   (4) 内点与外点均为空集,$\mathbb{R}^2$ 中所有点均为边界点.

(B)

1. 设 $O(P_0,r)$是 $\mathbb{R}^2$ 中任一开球,任取 $P_1\in O(P_0,r)$,取 $\delta<r-d(P_0,P_1)$,则 $O(P_1,\delta)\subset O(P_0,r)$,故 P_1 是开球 $O(P_0,r)$的内点.

7.2　多元函数的基本概念

7.2.1　二元函数

我们在第1章1.2.5中给出了多元函数定义,为讨论方便起见,在这里重述一下.

当 A 和 B 都是实数集时,映射 $f:A\to B$ 就是一个**一元(实)函数**,以前讨论的主要都是一元函数.

如果集合 A 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个子集,B 是实数集,那么映射 $f:A\to B$ 就称为**二元函数**. 这时,f 的**定义域** A 由 $\mathbb{R}^2$ 中形如(x,y)的某些点所构成. 通常我们把二元函数记成

$$f:A\to B \quad 或 \quad z=f(x,y),\quad (x,y)\in A.$$

称(x,y)中的 x、y 为**自变量**,称 z 为**因变量**.

类似地,如果 A 是 $\mathbb{R}^3$ 中的子集,它由 $\mathbb{R}^3$ 中形如(x,y,z)的某些点所构成,而 B 是实数集,则映射 $f:A\to B$ 就称为**三元函数**,常记作

$$u=f(x,y,z),\quad (x,y,z)\in A.$$

很自然地,如果 $A\subset\mathbb{R}^n$,B 是实数集,则映射 $f:A\to B$ 称为 n **元函数**,常记作

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A.$$

下面给出二元函数的一些例子.

例7.2.1　圆柱体的底半径为r,高为h,则它体积V和表面积A可以表示为r与h的函数：

$$V = f(r,h) = \pi r^2 h,$$
$$A = g(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

这里,表面积是指圆柱体的上下底面积与侧面积之和. □

例7.2.2　图7.5是一张天气图,图中的曲线为等温线,在这条等温线上的任何地方,其平均温度是相同的. 等温线将全国划分成若干个区域,从一个区域穿过等温线进入另一个区域时,平均温度会有相应的变化. 由此可见,气温是位置的函数,地图上点的位置通常用地理坐标即经度x和纬度y来表示. 因此,我们可以把温度T与点的位置的关系写成一个二元函数

$$T = f(x,y).$$ □

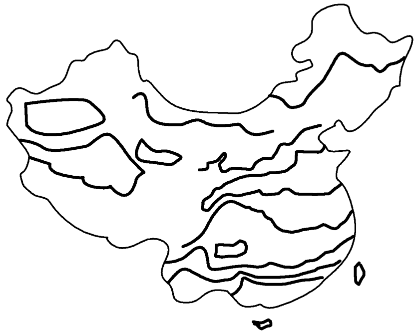


图7.5　我国一月份平均气温部分等温线图

例7.2.3　某农民向信用社贷款L万元用来购买化肥. 按规定,他应在3年内以每月分期付款的方式还清本息. 假设年利率为$r\%$,那么该农民每月应付款数m是L和r的函数：

$$m = f(L,r).$$

由L及r的意义可知,$0< L\leqslant L_0$,$0< r< 100$,其中L_0是信用社所规定的最高贷款额. □

我们知道,一元函数$y= f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$的图像是二维空间$\mathrm{R}^2$中的点集

$$\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, y = f(x)\},$$

即平面上的一条曲线. 而二元函数$z= f(x,y)((x,y)\in D)$的图像则是三维空间R^3中的点集

$$\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D, z = f(x,y)\}.$$

通常我们说二元函数的图像是空间中的一张曲面(见图7.6).

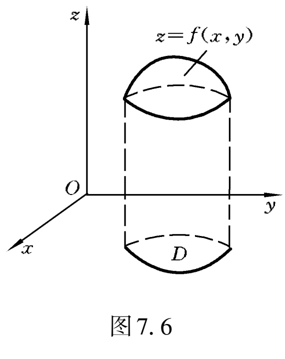


图7.6

例7.2.4　线性函数

$$z = ax + by + c$$

的图像是一张平面(参看第6章6.3.2). □

关于二元函数的图像,我们将在下节作进一步讨论.

7.2.2　等高线和等位面

(1) 等高线

我们在上节研究方程的图像时,常常采用如下的方法去认识曲面的形状,即用与

坐标平面平行的平面去截空间曲面,由此得到许多平面交线,从这些平面曲线的形状便可大致了解曲面的形状.

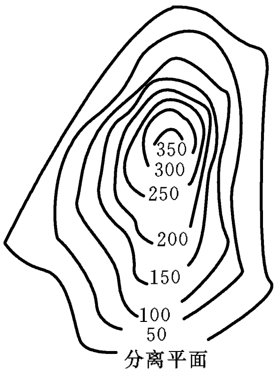
在 $z=f(x,y)$ 中,令 $z=c$,得方程式

$$f(x,y)=c, \tag{7.2.1}$$

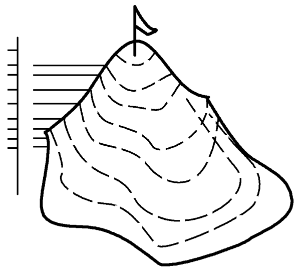
它确定一个点集,即水平平面 $z=c$ 与函数 $z=f(x,y)$ 的图形相交而构成的点集. 若方程(7.2.1)在 xOy 平面代表一条曲线,它就是垂直于 z 轴的平面 $z=c$ 与曲面 $z=f(x,y)$ 的交线在 xOy 平面上的投影曲线,称之为曲面的**等高线**.

如果对每一 c 值(属于函数的值域),方程(7.2.1)都确定一曲线,我们就得到**一族等高线**(注:有的书上叫做**水平曲线**).

例 7.2.5 图 7.7(a)画的是一座山峰的等高线. 若旅游者沿着一条等高线走的话,那么他既不上升也不下降. 在图上以 50 m 的间隔画了 8 条等高线. 而图 7.7(b)则画出了这座山峰及其等高线,我们注意到等高线密集处正是山峰比较陡峭的地方.



(a)



(b)

图 7.7

设 $f(x,y)$ 表示地图上点 (x,y) 处山的高度,则 300 m 的等高线就由满足等式

$$f(x,y)=300$$

的那些点组成. 也就是说,在 300 m 等高线上,f 是一个常数,其值为 300.

等高线图显然有其经济价值和军事价值. □

例 7.2.6(等产量曲线) 大多数商品的生产至少需要依赖于诸如土地、劳动力、资本、材料或机器中的两种生产要素. 假设某商品的产量是 z,生产它所用的两种生产要素的数量分别是 x 和 y. 则 z 是投入 x 和 y 之后最大可能的产量,即

$$z=f(x,y),$$

称之为**生产函数**. 曲线族

$$f(x,y)=c, \tag{7.2.2}$$

称为**等产量曲线**. 通过这些曲线可以研究生产函数.

方程(7.2.2)的每条曲线表示生产某特定产出的要素 x 和 y 的组合. 如果这两种生产要素是可相互替换的,则减少一种要素的投入时,就必须增加另一种要素的投入来补偿,这样才能维护产量不变.

等产量曲线与生产函数的性质有关,它的形状是各种各样的. 让我们来考察一下图7.8与图7.9中的两条等产量曲线.

先看图7.8中的等产量曲线. 在图上我们让 y 的值固定而让 x 的值增加,那么点 (x,y) 就会移到右边的曲线上,因此产量将总是增加的. 再看图7.9中的等产量曲线. 我们还是固定 y 的值而让 x 的值增加,那么会发现,点 (x,y) 随着 x 的增加会越来越移动到与曲线平行的位置. 这就是说,在这种情形下,产量是增加的,但增加得很慢. 类似地,若固定 x 的值而让 y 的值增加,那么图7.8的等产量曲线表明,产量将以一个定常的比率增加;而图7.9的等产量曲线则表明,产量是以一个递减的比率增加的. □

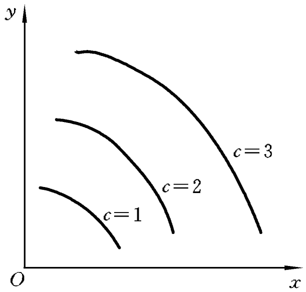


图7.8

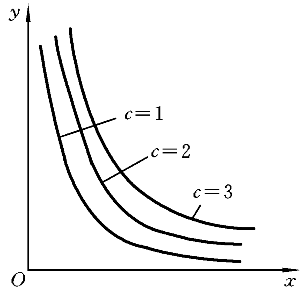


图7.9

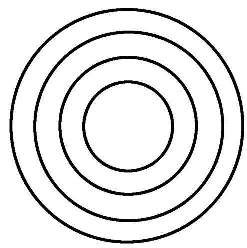


图7.10

例7.2.7　函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 的等高线是一族圆(见图7.10):

$$\sqrt{x^2+y^2}=c,$$

而函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的图像则是一个锥面(见图7.11). □

(2) 等位面

对于三元函数 $u=f(x,y,z)$,令 $u=c$,得方程式

$$f(x,y,z)=c, \tag{7.2.3}$$

它表示三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面,称为函数 f 的**等位面**(或**水平曲面**).

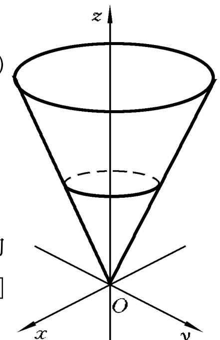


图7.11

例7.2.8　函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 的等位面方程是

$$x^2+y^2+z^2=c,$$

它表示一个以原点(0,0,0)为中心、$\sqrt{c}$ 为半径的球面. 当 c 变动时,可得到一族球面. □

例7.2.9　函数 $u=x^2+y^2-z^2$ 的等位面方程是

$$x^2+y^2-z^2=c. \tag{7.2.4}$$

若 $c>0$.则方程(7.2.4)为单叶双曲面.如图7.12(a)所示.若 $c<0$.

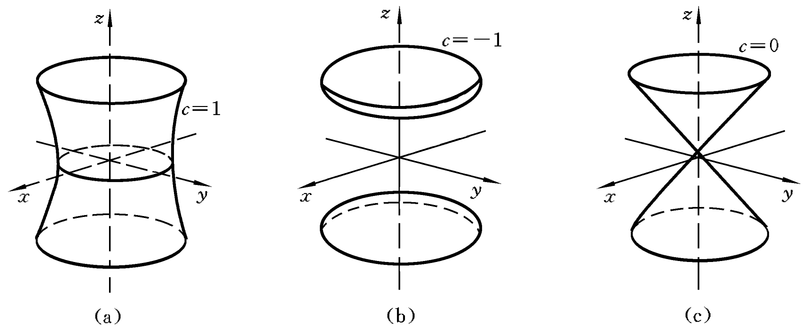


图 7.12

则方程(7.2.4)为双叶双曲面,如图 7.12(b)所示. 若 $c=0$,则我们得到锥面 $x^2+y^2=z^2$,如图 7.12(c)所示. □

7.2.3 极限与连续

下面以二元函数为例,给出多元函数的极限与连续的概念.

设有二元函数

$$z=f(x,y),\quad 定义域为 D.$$

设 $P_0(x_0,y_0)$是 D 的聚点(注意,P_0 可以属于 D,也可以不属于 D),动点 $P(x,y)\in D$. 我们考察当动点 P 以**任意的方式**趋于 P_0 时,函数 $f(P)$的变化趋势. 先看两个例子.

例 7.2.10 设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,当 $(x,y)\to(0,0)$时,$f(x,y)$的变化趋势如何?

解 函数在除去原点的全平面有定义. 讨论函数在原点的极限时,函数在原点是否有定义是无关紧要的.

当 $(x,y)\to(0,0)$时,显然有 $y\to0$,即因子 y 是无穷小量.

当 $(x,y)\neq(0,0)$时,有

$$\sqrt{x^2+y^2}\geqslant\sqrt{x^2}=|x|,\quad 即\quad \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant1,$$

这表明当 $(x,y)\to(0,0)$时,因子 $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 是有界变量. 根据无穷小量的性质即得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$ □

例 7.2.11 设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$,问当 $(x,y)\to(0,0)$时 $f(x,y)$是否有极限?

解 我们初步观察到当 $(x,y)\to(0,0)$时,分子与分母趋于零的速度差不多,因此我们猜测,如果有极限的话,极限不会是零.

令动点 (x,y)沿直线 $y=kx(k\neq0)$趋于点(0,0). 于是有

$$\lim_{\substack{y=kx\\x\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{y=kx\\x\to 0}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2}\neq 0.$$

由此看出这个极限值与 k 有关. 当 k 分别取为 1 和 2 时,即当动点 (x,y) 分别沿直线 $y=x$ 和 $y=2x$ 趋于 $(0,0)$ 时,函数分别趋于 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{2}{5}$. 这样,我们说当 $(x,y)\to(0,0)$ 时,函数的极限不存在. □

现在我们用"ε-δ"的语言给出二元函数极限的定义.

定义 7.2.1　设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D, $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点, A 为某定数. 如果 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,使得对于适合不等式

$$0<\|P-P_0\|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切 $P(x,y)\in D$,都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立,则称数 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限,记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A\quad\left(或 \lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A\right)$$

或
$$f(x,y)\to A\quad(\|P-P_0\|\to 0).$$

接着再给出二元函数的连续性定义.

定义 7.2.2　设 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D, P_0 是 D 的聚点且 $P_0\in D$. 如果

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

则称 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点**连续**, (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的**连续点**.

用"ε-δ"的语言叙述,就是: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,当 $\|P-P_0\|<\delta$ 时,有

$$|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon.$$

由上述定义可见, P_0 是 D 的孤立点时,上述条件也满足. 因此我们约定:定义域 D 中的孤立点都是函数的连续点. 若 $f(x,y)$ 在 D 的每一点都是连续的,则称 $f(x,y)$ 在 D 连续,记作 $f\in C(D)$.

$f(x,y)$ 的不连续点称为**间断点**.

例 7.2.12　讨论二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, y \text{ 任意},\\ 0, & x=0, y \text{ 任意}\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处的连续性.

解　当 $x\neq 0$ 时,
$$|f(x,y)|=\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x+y|,$$
当 $x=0$ 时,
$$|f(x,y)|=0.$$
因此,不论 x、y 为何值,都有

$$|f(x,y)| \leqslant |x+y|.$$

于是由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)=0$ 可得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0).$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续. □

我们注意到,多元函数的极限与连续的定义与一元函数的情形十分相似,因此,有关一元函数的极限运算法则、连续函数的运算法则以及初等函数的连续性等,均可平行地推广到多元函数的情形.

一元连续函数的许多基本性质对多元连续函数来说也仍然成立,例如连续函数的保号性等等.下面我们给出有界闭区域上二元连续函数的几个基本性质.

定理 7.2.1　设 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x,y)$ 在 D 上取到它的最大值和最小值.

定理 7.2.1 的几何意义是:一张有界闭区域上的连续曲面,必定有最高点和最低点,最高点和最低点可以在 D 的内部达到,也可以在 D 的边界上达到.

定理 7.2.2　设 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,常数 η 介于 f 在 D 上某两点的函数值之间,则在 D 上总可找到一点 (x_0,y_0),使得

$$f(x_0,y_0)=\eta.$$

定理 7.2.3　设 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则必在 D 上一致连续.即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得 $\forall P_1、P_2\in D$,只要 $\|P_1-P_2\|<\delta$,就有

$$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon.$$

习　题　7.2

(A)

1. 回答下列问题:
   (1) 二元函数的定义是什么?它的图像是怎样的一个点集?
   (2) 什么是函数 $f(x,y)$ 的等高线?
   (3) 什么是函数 $f(x,y,z)$ 的等位面?
   (4) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的极限怎样定义?
   (5) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续怎样定义?
2. 确定并画出下列二元函数的定义域:
   (1) $z=x+\sqrt{y}$;　(2) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$;　(3) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$;
   (4) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$;　(5) $z=\ln(-x-y)$;　(6) $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$.
3. 设函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\arctan\dfrac{x}{y}$,求 $f(tx,ty)$.
4. 问下列表达式是否是 $a、b$ 的二元函数:

(1) $I=\int_0^1 (a+bx)^2\mathrm{d}x$;　　(2) $I=\int_a^b (1+x)^2\mathrm{d}x$;　　(3) $I=\begin{cases}1, & a>b,\\ 0, & a=b,\\ -1, & a<b.\end{cases}$

5. 根据下列对应关系,写出函数表达式:
   (1) $\forall(x,y)\in \mathbf{R}^2$,用该点到原点的距离与之对应;
   (2) $\forall(x,y)\in \mathbf{R}^2$,用该点的坐标之和与之对应.
6. 求下列函数极限:
   (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$;　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{1}{x^2+y^2}$;　(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$;　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$.
7. 证明函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在原点$(0,0)$处不连续.
8. 求下列函数的间断点集. 设$f(0,0)=0$.
   (1) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　(2) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$;　(3) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$.
9. 当x摩尔硫酸和y摩尔水混合时,产生的热量为$Q(x,y)=\dfrac{17.86xy}{1.798x+y}(x>0,y>0)$. 试问$Q$在$(0,0)$点的极限是否存在? 若存在,试求出极限值.

(B)

1. 画出下列函数的等高线,并写出等高线方程:
   (1) $z=x+y$;　(2) $z=|x|+y$;　(3) $z=x^2+y^2$;　(4) $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$.
2. 求下列函数的等位面并写出其方程:
   (1) $u=x+y+z$;　　(2) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$;
   (3) $g(x,y,z)=y-z$;　　(4) $u=\operatorname{sgn}\sin(x^2+y^2+z^2)$.
3. 仿照定义7.2.1,试给出三元函数$u=f(x,y,z)$在点(x_0,y_0,z_0)的极限定义及连续性定义.
4. 证明下列极限不存在:
   (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{y}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

答案与提示

(A)

2. (1) $-\infty<x<+\infty, y\geqslant 0$;　(2) $|x|\leqslant 1, |y|\geqslant 1$;　(3) $x^2+y^2\leqslant 1$;
   (4) $x^2+y^2>1$;　(5) $x+y<0$;　(6) $|y|\leqslant|x|, x\neq 0$.
3. $f(tx,ty)=t^2f(x,y)$.
4. (1) 是;　(2) 是;　(3) 是.
5. (1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$;　(2) $f(x,y)=x+y$.
6. (1) 1;　(2) $\dfrac{1}{4}$;　(3) 0;　(4) 0.
7. 由于$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^4+x^4}=\dfrac{1}{2}\neq f(0,0)$,故$f$在$(0,0)$点不连续.

8. (1) $(0,0)$; (2) $(0,0)$; (3) $(0,0)$,以及满足 $x+y=0$ 的点.
9. 极限存在,极限值为0.

(B)

1. (1) $x+y=c$; (2) $|x|+y=c$; (3) $x^2+y^2=c$; (4) $x^2+2y^2=a^2, a>0$.
2. (1) $x+y+z=c$; (2) $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$; (3) $y-z=c$;
   (4) $\operatorname{sgn}\sin(x^2+y^2+z^2)=c$,当 $c=0$ 时,为同心球族 $x^2+y^2+z^2=n\pi(n=0,1,2,\cdots)$;当 $c=(-1)^n$ 时,为球层族 $n\pi<x^2+y^2+z^2<(n+1)\pi(n=0,1,2,\cdots)$.
4. 令 $y=kx$,则可知(1)与(2)的极限值均与 k 有关.

7.3 偏导数与全微分

多元函数虽然是一元函数的推广,它保留了一元函数中的许多性质,但由于自变量从一个增加到多个,从而从本质上产生了某些新的内容. 本节将在一元函数微分学的基础上,讨论多元函数的偏导数及全微分的计算及有关问题.

7.3.1 偏导数

设二元函数 $z=f(x,y)$ 定义在开区域 D 上,点 $(a,b)\in D$. 由于 D 是开区域,故存在一个小邻域 $O((a,b),\delta)\subset D$. 固定 $y=b$,得到 x 的一元函数

$$z=f(x,b),$$

并假设这个一元函数在 $x=a$ 点导数存在;又固定 $x=a$,得到 y 的一元函数

$$z=f(a,y),$$

并假设这个一元函数在 $y=b$ 点导数存在. 现在给出下面的定义.

定义 7.3.1(偏导数) 设二元函数 $z=f(x,y)$ 定义于开区域 D,且点 $(a,b)\in D$,称一元函数 $z=f(x,b)$ 在 a 点的导数为二元函数 $f(x,y)$ 在 (a,b) 点关于 x 的**偏导数**,记作

$$f_x(a,b) \quad 或 \quad \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} \quad 或 \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=a\\y=b}};$$

也可记作

$$z_x(a,b) \quad 或 \quad \frac{\partial z(a,b)}{\partial x} \quad 或 \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}.$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在开区域 D 的每一点,都可以求两个偏导数,则这两个偏导数可记为

$$f_x(x,y) \quad 或 \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \qquad f_y(x,y) \quad 或 \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

有时就简记为 $\quad f_x, \quad f_y, \quad 或 \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}.$

对于D中每一点(x,y),都有两个偏导数与之对应,由函数概念知,偏导数是开区域D上的二元函数.于是由一个二元函数$f(x,y)$,可以导出两个二元函数$f_x(x,y)$与$f_y(x,y)$.

让我们来看一下偏导数的几何意义.设二元函数$z=f(x,y)$在(a,b)点附近的图形如图7.13所示.设P是曲面上位于(a,b)点正上方的一点.过(a,b)点且垂直于y轴的平面π与曲面的交线为曲线C.曲线C在平面π上的方程为$z=f(x,b)$.由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,b)\Big|_{x=a}=f_x(a,b),$$

所以偏导数$f_x(a,b)$就表示曲线C在P点的切线对x轴的斜率(见图7.13).类似可讨论偏导数$f_y(a,b)$的几何意义.

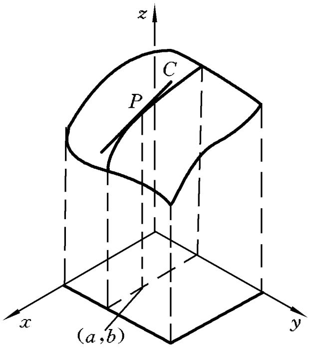


图7.13

把前面的讨论综述如下:

$$f_x(a,b)=\begin{matrix}f\text{ 在}(a,b)\text{ 点}\\ \text{关于 }x\text{ 的变化率}\end{matrix}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x,b)-f(a,b)}{\Delta x}$$

$$f_y(a,b)=\begin{matrix}f\text{ 在}(a,b)\text{ 点}\\ \text{关于 }y\text{ 的变化率}\end{matrix}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(a,b+\Delta y)-f(a,b)}{\Delta y}$$

偏导数的计算总是归结为求某个一元函数的导数,并没有什么新的技巧.下面给出一些例子.

例7.3.1　设$f(x,y)=\dfrac{y^2}{x+1}$,求$f_x(3,2)$和$f_y(3,2)$.

解　由定义知,$f_x(3,2)$等于$m(x)=f(x,2)$在$x=3$点的导数.由于

$$m(x)=f(x,2)=\frac{4}{x+1},$$

而

$$m'(x)=-\frac{4}{(x+1)^2},$$

所以

$$f_x(3,2)=m'(3)=-\frac{1}{4}.$$

类似地,$f_y(3,2)$等于$n(y)=f(3,y)$在$y=2$点的导数,由于

$$n(y)=f(3,y)=\frac{y^2}{4},$$

而

$$n'(y)=\frac{y}{2},$$

所以

$$f_y(3,2)=n'(2)=1.$$

□

例7.3.2　求$z=\arctan\dfrac{y}{x}$的偏导数.

解　对 x 求偏导数时,把 y 看成常数,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2};$$

对 y 求偏导数时,把 x 看作常数,得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$ □

例 7.3.3　计算下列函数的偏导数:

(1) $f(x,y)=x^2\sin 3y$;　　(2) $z=(3xy+2x)^5$.

解　(1) $f_x(x,y)=\sin 3y\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2)=2x\sin 3y$,

$$f_y(x,y)=x^2\frac{\partial}{\partial y}(\sin 3y)=3x^2\cos 3y.$$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=5(3xy+2x)^4\dfrac{\partial}{\partial x}(3xy+2x)=5(3xy+2x)^4(3y+2)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=5(3xy+2x)^4\frac{\partial}{\partial y}(3xy+2x)=5(3xy+2x)^4 3x.$$ □

例 7.3.4　求 $f(x,y,z)=\dfrac{x^2y^3}{z}$ 的所有偏导数.

解　三元函数或多于三个自变量的函数的偏导数,可像二元函数的偏导数那样类似地定义.具体计算函数对某个自变量的偏导数时,只需将其他变量看作常数即可.

在本例中,求 f 对 x 的偏导数时,把 y、z 看作常数,得

$$f_x(x,y,z)=\frac{2xy^3}{z}.$$

类似地,得　$f_y(x,y,z)=\dfrac{3x^2y^2}{z}$,　$f_z(x,y,z)=-\dfrac{x^2y^3}{z^2}$.　□

7.3.2　全微分

首先我们来回顾一下一元函数的局部线性化.设 $y=f(x)$,在 $x=a$ 点的附近,我们用切线来逼近曲线,即当 x 在 a 点附近时,有

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a),$$

如图 7.14 所示.这时我们说 f 在 $x=a$ 附近被局部地线性化了.

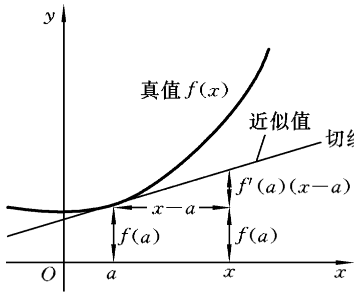


图 7.14

对于二元函数 $z=f(x,y)$,如果沿着一条平行于一个坐标轴的直线对它进行局部线性化,那么上面办法是可用的.例如设

$$f(x,y)=x^2y+y^2.$$

沿着直线 $y=1$，有 $f(x,1)=x^2+1$. 那么在 $x=2$ 处的切线逼近 $f(x,1)$ 的表达式为

$$f(x,1)\approx f(2,1)+f_x(2,1)(x-2)=5+4(x-2).$$

另一方面，若固定 $x=2$，则得 $f(2,y)=4y+y^2$，于是在 $y=1$ 附近的局部线性化为

$$f(2,y)\approx f(2,1)+f_y(2,1)(y-1)=5+6(y-1).$$

现在，如果我们想知道对于点 $(2,1)$ 附近的点 (x,y)，$f(x,y)$ 用什么来逼近，那就需要研究对二元函数的线性逼近问题了. 解决这个问题的主要途径是引进二元函数的全微分概念.

定义 7.3.2(**全微分**)　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (a,b) 的某邻域内定义，若函数在 (a,b) 点的全增量

$$\Delta z=f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)$$

可以表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\tag{7.3.1}$$

其中 A、B 仅与 a、b 有关，而与 Δx、Δy 无关，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，则称函数在 (a,b) 点**可微**，并称全增量的线性部分 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 f 在点 (a,b) 的**全微分**，记作

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y\quad\text{或}\quad\mathrm{d}f(a,b)=A\Delta x+B\Delta y.$$

如果函数在开区域 D 内每一点都可微，则称这函数在 D 内可微.

例 7.3.5　证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y+(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点可微.

证　易证函数在全平面有定义且连续，现考察函数在原点的全增量：

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\Delta x+\Delta y+(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}\\&=\Delta x+\Delta y+\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\Delta x+\Delta y+\alpha(x,y)\rho,\end{aligned}$$

其中 $\alpha(x,y)=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. 显然，当 $\rho\to 0$ 时，$\alpha\to 0$. 这样，全增量 Δz 就表示为线性部分 $\Delta x+\Delta y$ 与高阶无穷小部分 $o(\rho)=\alpha(x,y)\rho$ 之和，由全微分的定义可知，该函数在原点可微，其全微分为

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}f(0,0)=\Delta x+\Delta y.$$

□

设函数 $z=f(x,y)$ 在 (a,b) 点可微，记 $x=a+\Delta x$，$y=b+\Delta y$，则由(7.3.1)式可得

$$f(x,y)-f(a,b)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho).$$

由于当 $\rho\to 0$ 时，高阶无穷小量 $o(\rho)\to 0$，因此，当点 (x,y) 位于点 (a,b) 的近旁时，有近似式

$$f(x,y)\approx f(a,b)+A(x-a)+B(y-b).\tag{7.3.2}$$

方程

$$z=f(a,b)+A(x-a)+B(y-b)\tag{7.3.3}$$

的图形是一个平面. 于是,(7.3.2)式告诉我们,曲面 $z=f(x,y)$上的点可以用平面(7.3.3)上的点(局部地)逼近. 换句话说,(7.3.2)式表明在(a,b)附近函数$f(x,y)$的**局部线性化**.

我们自然会问:方程(7.3.3)所表示的是怎样的一个平面? A 与B 如何求得? 在回答这些问题之前,我们先来探讨一下可微、连续与偏导数这几个概念之间的关系.

7.3.3 连续性与可微性,偏导数与可微性

首先,由可微的定义立即推知,若函数$z=f(x,y)$在(a,b)点可微,则$f(x,y)$必在(a,b)点连续. 事实上,当$\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$时,由(7.3.1)式即得

$$\Delta z=f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)\to 0,$$

也就是
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}f(a+\Delta x,b+\Delta y)=f(a,b).$$

因此$f(x,y)$在(a,b)点连续. 但反过来由连续性不能推得可微性(见习题7.3(A)第8题).

其次,我们探讨可微与偏导数存在的关系.

定理7.3.1(**可微的必要条件**) 设函数$z=f(x,y)$在(a,b)点可微,则函数在该点的两个偏导数存在,且(7.3.1)式中的

$$A=f_x(a,b),\quad B=f_y(a,b),$$

因而有
$$\mathrm{d}z=f_x(a,b)\Delta x+f_y(a,b)\Delta y. \tag{7.3.4}$$

证 我们给量a一个增量Δx,而量b保持不变(即$\Delta y=0$). 换句话说,让点$P(a,b)$在x轴的方向上移动. 于是有$\mathrm{d}z=A\Delta x$,从而

$$\Delta z=f(a+\Delta x,b)-f(a,b)=\mathrm{d}z+o(\rho)=A\Delta x+o(|\Delta x|).$$

由此可见
$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x,b)-f(a,b)}{\Delta x}=A+\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}=A+o(1),$$

当$\Delta x\to 0$时,上式右端的极限是A,所以上式左端的极限存在并且也等于A. 换句话说,$f_x(a,b)$存在且$f_x(a,b)=A$.

类似地,可以证明$f_y(a,b)$存在,并且$f_y(a,b)=B$. 证毕. □

由定理7.3.1显然可以推出微分的唯一性. 此外,定理7.3.1也回答了前面所提出的问题. 至于平面

$$z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

与曲面$z=f(x,y)$的关系,我们将在本章7.9节中详细讨论.

应当指出,**偏导数存在并不是可微的充分条件**,这一点是和一元函数的情形不同的(在一元函数情形,可微与可导等价). 请看下面的例子.

例7.3.6 设$z=f(x,y)=\sqrt{|xy|}$. 由于$f(x,0)\equiv 0,f(0,y)\equiv 0$,故$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$,即两个偏导数都存在且等于零. 至于函数在(0,0)点可微,则应考察下式

的极限

$$\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

在$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$时,是否收敛于0,由于

$$\lim_{\substack{\Delta x=\Delta y\\ \Delta x\to 0}}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0,$$

故上式极限也不为0,从而$f(x,y)$在$(0,0)$不可微. □

不过,我们只要在偏导数存在的基础上再加一点条件,就可以保证函数的可微性了.这就是下面的定理.

定理7.3.2(可微的充分条件)　设函数$z=f(x,y)$在(a,b)点的邻域存在偏导数,且这些偏导数在(a,b)点连续,则函数在该点可微.

证　注意,偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(a,b)$的连续性是以它们在该点的某个邻域内存在为前提的.今后凡遇到此种情形都作这样的理解.

令$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$,$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$,要证明

$$\Delta z-\mathrm{d}z=o(\rho)\quad(\rho\to 0).$$

函数的全增量可写成

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)\\&=[f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b+\Delta y)]+[f(a,b+\Delta y)-f(a,b)],\end{aligned}\tag{7.3.5}$$

(7.3.5)式的第一个差中,函数的第二个变量都是$b+\Delta y$,因此我们可以把这个差看作是x的一元函数的增量.应用拉格朗日中值定理,得

$$f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b+\Delta y)=f_x(a+\theta_1\Delta x,b+\Delta y)\cdot\Delta x,\quad 0<\theta_1<1.$$

类似地,对于(7.3.5)式中的第二个差,有

$$f(a,b+\Delta y)-f(a,b)=f_y(a,b+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y,\quad 0<\theta_2<1.$$

于是,等式(7.3.5)就成为

$$\Delta z=f_x(a+\theta_1\Delta x,b+\Delta y)\cdot\Delta x+f_y(a,b+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y.$$

从而

$$\Delta z-\mathrm{d}z=[f_x(a+\theta_1\Delta x,b+\Delta y)-f_x(a,b)]\Delta x+[f_y(a,b+\theta_2\Delta y)-f_y(a,b)]\Delta y.$$

又因为

$$|\Delta x|\leqslant\rho,\quad|\Delta y|\leqslant\rho,$$

所以

$$\frac{|\Delta z-\mathrm{d}z|}{\rho}\leqslant|f_x(a+\theta_1\Delta x,b+\Delta y)-f_x(a,b)|+|f_y(a,b+\theta_2\Delta y)-f_y(a,b)|.$$

因为$f_x(x,y)$与$f_y(x,y)$在点(a,b)连续,故当$\rho\to 0$时,上式右端的两项都趋于零,因而有

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-\mathrm{d}z}{\rho}=0,$$

或写成
$$\Delta z = \mathrm{d}z + o(\rho) \quad (\rho \to 0).$$

这样我们就证明了 $\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ 的确是函数 $z = f(x, y)$ 在点 (a, b) 的微分. □

注意,函数 $f(x, y)$ 在 (a, b) 点的邻域存在偏导数,且这些偏导数在 (a, b) 点连续,只是 $f(x, y)$ 在 (a, b) 点可微的充分条件,而非必要条件. 请看下面的例子.

例 7.3.7 设 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$

则 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 存在偏导数, $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不连续,但 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微.

证 首先证 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点存在偏导数,但偏导数在 $(0, 0)$ 点不连续. 因

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \dfrac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(\Delta y)^2 \sin \dfrac{1}{(\Delta y)^2}}{\Delta y} = 0.$$

当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时,

$$f_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2},$$

$$f_y(x, y) = 2y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

容易看出,令 $y = x$,则

$$f_x(x, x) = 2x \sin \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{2x^2} \not\to 0 \quad (x \to 0),$$

因此 $f_x(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不连续,同理可知 $f_y(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不连续.

其次证明 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微,因为

$$\frac{\left[(\Delta x^2 + \Delta y^2)\sin \dfrac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} - 0 - 0 \cdot \Delta x - 0 \cdot \Delta y\right]}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0 \quad \left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0\right),$$

由定义 7.3.2 知 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微. □

附注 特殊的情形,如果函数

$$z = f(x, y) = x,$$

则
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

因而
$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x = \Delta x.$$

同样,若 $z = f(x, y) = y$,则有

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}y = \Delta y.$$

因此,在这里,同一元函数的情形一样,对于自变量来说,增量与微分完全是一回事.

因此,如果函数的微分存在,我们就可以把它写成

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad \square$$

一元函数全微分的概念以及它的一切性质,可以不经过任何本质的改变而类推到三个或三个以上变量的情形. 例如在函数$u = f(x, y, z)$的情形,我们定义它在点(x, y, z)的微分du是如下形状的表达式:

$$du = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z,$$

其中A、B与C不依赖于Δx、Δy及Δz,且满足条件$\Delta u - du = o(\rho)$ $(\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \to 0)$. 可以证明,当全微分存在时,必有

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

特别是有$dx = \Delta x$,$dy = \Delta y$,$dz = \Delta z$,因而有

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

例7.3.8　求函数$z = x^2 + 4xy^2 + y^4$的全微分.

解　因偏导数　$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 8xy + 4y^3$

在全平面连续,由定理7.3.2知函数在全平面可微,且

$$dz = (2x + 4y^2)dx + (8xy + 4y^3)dy. \qquad \square$$

例7.3.9　求函数$u = 2x + \cos y + e^{yz}$的全微分.

解　因为　$\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\sin y + ze^{yz}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = ye^{yz},$

所以

$$du = 2dx + (-\sin y + ze^{yz})dy + ye^{yz}dz. \qquad \square$$

最后我们给出一个利用局部线性化表达式(7.3.1)来作近似计算的例子.

例7.3.10　计算$(1.03)^{1.98}$的近似值.

解　根据问题的特点,我们设函数为

$$f(x, y) = x^y;$$

由$1.03 = 1 + 0.03$,$1.98 = 2 - 0.02$,设$\Delta x = 0.03$,$\Delta y = -0.02$. 然后将它们代入近似式

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y,$$

即

$$(x + \Delta x)^{y + \Delta y} \approx x^y + yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y,$$

于是

$$(1.03)^{1.98} \approx 1^2 + 2 \times 0.03 + 0 \times (-0.02) = 1.06. \qquad \square$$

习　题　7.3

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 二元函数$f(x, y)$的偏导数怎样定义?

(2) 三元函数$f(x,y,z)$的偏导数怎样定义?

(3) $f(x,y)$的偏导数的几何意义是什么?

(4) 函数$z=f(x,y)$在(a,b)点可微怎样定义? 全微分是指什么?

(5) 函数$f(x,y)$在某点附近局部线性化是什么意思?

(6) 函数$f(x,y)$在一点的可微性与连续性有什么关系?

(7) 函数$f(x,y)$可微的必要条件是什么? 充分条件是什么?

2. 求下列函数的偏导数:

(1) $z=x^2y-y^2x$; (2) $y=\sin(2t-5x)$; (3) $f(x,y)=xy+\dfrac{x}{y}$;

(4) $z=\dfrac{x}{y^2}$; (5) $z=\dfrac{\cos x^2}{y}$; (6) $z=\tan\dfrac{x^2}{y}$;

(7) $z=x^y$; (8) $g(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; (9) $u=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$;

(10) $u=z^{xy}$; (11) $u=(xy)^z$; (12) $u=x^{\frac{y}{z}}$.

3. 求下列函数在指定点的各个偏导数:

(1) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,在$(1,0)$,$(0,1)$处;

(2) $z=e^{-x}\sin(x+2y)$,在$(0,\dfrac{\pi}{4})$处;

(3) $f(x,y,z)=\sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$,在$(1,1,1)$处;

(4) $z=\sin x\ln(y+1)+\cos y\ln(1-x)$,在$(0,0)$处.

4. 求函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$的偏导数.

5. 求下列函数的偏导数:

(1) $u=\ln(x_1+x_2+\cdots+x_n)$; (2) $u=\arcsin(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$.

6. 求下列函数的全微分:

(1) $z=e^{-x}\cos y$; (2) $f(x,y)=\sin(xy)$; (3) $g(u,v)=u^2+uv$;

(4) $u=x^{yz}$; (5) $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (6) $z=x^2y+\dfrac{x}{y}$.

7. 求下列函数在给定点的全微分:

(1) $f(x,y)=xe^{-y}$,在$(1,0)$点;

(2) $g(x,t)=x^2\sin 2t$,在$(2,\dfrac{\pi}{4})$点;

(3) $F(m,r)=\dfrac{Gm}{r^2}$,在$(100,10)$点;

(4) $f(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)$,在$(1,2)$点.

8. 证明:函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0. & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)的邻域内连续,且有有界的偏导数$f_x(x,y)$与$f_y(x,y)$,但此函数在点(0,0)不可微.

(B)

1. 计算下列各题:

(1) $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$;　(2) $\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)$;　(3) $\frac{\partial}{\partial x}\left(a\sqrt{x}\right)$, $x>0$;

(4) $\frac{\partial}{\partial T}\left(\ln\frac{T+3}{V}\right)$;　(5) $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x^2y^7-y^2}{15xy-8}\right)$;　(6) $\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{x^2y\lambda-3\lambda^5}{\sqrt{\lambda^2-2\lambda+5}}\right)$;

(7) $\frac{\partial}{\partial\theta}(3t\cos(5\theta-1)-\tan(7t\theta^2))$;　(8) $\frac{\partial}{\partial w}(\sqrt{2\pi xyw-13x^7y^3v})$, $2\pi xyw-13x^7y^3v>0$.

2. 求下列函数在指定点的偏导数:

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$在(0,0)点;

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^3}{x^2+4y^3}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$在(0,0)点.

3. 求下列各式的近似值:

(1) $(0.97)^{1.05}$　(2) $\sin 29°\tan 46°$

4. 设函数$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$证明:(1) $f_x(0,0)$与$f_y(0,0)$存在;(2) $f_x(x,y)$与$f_y(x,y)$在(0,0)不连续;(3) $f(x,y)$在(0,0)点可微.

5. 函数$f(x,y)=|x|+\sin(xy)$在(0,0)点是否可微?为什么?

答案与提示

(A)

2. (1) $z_x=2xy-y^2, z_y=x^2-2yx$;　(2) $y_t=2\cos(2t-5x), y_x=-5\cos(2t-5x)$;

(3) $f_x=y+\frac{1}{y}, f_y=x-\frac{x}{y^2}$;　(4) $z_x=\frac{1}{y^2}, z_y=-\frac{2x}{y^3}$;

(5) $z_x=-\frac{2x\sin x^2}{y}, z_y=-\frac{\cos x^2}{y^2}$;　(6) $z_x=\frac{2x}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}, z_y=-\frac{x^2}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}$;

(7) $z_x=yx^{y-1}, z_y=x^y\ln x$;　(8) $g_x=\frac{x}{x^2+y^2}, g_y=\frac{y}{x^2+y^2}$;

(9) $u_x=\frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}, u_y=\frac{-2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}, u_z=\frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}$;

(10) $u_x=yz^{xy}\ln z, u_y=xz^{xy}\ln z, u_z=xyz^{xy-1}$;

(11) $u_x=yz(xy)^{z-1}, u_y=xz(xy)^{z-1}, u_z=(xy)^z\ln(xy)$;

(12) $u_x=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}, u_y=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x, u_z=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$.

3. (1) $z_x(1,0)=z_y(1,0)=z_y(0,1)=0, z_x(0,1)=1$;

(2) $z_x(0,\frac{\pi}{4})=-1, z_y(0,\frac{\pi}{4})=0$;

(3) $f_x(1,1,1)=1, f_y(1,1,1)=-1, f_z(1,1,1)=0$;

(4) $z_x(0,0)=-1, z_y(0,0)=0$.

4. $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$;当$x^2+y^2\neq0$时,$f_x=\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,$f_y=\dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

5. (1) $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=\dfrac{1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}, i=1,2,\cdots,n$;

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=\dfrac{2x_i}{\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2}}, i=1,2,\cdots,n$.

6. (1) $dz=-e^{-x}(\cos y dx+\sin y dy)$; (2) $df=\cos(xy)(y dx+x dy)$;

(3) $dg=(2u+v)du+u dv$; (4) $du=yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\ln x dy+yx^{yz}\ln x dz$;

(5) $dz=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx+\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}dy$; (6) $dz=\left(2xy+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(x^2-\dfrac{x}{y^2}\right)dy$.

7. (1) $df(1,0)=dx-dy$; (2) $dg\left(2,\dfrac{\pi}{4}\right)=4dx$;

(3) $dF(100,10)=\dfrac{G}{5}\left(\dfrac{1}{20}dm-dr\right)$; (4) $df(1,2)=\dfrac{1}{3}dx+\dfrac{2}{3}dy$.

(B)

1. (1) $\dfrac{1}{2}v^2$; (2) $-\dfrac{2\pi r}{T^2}$; (3) $\dfrac{a}{2\sqrt{x}}$; (4) $\dfrac{1}{T+3}$;

(5) $\dfrac{(15xy-8)(21x^2y^6-2y)-(3x^2y^7-y^2)\cdot 15x}{(15xy-8)^2}$;

(6) $\dfrac{x^2y-15\lambda^4}{\sqrt{\lambda^2-2\lambda+5}}-\dfrac{(\lambda-1)(x^2y\lambda-3\lambda^5)}{(\lambda^2-2\lambda+5)^{3/2}}$;

(7) $-15t\sin(5\theta-1)-14t\theta\sec^2(7t\theta^2)$; (8) $\dfrac{\pi xy}{\sqrt{2\pi xyw-13x^7y^3v}}$.

2. (1) $f_x(0,0)=f_y(0,0)=1$; (2) $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

3. (1) 0.97; (2) 0.502.

5. f 在(0,0)点不可微.

7.4 复合函数的求导法则

本节讨论多元复合函数的微分法,它是一元复合函数求导法的推广.多元复合函数的求导法在多元函数微分学的研究中起着重要的作用.

7.4.1 $z=f(x,y), x=g(t), y=h(t)$的情形

假设函数f、g和h都是可微函数,则有以下公式成立:

$$\boxed{\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}} \tag{7.4.1}$$

先利用图解(图 7.15)来弄清楚复合函数的关系,然后来推导公式(7.4.1).由可微的定义知,当$|\Delta t|$充分小时,有

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\Delta y = \frac{dy}{dt}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}),$$

即 $$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\Delta t + o(\Delta t) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\Delta t + o(\Delta t),$$

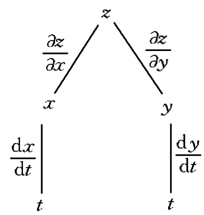


图7.15

因此有 $$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + o(1).$$

令 $\Delta t \to 0$ 取极限,即得链式法则的公式(7.4.1).

例7.4.1　设 $z = f(x, y) = y\sin x$, $x = t^3$, $y = 5t + 2$, 令 $z = g(t)$, 则可以用两种方法计算 $g'(t)$.

一种方法是化为一元函数来求. 由于

$$z = g(t) = f(t^3, 5t + 2) = (5t + 2)\sin t^3,$$

因此可直接计算 $g'(t)$:

$$g'(t) = (5t + 2)\frac{d}{dt}(\sin t^3) + \frac{d}{dt}(5t + 2)\cdot\sin t^3 = 3t^2(5t + 2)\cos t^3 + 5\sin t^3.$$

另一种方法是利用链式法则.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (y\cos x)(3t^2) + \sin x\cdot 5 = 3t^2(5t + 2)\cos t^3 + 5\sin t^3. \square$$

上面的公式(7.4.1)可以推广到三元函数的情形. 例如,若 $u = f(x, y, z)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$, $z = k(t)$, 则有公式

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{7.4.2}$$

7.4.2　$z = f(x, y)$, $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ 的情形

这里同样假设 f、g 和 h 都是可微函数,我们求 $\frac{\partial z}{\partial u}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial v}$ 的一般表达式. 在这种情形有树状图解,如图7.16所示. 图中 z 是因变量, x 和 y 是中间变量, u 和 v 是自变量,在求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial u}$ 时, v 看作常量,因此中间变量 x 和 y 仍可看作一元函数而应用公式(7.4.1). 于是,由图7.16中 z 到 u 的两条路径可以得

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{7.4.3}$$

类似地有

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{7.4.4}$$

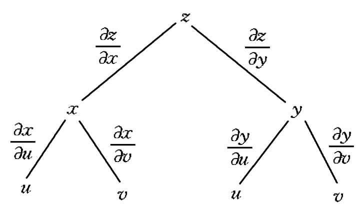


图7.16

例 7.4.2　设 $w=x^2e^y$, $x=4u$, $y=3u^2-2v$, 求 $\frac{\partial w}{\partial u}$ 与 $\frac{\partial w}{\partial v}$.

解
$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial u}&=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=2xe^y\cdot 4+x^2e^y\cdot 6u\\&=(8x+6x^2u)e^y=(32u+96u^3)e^{3u^2-2v},\\\frac{\partial w}{\partial v}&=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=2xe^y\cdot 0+x^2e^y\cdot(-2)\\&=-2x^2e^y=-32u^2e^{3u^2-2v}.\end{aligned}$$
□

例 7.4.3　设 $z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　令 $u=xy$, $v=\frac{x}{y}$, 则由链式法则有
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot y+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{1}{y}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2',$$
这里记号 f_1' 表示函数对第一个中间变量求偏导数, f_2' 表示函数对第二个中间变量求偏导数. 注意表达式中的 u、v 要分别用 xy 和 $\frac{x}{y}$ 代入, 即
$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'\left(xy,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}f_2'\left(xy,\frac{x}{y}\right).$$
类似有
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=xf_1'\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^2}f_2'\left(xy,\frac{x}{y}\right).$$
□

7.4.3　一阶全微分形式的不变性

设有二元函数 $z=f(x,y)$. 当 x、y 为自变量时, 函数的全微分式为
$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.\tag{7.4.5}$$
若 x、y 是 u、v 的函数
$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),$$
复合后得关于 u、v 的二元函数
$$z=f(x(u,v),\quad y(u,v)).$$
它的全微分式应当为
$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.\tag{7.4.6}$$
由链式法则公式(7.4.3)、(7.4.4)知
$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u},\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial v},\end{cases}$$

把它代入(7.4.6)式并整理得

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v\right).$$

上式中的圆括号内的量正是函数 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ 的全微分,所以得

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y. \tag{7.4.7}$$

比较(7.4.5)式与(7.4.7)式即知,不管 x、y 是自变量还是中间变量,函数 z 的全微分形式是一样的.

这个性质叫做**一阶全微分形式的不变性**. 利用这个性质,我们可以得到多元函数微分的四则运算法则. 当 x、y 是自变量时,有

$$\mathrm{d}(x\pm y)=\mathrm{d}x\pm\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}(xy)=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}.$$

当 x、y 是 u、v 的函数时,由一阶全微分形式的不变性,上式仍成立. 此外,当 f 仅是 x 的函数时,由(7.4.7)式可得

$$\mathrm{d}(f(x(u,v)))=f_x(x(u,v))\mathrm{d}x.$$

这样,连同微分的四则运算法则,我们可通过全微分来求偏导数.

例 7.4.4　设 $z=\sin(2x+y)$,求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　因

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=\cos(2x+y)\mathrm{d}(2x+y)=\cos(2x+y)(2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)\\&=2\cos(2x+y)\mathrm{d}x+\cos(2x+y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2\cos(2x+y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\cos(2x+y).$$

□

例 7.4.5　设 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,求 u_x、u_y、u_z.

解　因

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}(\sqrt{x^2+y^2+z^2})=\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)}{2(x^2+y^2+z^2)}\\&=\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2},\end{aligned}$$

所以

$$u_x=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\quad u_y=\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\quad u_z=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}.$$

□

7.4.4　高阶偏导数和高阶全微分

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在开区域 D 上定义且存在偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$,则这两个偏导数也是 D 上的二元函数. 假设 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 在 D 上也具有偏导数,则称一阶偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 的偏导数为 $z=f(x,y)$ 的**二阶偏导数**. 按照对变量的求导次序不同,共有下列四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=f_{xx}=(f_x)_x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=f_{yx}=(f_y)_x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=f_{xy}=(f_x)_y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=f_{yy}=(f_y)_y$$

其中f_{yx}和f_{xy}称为**混合偏导数**.类似可得三阶、四阶、…、n 阶偏导数.二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

例 7.4.6　求$f(x,y)=y\cos x+3x^2e^y$的所有二阶偏导数.

解　由$f_x(x,y)=-y\sin x+6xe^y$,得

$$f_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(-y\sin x+6xe^y)=-y\cos x+6e^y,$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(-y\sin x+6xe^y)=-\sin x+6xe^y.$$

由$f_y(x,y)=\cos x+3x^2e^y$,得

$$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(\cos x+3x^2e^y)=-\sin x+6xe^y,$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(\cos x+3x^2e^y)=3x^2e^y.$$

在这个例子中,我们看到有$f_{xy}=f_{yx}$.　□

例 7.4.7　求$f(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$的二阶偏导数.

解　因为$f_x=\frac{-y}{x^2+y^2}$,$f_y=\frac{x}{x^2+y^2}$,所以

$$f_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$　□

由上面两例可见,函数的两个混合偏导数是相等的,即

$$f_{xy}=f_{yx}\quad 或\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}.$$

实际上可以证明:**若两个混合偏导数在开区域D 内连续,则它们必相等**(证明略去).

通常我们遇到的函数都是初等函数,各阶偏导数总是连续的,因此混合偏导数总是相等的.

对于三元或三元以上的函数,也可以类似地定义高阶偏导数,并且高阶混合偏导数在偏导数连续的条件下也与求导的次序无关.

在求复合函数的高阶偏导数时,要注意运用链式法则.

例7.4.8　设 $z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)$,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解　因 $\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2',\frac{\partial z}{\partial y}=xf_1'-\frac{x}{y^2}f_2'$,所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y\left[f_{11}''\cdot y+f_{12}''\cdot\frac{1}{y}\right]+\frac{1}{y}\left[f_{21}''\cdot y+f_{22}''\cdot\frac{1}{y}\right]=y^2f_{11}''+2f_{12}''+\frac{1}{y^2}f_{22}''.$$

这里假定 $f_{12}''=f_{21}''$. f_{12}'' 表示函数 $f_1'\left(xy,\frac{x}{y}\right)$ 对其第二个变量求偏导,其他记号类似.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(xf_1'-\frac{x}{y^2}f_2'\right)\\&=f_1'+x\left(f_{11}''\cdot y+f_{12}''\cdot\frac{1}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^2}\left[f_{21}''\cdot y+f_{22}''\cdot\frac{1}{y}\right]\\&=xyf_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''+f_1'-\frac{1}{y^2}f_2',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=x\left[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]-\frac{x}{y^2}\left[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]+\frac{2x}{y^3}f_2'\\&=x^2f_{11}''-2\frac{x^2}{y^2}f_{12}''+\frac{x^2}{y^4}f_{22}''+\frac{2x}{y^3}f_2'.\end{aligned}$$ □

例7.4.9　设 $z=f(2x-y,y\sin x)$,其中 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2+f_2'\cdot y\cos x,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}&=\frac{\partial}{\partial y}(2f_1'+y\cos x\cdot f_2')\\&=-2f_{11}''+2\sin xf_{12}''+\cos xf_2'+y\cos x(-f_{21}''+\sin xf_{22}'')\\&=-2f_{11}''+(2\sin x-y\cos x)f_{12}''+y\cos x\sin xf_{22}''+\cos xf_2'.\end{aligned}$$ □

下面,我们简单地介绍高阶全微分的概念.

假设函数 $z=f(x,y)$ 在开区域 D 内每一点都有全微分,则当自变量的改变量 Δx 与 Δy 任意固定时,全微分 $\mathrm{d}z$ 就是 x 与 y 的函数. 因此,对于 $\mathrm{d}z$ 又可求关于自变量的同一改变量的全微分. 即若

$$\mathrm{d}z=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y,$$

则函数 $f(x,y)$ 的**二阶全微分**是

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}z)=\mathrm{d}^2z\quad\text{或}\quad\mathrm{d}^2f.$$

同样,称二阶全微分的全微分为**三阶全微分**. 一般称$f(x,y)$的$(n-1)$阶全微分的全微分为n **阶全微分**,记作

$$d^n z = d(d^{n-1}z) \quad 或 \quad d^n f.$$

二阶全微分的表达式是

$$d^2 z = d(dz) = d(f_x dx + f_y dy) = \frac{\partial}{\partial x}(f_x dx + f_y dy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(f_x dx + f_y dy)dy$$
$$= f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2$$

其中$dx^2 = (dx)^2, dy^2 = (dy)^2$.

例 7.4.10　求$z = x\sin y$的二阶全微分.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x\sin y.$$

$$d^2 z = 2\cos y\,dxdy - x\sin y\,dy^2.$$ □

注意,高阶全微分没有形式不变性.

习　题　7.4

(A)

1. 回答下列问题:
   (1) 你知道哪些情形下的求复合函数偏导数的链式法则?
   (2) 一阶全微分形式的不变性指的是什么?
   (3) 高阶偏导数怎样定义?
   (4) 在什么条件下,混合偏导数相等?
   (5) 高阶全微分怎样定义?

2. 求下列函数的导数$\frac{dz}{dt}$:
   (1) $z = xy^2, x = e^{-t}, y = \sin t$;　　(2) $z = x\sin y + y\sin x, x = t^2, y = \ln t$;
   (3) $z = \ln(x^2 + y^2), x = \frac{1}{t}, y = \sqrt{t}$;　　(4) $z = \sin\frac{x}{y}, x = 2t, y = 1 - t^2$;
   (5) $z = (x + y)e^y, x = 2t, y = 1 - t^2$;　　(6) $z = \arctan\frac{x}{y}, x = 2t, y = 1 - t^2$.

3. 在以下各题中求$\frac{\partial z}{\partial u}$和$\frac{\partial z}{\partial v}$:
   (1) $z = xe^{-y} + ye^{-x}, x = u\sin v, y = v\cos u$;　　(2) $z = xe^y, x = \ln u, y = v$;
   (3) $z = \frac{\cos x}{y}, x = \frac{v}{u}, y = u^2 - v^2$;　　(4) $z = \arctan(x + y), x = 2u - v^2, y = u^2 v$;
   (5) $z = e^{x\sin y}, x = uv, y = \ln(u + v)$;　　(6) $z = \arctan\frac{x}{y}, x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2$.

4. 设$u = f(x,y,z), x = x(s,t), y = y(s,t), z = z(s,t)$. 写出求复合函数$u = f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$

的偏导数$\frac{\partial u}{\partial s}$和$\frac{\partial u}{\partial t}$的链式法则.

5. 设$u=f(x,y,z)=3xy+yz$, $x=\ln s+\cos t$, $y=1+s\sin t$, $z=st$.

(1) 求$\frac{\partial u}{\partial s}$和$\frac{\partial u}{\partial t}$在$(s,t)=(1,\pi)$点的值;

(2) 假定s、t还是w的函数,即$s=1+\sin(\pi w)$, $t=\pi w^2$,试求$\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w}\right|_{w=1}$.

6. 求下列复合函数的偏导数:

(1) $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$;　　(2) $u=f(x^2+y^2+z^2)$;

(3) $z=f\left(x,\frac{x}{y}\right)$;　　(4) $u=f(x,xy,xyz)$.

7. 求下列函数的二阶偏导数:

(1) $z=\sin\left(\frac{x}{y}\right)$;　(2) $z=xe^y$;　(3) $z=\sin(x^2+y^2)$;　(4) $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

(5) $z=\frac{xe^y}{x+y}$;　(6) $z=\arctan(x+y)$;　(7) $f(x,y)=\ln(xy)$;　(8) $f(x,y)=x^y$.

8. 设$f(x,y)=a+bx+cy+dx^2+exy+ky^2$,其中$a$、$b$、$c$、$d$、$e$、$k$均为常数. 验证$a=f(0,0)$, $b=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $c=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $d=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$, $e=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$, $k=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$.

9. 设$z=x^k e^{-\frac{y}{x}}$满足关系式$\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial y}$,试求常数$k$.

10. 验证函数$u=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)$满足方程$x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$.

(B)

1. 求下列函数的二阶偏导数:

(1) $z=f(ax,by)$;　(2) $u=f(x^2+y^2)$;　(3) $z=f(x+y,xy)$;

(4) $z=f(x+y,x-y)$;　(5) $z=f(xy^2,x^2y)$;　(6) $z=f(\sin x,\cos y,e^{x+y})$.

2. 设$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$试证:$f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$.

3. 若函数$f(x,y)$对任意正实数t满足关系$f(tx,ty)=t^nf(x,y)$,则称$f(x,y)$为n次齐次函数. 设$f(x,y)$可微,试证明$f(x,y)$为n次齐次函数的充要条件是

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y).$$

4. 验证函数$u(x,y)=x^nf\left(\frac{y}{x^2}\right)$满足方程$x\frac{\partial u}{\partial x}+2y\frac{\partial u}{\partial y}=nu$.

答案与提示

(A)

2. (1) $e^{-t}(\sin 2t-\sin^2 t)$;　(2) $2t(\sin y+y\cos x)+\frac{1}{t}(x\cos y+\sin x)$;　(3) $\frac{1-2x^3}{x^2+y^2}$;

(4) $\frac{2}{y}\left(1+\frac{x^2}{2y}\right)\cos\frac{x}{y}$;　(5) $e^y(2-x-x^2-xy)$;　(6) $\frac{x^2+2y}{x^2+y^2}$.

3. (1) $\frac{\partial z}{\partial u}=e^{-y}(\sin v+xv\sin u)-e^{-x}(y\sin v+v\sin u)$, $\frac{\partial z}{\partial v}=e^{-y}(u\cos v-x\cos u)+e^{-x}(\cos u-$

$yu\cos v)$; (2) $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{u}e^y, \frac{\partial z}{\partial v}=xe^y$;

(3) $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{y^2u^2}(yv\sin x-2u^3\cos x), \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{y^2u}(2uv\cos x-y\sin x)$;

(4) $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2+2uv}{1+(x+y)^2}, \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u^2-2v}{1+(x+y)^2}$;

(5) $\frac{\partial z}{\partial u}=e^{x\sin y}(v\sin y+\frac{x\cos y}{u+v}), \frac{\partial z}{\partial v}=e^{x\sin y}(u\sin y+\frac{x\cos y}{u+v})$;

(6) $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u(y-x)}{x^2+y^2}, \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{2v(x+y)}{x^2+y^2}$.

4. $\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$.

5. (1) $\frac{\partial u}{\partial s}(1,\pi)=3+\pi, \frac{\partial u}{\partial t}(1,\pi)=4-\pi$; (2) $\left.\frac{du}{dw}\right|_{w=1}=5\pi-3\pi^2$.

6. (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f'(\sqrt{x^2+y^2}), \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}f'(\sqrt{x^2+y^2})$;

(2) $\frac{\partial u}{\partial x}=2xf'(x^2+y^2+z^2), \frac{\partial u}{\partial y}=2yf'(x^2+y^2+z^2), \frac{\partial u}{\partial z}=2zf'(x^2+y^2+z^2)$;

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+\frac{1}{y}f_2', \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_2'$; (4) $u_x=f_1'+yf_2'+yzf_3', u_y=xf_2'+xzf_3', u_z=xyf_3'$.

7. (1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{y^2}\sin(\frac{x}{y}), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x^2}{y^4}\sin(\frac{x}{y})+\frac{2x}{y^3}\cos(\frac{x}{y}), \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x}{y^3}\sin(\frac{x}{y})-\frac{1}{y^2}\cos(\frac{x}{y})$;

(2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=xe^y, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^y$;

(3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\cos(x^2+y^2)-4x^2\sin(x^2+y^2)$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\cos(x^2+y^2)-4y^2\sin(x^2+y^2), \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xy\sin(x^2+y^2)$;

(4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$;

(5) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-2ye^y}{(x+y)^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{xe^y}{x+y}\left[1-\frac{2}{x+y}+\frac{2}{(x+y)^2}\right], \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1+y}{(x+y)^2}e^y-\frac{2ye^y}{(x+y)^3}$;

(6) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-2(x+y)}{[1+(x+y)^2]^2}$;

(7) $f_{xx}=-\frac{1}{x^2}, f_{yy}=-\frac{1}{y^2}, f_{xy}=0$;

(8) $f_{xx}=y(y-1)x^{y-2}, f_{yy}=x^y(\ln x)^2, f_{xy}=x^{y-1}(1+y\ln x)$.

9. $k=-1$.

(B)

1. (1) $z_{xx}=a^2f_{11}'', z_{yy}=b^2f_{22}'', z_{xy}=abf_{12}''$;

(2) $u_{xx}=2f'+4x^2f'', u_{yy}=2f'+4y^2f'', u_{xy}=4xyf''$;

(3) $z_{xx}=f_{11}''+2yf_{12}''+y^2f_{22}'', z_{yy}=f_{11}''+2xf_{12}''+x^2f_{22}'', z_{xy}=f_{11}''+xf_{12}''+f_2'+yf_{21}''+xyf_{22}''$;

(4) $z_{xx}=f_{11}''+2f_{12}''+f_{22}'', z_{yy}=f_{11}''-2f_{12}''+f_{22}'', z_{xy}=f_{11}''-f_{22}''$;

(5) $z_{xx}=2yf_2'+y^4f_{11}''+4xy^3f_{12}''+4x^2y^2f_{22}'', z_{yy}=2xf_1'+4x^2y^2f_{11}''+4x^3yf_{12}''+x^4f_{22}'', z_{xy}$
$=2yf_1'+2xf_2'+2xy^3f_{11}''+5x^2y^2f_{12}''+2x^3yf_{22}''$;

(6) $z_{xx}=-f_1'\sin x+f_3'e^{x+y}+f_{11}''\cos^2x+2f_{13}''e^{x+y}\cos x+f_{33}''e^{2(x+y)}$.

$$z_{yy} = -f_2'\cos y + f_3'e^{x+y} + f_{22}''\sin^2 y - 2f_{23}''e^{x+y}\sin y + f_{33}''e^{2(x+y)},$$

$$z_{xy} = f_3'e^{x+y} - f_{12}''\sin y\cos x + f_{13}''e^{x+y}\cos x - f_{32}''e^{x+y}\sin y + f_{33}''e^{2(x+y)}.$$

2. $f_{xy}(0,0) = -1 \neq f_{yx}(0,0) = 1$.
3. 应用链式法则.
4. 注意$u(tx, t^2y) = t^n u(x, y)$.

7.5 方向导数与梯度

多元函数的偏导数刻画了函数沿坐标轴正向的变化率. 本节将讨论函数沿任意方向的变化率,并且还将引进一个叫做**梯度**的向量,它将刻画函数在一点的附近是怎样变化的.

7.5.1 方向导数

我们要考察二元函数$z = f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$处沿着单位向量

$$l = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$$

的方向的变化率,其中α和β分别表示l与x轴正向和y轴正向的夹角(见图7.17).

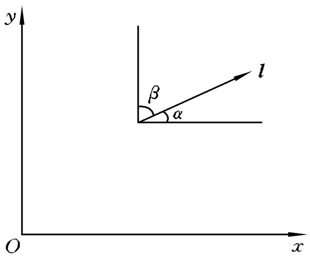


图7.17

为讨论方便,我们假设函数$z = f(x, y)$定义在开区域D内,$P_0 \in D$. 过P_0且以l为方向向量的直线L的方程是

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\cos\beta, \end{cases} \quad (t \in R).$$

当点沿着直线L(见图7.18)从$P_0(x_0, y_0)$变到点(x, y)时,在直线L上的函数改变量是$f(P_0 + tl) - f(P_0)$,称t是自变量P在直线L上的改变量,而称$\dfrac{f(P_0 + tl) - f(P_0)}{t}$为函数$f$当$P$沿直线$L$从$P_0$变到$P_0 + tl$时的平均变化率. 当$t \to 0$时,由这平均变化率就得到$f$在$P_0$点沿方向$l$的瞬时变化率.

定义7.5.1(**方向导数**)　设函数$z = f(x, y)$在$P_0(x_0, y_0)$点的邻域内有定义,若极限

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + tl) - f(P_0)}{t}$$

存在,则称它为$f(x, y)$在P_0点沿方向l的**方向导数**. 记作

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l} \quad 或 \quad \left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}.$$

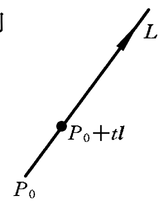


图7.18

$f(x, y)$在任意点P沿方向l的方向导数记作

$$\frac{\partial f(P)}{\partial l} \quad 或 \quad \frac{\partial f}{\partial l}.$$

由于$f(P_0+tl)=f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)$,若令

$$\varphi(t)=f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta),$$

则由定义知

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(P_0)}{\partial l} &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=\varphi'(0).\end{aligned}$$

因此,一元函数$\varphi(t)$在$t=0$点的导数,就是二元函数$z=f(x,y)$在P_0沿方向l的方向导数.

如果函数$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$点可微,则根据链式法则,有

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l}=\varphi'(0)=\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\cos\beta. \tag{7.5.1}$$

在$\mathbf{R}^2$中,单位向量l还可表示为

$$l=\{\cos\alpha, \sin\alpha\},$$

其中α是从x轴正向沿逆时针方向到l的旋转角度,$0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$. 因此又有公式

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\sin\alpha. \tag{7.5.2}$$

于是,在$f(x,y)$可微的条件下,只要求出两个偏导数,即可求出沿任一方向的方向导数.

对于三元函数$u=f(x,y,z)$,类似可定义它在$P_0(x_0,y_0,z_0)$点沿方向l的方向导数. 设

$$l=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$$

其中α、β、γ分别为l与x、y、z轴正向的夹角. 则f在P_0点沿方向l的方向导数为

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma)\Big|_{t=0}.$$

当函数f在P_0点可微时,有以下的计算公式

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \tag{7.5.3}$$

例 7.5.1 设$z=x\mathrm{e}^{xy}$,$P_0=(1,1)$,l为与向量$\{1,1\}$同向的单位向量. 求$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,1)}$.

解 先求出单位向量l:

$$l=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}=\left\{\cos\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4}\right\}.$$

由于所给函数可微,我们可利用公式(7.5.2)计算.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\mathrm{e}^{xy}+xy\mathrm{e}^{xy},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2\mathrm{e};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^{xy}, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} = e.$$

所以 $$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,1)} = 2e \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + e \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}e.$$ □

例 7.5.2 设 $u = \ln(x^2 + y^2)$，$P_0 = (1,1)$，l 与 x 轴正向的夹角为 $60°$，求 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}$.

解 $l = \{\cos 60°, \sin 60°\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. 令

$$\varphi(t) = \ln\left[\left(1 + \frac{t}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2\right],$$

化简得 $$\varphi(t) = \ln[t^2 + (1 + \sqrt{3})t + 2].$$

$$\varphi'(t) = \frac{2t + 1 + \sqrt{3}}{t^2 + (1 + \sqrt{3})t + 2}, \quad \varphi'(0) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

所以 $$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1)} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$ □

7.5.2 梯度

方向导数刻画了函数在 P_0 点沿方向 l 的变化状态. 若 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial l} > 0$，则函数在 P_0 点沿着 l 方向是递增的；若 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial l} < 0$，则函数在 P_0 点沿着 l 方向是递减的；若 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial l} = 0$(此时其反方向的方向导数亦为零)，则函数在 P_0 点沿 l 方向及其反方向的变化是稳定的. 我们想进一步了解函数在 P_0 点究竟沿什么方向增加得最快？为此，我们来考察方向导数 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial l}$ 与 l 的关系.

以三元函数 $u = f(x, y, z)$ 的情况为例来考察. 把计算公式(7.5.3)改写成向量形式. 记

$$g = \operatorname{grad} f(P_0) = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\}_{P_0}$$

(grad 是英文名词 gradient 的前 4 个字母，即梯度).

$$l = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$$

由向量的点积定义知，f 沿 l 的方向导数(7.5.3)式可写成

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \operatorname{grad} f(P_0) \cdot l = g \cdot l = |g||l|\cos(g, l),$$

即 $$\frac{\partial f}{\partial l} = |g|\cos(g, l). \tag{7.5.4}$$

由公式(7.5.4)可得下面的结论.

定理 7.5.1 设函数 $u=f(x,y,z)$ 在 P_0 点可微,则 $g=\operatorname{grad}f(P_0)$ 存在,且

(1) 若 $\operatorname{grad}f=0$,则沿任何方向 l,$\dfrac{\partial f}{\partial l}=0$;

(2) 若 $\operatorname{grad}f\neq0$,则当 $l=\dfrac{\operatorname{grad}f}{|\operatorname{grad}f|}$ 时,$\dfrac{\partial f}{\partial l}$ 最大,且 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=|\operatorname{grad}f|$.

由此可见,$\operatorname{grad}f$ 是这样一个向量:它的方向指向函数值变化最快的方向,它的长度就等于函数在这个方向上的变化率. 我们把这个向量的定义重新正式地写在下面.

定义 7.5.2(梯度) 设函数 $u=f(x,y,z)$ 在 P_0 点可求偏导数,则称向量

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}i+\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}j+\frac{\partial f(P_0)}{\partial z}k$$

为函数 $f(x,y,z)$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 点的**梯度向量**(简称**梯度**),记作

$$\operatorname{grad}f \quad 或 \quad \nabla f,$$

即

$$\operatorname{grad}f=\nabla f=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\},$$

而把偏导数算子(符)向量 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$ 叫做**梯度算子(符)**,记作

$$\operatorname{grad}=\nabla=\left\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\}.$$

于是,方向导数就可以表示为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\operatorname{grad}f\cdot l=|\operatorname{grad}f|\cos(\operatorname{grad}f,l), \tag{7.5.5}$$

即 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ 等于 $\operatorname{grad}f$ 在 l 方向上的投影.

例 7.5.3 求函数 $f(x,y)=xe^y$ 在点(1,1)处的梯度,并利用这个梯度求函数 f 在向量 $i-j$ 的方向上的变化率.

解 二元函数 $f(x,y)$ 的梯度是 $\operatorname{grad}f=\dfrac{\partial f}{\partial x}i+\dfrac{\partial f}{\partial y}j$,

因此我们有 $\operatorname{grad}f=e^yi+xe^yj$,

在点(1,1)处有 $\operatorname{grad}f(1,1)=ei+ej$.

与向量 $i-j$ 同向的单位向量是 $l=\dfrac{1}{\sqrt2}i-\dfrac{1}{\sqrt2}j$,所以方向导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)}=\operatorname{grad}f(1,1)\cdot l=e(i+j)\cdot\left(\frac{i}{\sqrt2}-\frac{j}{\sqrt2}\right)=0. \qquad \square$$

例 7.5.4 设函数 $\rho=f(x,y,z)$ 表示一大桶汽油中杂质的密度 ρ mg/m^3. 设 x、y、z 以米计,而汽油桶的尺寸是 $-3\leqslant x\leqslant3$,$-3\leqslant y\leqslant3$,$0\leqslant z\leqslant2$,函数表达式为

$$\rho=f(x,y,z)=-2x^2-3y^2+\frac{1}{z+1}.$$

(1) 等位面 $\rho=f(x,y,z)=1$ 的物理意义是什么?

(2) 杂质的密度在点(2,1,1)增加最快的方向是什么? 最大变化率是多少?

(3) 杂质的密度在点(2,1,1)沿什么方向变化率达到最小? 最小变化率是多少?

(4) 求一个向量,使得杂质密度在点(2,1,1)处沿该向量的方向的变化率为零.

解　(1) 等位面 $\rho = f(x,y,z) = 1$ 包含了所有杂质密度为1的点.

(2) 函数 f 在(2,1,1)点沿单位向量 l 的方向导数为

$$\frac{\partial f(2,1,1)}{\partial l} = \operatorname{grad} f(2,1,1) \cdot l.$$

因此,若 l 与 $\operatorname{grad}\rho$ 同向,则可得到 ρ 的最大变化率,而

$$\operatorname{grad}\rho = f_x i + f_y j + f_z k = -4xi - 6yj - \frac{k}{(z+1)^2},$$

故所要求的方向由向量

$$\operatorname{grad}\rho \Big|_{(2,1,1)} = -8i - 6j - \frac{1}{4}k$$

给出.

密度沿 $\operatorname{grad}\rho$ 方向的最大变化率为

$$|\operatorname{grad}\rho| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} \approx 10\left(\frac{\mathrm{mg/m^3}}{\mathrm{m}}\right).$$

(3) 方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ 取最小值的方向应当与梯度 $\operatorname{grad}\rho$ 的方向正好相反,即

$$-\operatorname{grad}\rho = 8i + 6j + \frac{1}{4}k,$$

而密度在这个方向的变化率为

$$-|\operatorname{grad}\rho| \approx -10\left(\frac{\mathrm{mg/m^3}}{\mathrm{m}}\right).$$

(4) 当 l 与 $\operatorname{grad}\rho$ 互相垂直时,ρ 的变化率为零. 同时,对于任何满足条件

$$\operatorname{grad}\rho \cdot l = \left(-8i - 6j - \frac{1}{4}k\right)\cdot(l_1 i + l_2 j + l_3 k) = -8l_1 - 6l_2 - \frac{l_3}{4} = 0$$

的方向 $l = \{l_1, l_2, l_3\}$,ρ 在点(2,1,1)沿 l 方向的变化率都为零. 由于这里只有一个方程来确定三个量 l_1, l_2, l_3,故我们可以任意选取其中的两个,比如取 $l_2 = 8, l_3 = 0$,则可确定 $l_1 = -6$. 于是,密度 ρ 在点(2,1,1)沿向量

$$l = -6i + 8j$$

的方向的变化率为零. 当然,还可以选取 l_2、l_3 的其他值,从而得到许多符合要求的向量. □

习　题　7.5

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 函数 $z = f(x,y)$ 在点 P_0 沿方向 $l = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ 的方向导数如何定义?

(2) 什么叫梯度？叙述它的准确定义.

(3) 函数$f(x,y,z)$在一点沿什么方向的变化率最大？最小？为零？

2. 在下列各题中,α表示l与x轴正向的夹角.试求函数$z=x^4y^5$在点(1,1)沿方向$l=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$的方向导数：

(1) $\alpha=0$;　(2) $\alpha=\pi$;　(3) $\alpha=\frac{\pi}{4}$;　(4) $\alpha=\frac{\pi}{2}$;　(5) $\alpha=\frac{3\pi}{2}$;　(6) $\alpha=\frac{5\pi}{4}$.

3. 计算并画出下列函数在指定点的∇f：

(1) $f(x,y)=x^2y$,在(2,5);(3,1);　(2) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,在(1,2);(3,0).

4. 求函数$z=e^{x+2y}$在(0,0)点沿方向$A=2i+3j$的方向导数.

5. 设$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

(1) 计算在点(2,0,0),(0,2,0)和(0,0,2)处的梯度$\mathrm{grad}f$;

(2) 对(1)中的三个点画出向量$\mathrm{grad}f$.

6. 求函数$f(x,y,z)=x^3y^2z$在(1,1,1)点沿下列方向的方向导数：

(1) i;　(2) j;　(3) k;　(4) $-i$;　(5) $i+j+k$.

7. (1) 设$f_x(a,b,c)=2,f_y(a,b,c)=3,f_z(a,b,c)=1$.求三个不同的单位向量$l$,使得$\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial l}$为零.

(2) 有多少个单位向量l使$\frac{\partial f}{\partial l}$在$(a,b,c)$点的值为零？

8. 在平面上任一点(x,y)处的温度由下列函数表示：

$$T(x,y)=\frac{100}{x^2+y^2+1}.$$

(1) 平面上何处最热？在那里温度是多少？

(2) 求温度在(3,2)点处增加最大的方向,这增加最大的变化率是多少？

(3) 求温度在(3,2)点处减少最快的方向.

(4) 在(2)中所求得的向量指向原点吗？

(5) 在(3,2)点求一个方向,使得在这个方向上,温度不增不减.

(6) T的等温线是什么样子的？

9. 求下列函数在指定点处函数值增加最快的方向：

(1) $f(x,y)=e^x(\cos y+\sin y)$;(0,0);　(2) $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$;(2,0,1);

(3) $f(x,y,z)=\cos(xyz)$;$(\frac{1}{3},\frac{1}{2},\pi)$;　(4) $f(x,y)=3x^2+4y^2$;(-1,1).

10. 求下列函数在指定点处函数值减小最快的方向：

(1) $f(x,y)=\sin(\pi xy)$;$(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$;　(2) $f(x,y,z)=\frac{x-z}{y+z}$;(-1,1,3).

(B)

1. 设$f(x,y)=x^2+y^2$.证明:如果(a,b)是等高线$x^2+y^2=9$上任一点,则在(a,b)点的梯度∇f必垂直于等高线在此点的切线.

2. 设$f(x,y,z)=1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.令$r=xi+yj+zk$,试用$r$来表示$\nabla f$.

3. 顶点位于(1,1),(5,1),(1,3)和(5,3)的金属盘被来自于原点的火焰加热;盘上各点的温度反比

于此点到原点的距离. 试问点(3,2)处的蚂蚁应朝哪个方向爬行,才能最快到达凉爽处?

4. 设某山峰可由曲面 $z=5-x^2-2y^2$ 表示. 位于点$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{17}{4}\right)$处的登山者发现其供氧面具漏气,他应沿哪个方向才能最快到达山底?

答案与提示

(A)

2. (1) 4; (2) -4; (3) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$; (4) 5; (5) -5; (6) $-\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

3. (1) $\nabla f(2,5)=\{20,4\}$, $\nabla f(3,1)=\{6,9\}$;

(2) $\nabla f(1,2)=\left\{\frac{-1}{5\sqrt{5}},\frac{-2}{5\sqrt{5}}\right\}$, $\nabla f(3,0)=\left\{-\frac{1}{9},0\right\}$.

4. $\frac{8}{\sqrt{13}}$.

5. (1) $\{4,0,0\}$, $\{0,4,0\}$, $\{0,0,4\}$.

6. (1) 3; (2) 2; (3) 1; (4) -3; (5) $2\sqrt{3}$.

7. (1) $\left\{0,\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{-3}{\sqrt{10}}\right\}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{-2}{\sqrt{5}}\right\}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{27}},\frac{1}{\sqrt{27}},\frac{-5}{\sqrt{27}}\right\}$; (2) 有无穷多个.

8. (1) 在$(x,y)=(0,0)$处最热,最高温度为100度;

(2) $\operatorname{grad} T(3,2)=\left\{-\frac{150}{49},-\frac{100}{49}\right\}$是温度增加最快的方向,最大变化率为$\frac{50\sqrt{13}}{49}$;

(3) 减少得最快的方向是$\left\{\frac{150}{49},\frac{100}{49}\right\}$; (4) 指向原点; (5) $\left\{-49,\frac{147}{2}\right\}$;

(6)等温线为$x^2+y^2=\frac{100}{c}-1$ $(c<100)$.

9. (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}(i+j)$; (2) $\frac{4}{5}i+\frac{2}{5}k$; (3) $-\frac{\pi}{4}i-\frac{\pi}{6}j-\frac{1}{12}k$; (4) $-\frac{3}{5}i+\frac{4}{5}j$.

10. (1) $-\frac{4}{5}i-\frac{3}{5}j$; (2) $\frac{-\sqrt{2}}{2}(i+j)$.

(B)

2. $\nabla f=-\frac{1}{r^3}r$.

3. $\frac{3}{\sqrt{13}}i+\frac{2}{\sqrt{13}}j$.

4. $\frac{1}{\sqrt{5}}(i-2j)$.

7.6　隐函数微分法

7.6.1　一个方程的情形

在第3章中我们就遇到过隐函数. 在那里先假定有一个函数 $y=f(x)$满足方程

$$F(x,y)=0, \tag{7.6.1}$$

即
$$F[x,f(x)]\equiv 0. \tag{7.6.2}$$

然后在$f(x)$可微的前提下,我们给出了求这个隐函数的导数的一些例子. 现在我们利用复合函数求偏导数的链式法则来推导隐函数的导数的一般公式.

假设$y=f(x)$是由方程(7.6.1)所确定的一个隐函数,那么对于某个区间内的每个x都有(7.6.2)式成立,也就有

$$\frac{\mathrm{d}F[x,f(x)]}{\mathrm{d}x}\equiv 0.$$

现在设函数$F(x,y)$与$f(x)$都是可微的,则由链式法则,有

$$\frac{\mathrm{d}F[x,f(x)]}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

由此得
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial y}. \tag{7.6.3}$$

当然,要假定$\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$.

注意,在上面的推导过程中,$y=f(x)$并没有“明显地”表示出来,但是,我们却通过函数$F(x,y)$的偏导数“明显地”给出了$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$的表达式.

例 7.6.1　设y由下列方程确定为x隐函数:

$$F(x,y)=xy^5-x^5y-2=0,$$

则有
$$\frac{\partial F}{\partial x}=y^5-5x^4y,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=5xy^4-x^5.$$

于是由公式(7.6.3)得
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y(y^4-5x^4)}{x(5y^4-x^4)}.$$
□

接着我们来考察三个变量的方程

$$F(x,y,z)=0. \tag{7.6.4}$$

假设方程(7.6.4)确定隐函数$z=z(x,y)$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

因$z=z(x,y)$是由方程(7.6.4)确定的隐函数,把它代回方程应得恒等式

$$F(x,y,z(x,y))\equiv 0.$$

利用一阶全微分形式的不变性,有

$$\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F}{\partial z}\mathrm{d}z\equiv 0.$$

设$\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$,解出$\mathrm{d}z$得
$$\mathrm{d}z=-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}\right)\mathrm{d}x-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}\right)\mathrm{d}y,$$

所以有
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}. \tag{7.6.5}$$

例 7.6.2　设$z=z(x,y)$是由方程

$$z-y-x+xe^{z-y-x}=0 \tag{7.6.6}$$

所确定的隐函数,求 $\mathrm{d}z$.

解法一 将方程(7.6.6)两边同时关于 x 求偏导数,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}-1+e^{z-y-x}+xe^{z-y-x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)=0,$$

故
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}.$$

再将方程(7.6.6)两边同时关于 y 求偏导数,得

$$\frac{\partial z}{\partial y}-1+xe^{z-y-x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}-1\right)=0,$$

故
$$\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

于是
$$\mathrm{d}z=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y.$$

解法二 利用一阶全微分形式的不变性,对(7.6.6)式两边求全微分,得

$$\mathrm{d}z-\mathrm{d}y-\mathrm{d}x+\mathrm{d}(xe^{z-y-x})=0,$$

即
$$\mathrm{d}z-\mathrm{d}y-\mathrm{d}x+e^{z-y-x}\mathrm{d}x+xe^{z-y-x}(\mathrm{d}z-\mathrm{d}y-\mathrm{d}x)=0.$$

整理后得
$$\mathrm{d}z=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y.$$ □

上面我们都是在假定所给方程能确定隐函数的前提下来计算隐函数的偏导数的.那么,给定一个方程,在什么条件下它能确定一个隐函数呢?这是一个理论性的问题,也是多元微分学中颇为复杂的问题.在本节的末尾,我们将给出并证明关于隐函数的存在性及可微性的有关定理.

7.6.2 方程组的情形

现在我们讨论由方程组确定的隐函数的微分法.同样,我们都假定在所讨论的问题中,隐函数存在且可微.

一般来说,n 个方程可以确定 n 个函数,例如方程组

$$\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\F_2(x,y,z)=0\end{cases} \tag{7.6.7}$$

确定两个隐函数 $y=y(x),z=z(x)$,而方程组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\G(x,y,u,v)=0\end{cases} \tag{7.6.8}$$

则确定两个二元的隐函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$.

现在我们来求由方程(7.6.7)所确定的隐函数 $y=y(x),z=z(x)$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

由一阶全微分形式的不变性,得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial F_1}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\mathrm{d}z = 0, \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial F_2}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial F_2}{\partial z}\mathrm{d}z = 0, \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\mathrm{d}z = -\dfrac{\partial F_1}{\partial x}\mathrm{d}x, \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial F_2}{\partial z}\mathrm{d}z = -\dfrac{\partial F_2}{\partial x}\mathrm{d}x. \end{cases}$$

将 $\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$ 视作未知数解上述方程组,假设 $\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$ 的系数所组成的行列式不为零,即可解出

$$\mathrm{d}y = \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial F_1}{\partial x}\mathrm{d}x & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ -\dfrac{\partial F_2}{\partial x}\mathrm{d}x & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} = -\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,z)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}}\mathrm{d}x,$$

因此得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,z)} \Bigg/ \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}. \tag{7.6.9}$$

同理得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,x)} \Bigg/ \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}. \tag{7.6.10}$$

这里我们引用了一个记号,即 n 个函数对 n 个变量求偏导数组成的行列式,称为**雅可比**(Jacobi)**行列式**. 如上面(7.6.9)式中分母的行列式是 F_1、F_2 对 y、z 的雅可比行列式:

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} \quad \left(\text{也记作}\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}\right).$$

例 7.6.3　设有方程组 $\begin{cases} xu - yv = 0, \\ yu + xv = 1, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解　由题意可知,这个方程组确定两个隐函数 $u = u(x,y)$ 和 $v = v(x,y)$. 我们利用推导公式(7.6.9)、(7.6.10)的思想和方法来计算.

对所给方程两边求全微分,得

$$\begin{cases} x\mathrm{d}u + u\mathrm{d}x - y\mathrm{d}v - v\mathrm{d}y = 0, \\ y\mathrm{d}u + u\mathrm{d}y + x\mathrm{d}v + v\mathrm{d}x = 0, \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x\mathrm{d}u - y\mathrm{d}v = -u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y, \\ y\mathrm{d}u + x\mathrm{d}v = -v\mathrm{d}x - u\mathrm{d}y. \end{cases}$$

将 $\mathrm{d}u$、$\mathrm{d}v$ 看作未知数解上述方程组,得

$$\begin{cases} du = \dfrac{1}{x^2+y^2}[(-xu-yv)dx+(xv-yu)dy], \\ dv = \dfrac{1}{x^2+y^2}[(yu-xv)dx+(-xu-yu)dy] \end{cases} \quad (设\ x^2+y^2 \neq 0),$$

于是得　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}$，　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{xv-yu}{x^2+y^2}$，　$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{yu-xv}{x^2+y^2}$，　$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}$.

读者可试用下法求解：分别对所给方程两边关于 x、y 求偏导数后，再解出 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$、$\dfrac{\partial u}{\partial y}$、$\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$. □

7.6.3　隐函数存在定理

现在我们讨论隐函数的存在性与可微性问题. 首先考虑一个方程的情形.

定理 7.6.1(隐函数存在定理)　设二元函数 $F(x,y)$ 满足下列条件：

(1) 在矩形区域 $D=\{(x,y) \mid |x-x_0|<a,\ |y-y_0|<b\}$ 内有关于 x 和 y 的连续偏导数；

(2) $F(x_0,y_0)=0$；

(3) $F_y(x_0,y_0)\neq 0$.

则 1° 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内，由方程 $F(x,y)=0$ 可以确定唯一的函数 $y=f(x)$，即存在 $\eta>0$，当 $x\in O(x_0,\eta)$ 时有 $F(x,f(x))=0$，并且 $y_0=f(x_0)$；

2° f 在 $O(x_0,\eta)$ 内连续；

3° f 在 $O(x_0,\eta)$ 内有连续的导数.

证　我们分几步来证明结论 1°. 不妨设 $F_y(x_0,y_0)>0$.

(Ⅰ) 由于 F_y 在点 (x_0,y_0) 连续以及 $F_y(x_0,y_0)>0$，利用二元连续函数的保号性质可知，存在点 (x_0,y_0) 的一个矩形邻域

$$D_1=\{(x,y) \mid |x-x_0|<a_1,\ |y-y_0|<b_1\},$$

使得在 D_1 内有 $F_y(x,y)>0$.

(Ⅱ) 固定 $x=x_0$，由于 $F_y(x_0,y)>0$，故 $F(x_0,y)$ 是关于变量 y 严格增加的函数. 再由 $F(x_0,y_0)=0$，得

$$F(x_0,y_0-b_1)<0,\quad F(x_0,y_0+b_1)>0. \tag{7.6.11}$$

(Ⅲ) 由 F 的连续性及(7.6.11)可知，分别存在点 (x_0,y_0-b_1) 的一个矩形邻域 R_1 和点 (x_0,y_0+b_1) 的一个矩形邻域 R_2，使得

$$F(x,y)<0,(x,y)\in R_1;\quad F(x,y)>0,(x,y)\in R_2.$$

因此，存在 $\eta>0$，使当 $x\in O(x_0,\eta)$ 时有

$$F(x,y_0-b_1)<0,\quad F(x,y_0+b_1)>0.$$

(Ⅳ) 对于 $O(x_0,\eta)$ 内的每一点 x，由于 $F(x,y_0-b_1)<0$，$F(x,y_0+b_1)>0$，以及

$F(x,y)$是关于变量y严格增加的,所以存在唯一的一点$y\in(y_0-b_1,y_0+b_1)$,使得$F(x,y)=0$(为什么?).这就是说,对每一个$x\in O(x_0,\eta)$,存在唯一的y与之对应.记这个对应关系为f,则有$y=f(x)$,并且$F(x,f(x))=0,x\in O(x_0,\eta)$.于是定理的结论1°得证.

现在来证明结论2°.$\forall x_1\in O(x_0,\eta)$以及$\forall\varepsilon>0$,重复1°的证明过程,可得到$\delta>0$,使当$x\in O(x_0,\delta)$时,有$f(x)\in(f(x_1)-\varepsilon,f(x_1)+\varepsilon)$.这便证明了$f$在$O(x_0,\eta)$内是连续的.

最后证明结论3^0.$\forall x,x+\Delta x\in O(x_0,\eta)$,记

$$y=f(x),\quad y+\Delta y=f(x+\Delta x),$$

则有

$$F(x,y)=0,\quad F(x+\Delta x,y+\Delta y)=0.$$

并且又有

$$\begin{aligned}0&=F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y)\\&=F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y+\Delta y)-F(x,y)\\&=F_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\Delta x+F_y(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y.\end{aligned}$$

注意到$F_y(x,y+\theta_2\Delta y)>0$,故得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)}{F_y(x,y+\theta_2\Delta y)}.$$

由于函数$y=f(x)$在$O(x_0,\eta)$内连续,故当$\Delta x\to0$时有$\Delta y\to0$.又已知F_x和F_y都连续,因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.\tag{7.6.12}$$

上式右端是连续的,故$y=f(x)$在$O(x_0,\eta)$内有连续的导数.定理证毕.　□

下面给出三元情形下的隐函数存在定理,证明从略.

定理7.6.2　设三元函数$F(x,y,z)$满足下列条件:

(1) 在长方体$D=\{(x,y,z)\mid |x-x_0|<a,|y-y_0|<b,|z-z_0|<c\}$内有关于$x,y$和$z$的连续偏导数;

(2) $F(x_0,y_0,z_0)=0$;

(3) $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq0$.

则1° 在点(x_0,y_0,z_0)的某邻域内,由方程$F(x,y,z)=0$可以确定唯一的函数$z=f(x,y)$,即存在$\eta_1>0,\eta_2>0$,当$(x,y)\in D'=\{(x,y)\mid |x-x_0|<\eta_1,|y-y_0|<\eta_2\}$时,有$F(x,y,f(x,y))=0$,并且$z_0=f(x_0,y_0)$;

2° f在D'内连续;

3° f在D'内有关于x及y的连续偏导数.

读者可仿此给出n元情形的隐函数存在定理.最后我们叙述一个方程组情形的隐函数存在定理,证明也从略.

定理7.6.3　设(1)函数$F(x,y,u,v)$和$G(x,y,u,v)$在点$P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某邻域内对各个变量有连续的偏导数;

(2) $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0, G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$;

(3) F、G 关于 x,y,u,v 在点 P_0 的雅可比行列式

$$J(P_0)=\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}=\begin{vmatrix} F_u(P_0) & F_v(P_0) \\ G_u(P_0) & G_v(P_0) \end{vmatrix}\neq 0.$$

则存在点 P_0 的一个邻域,在此邻域内由方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$

可以确定唯一的一组函数

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y),$$

满足

$$\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))=0, \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))=0, \end{cases}$$

并且 u,v 都具有关于 x,y 的连续偏导数.

习　题　7.6

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 由方程确定的隐函数,这个“隐”字是什么含义?

(2) n 个方程的方程组确定多少个隐函数?自变量的个数如何确定?

2. 求下列方程确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $x^2+2xy-y^2=a^2$;　　(2) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$;

(3) $y=2x\arctan\frac{y}{x}$;　　(4) $x^y=y^x\ (x\neq y)$.

3. 设 $x+y+z=e^z$,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

4. 设 $x+y+z=0, x^2+y^2+z^2=1$,求 $\frac{dx}{dz}$ 和 $\frac{dy}{dz}$.

5. 设 $x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$,求 z_x 和 z_y.

(B)

1. 设 $F(x-y,y-z,z-x)=0$,求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设 $x=x(y,z), y=y(x,z), z=z(x,y)$ 都是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的具有连续偏导数的函数,证明 $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$.

3. 设 $x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2, x+y+z=2$,求 $\frac{dx}{dz}$ 和 $\frac{d^2x}{dz^2}$.

4. 设 $\begin{cases} u=f(xu,v+y), \\ v=g(u-x,v^2y), \end{cases}$ 其中 f、g 具有一阶连续偏导数.求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x}$.

答案与提示

(A)

2. (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{y-x}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2a^2}{(x-y)^3}$; (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$; (3) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=0$;

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{y^3(1-\ln x)^2}{x^4(1-\ln y)^2}-\frac{2y^2(x-y)(1-\ln x)}{x^4(1-\ln y)}-\frac{y^2}{x^3}\right)\frac{1}{1-\ln y}$.

3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{e^z}{(e^z-1)^3}$.

4. $\frac{dx}{dz}=\frac{y-z}{x-y}$, $\frac{dy}{dz}=\frac{z-x}{x-y}$.

5. $z_x=\frac{2x}{f'-2z}$, $z_y=\frac{x^2-y^2+z^2-zf'}{2yz-yf'}$.

(B)

1. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F'_1-F'_3}{F'_2-F'_3}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F'_2-F'_1}{F'_2-F'_3}$.

3. $\frac{dx}{dz}=\frac{z+2y}{2(x-y)}$, $\frac{d^2x}{dz^2}=\frac{1}{x-y}\left[\frac{1}{2}-\frac{(z+2y)^2+(z+2x)^2}{4(x-y)^2}\right]$.

4. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{uf'_1(1-2yvg'_2)-f'_2g'_1}{(xf'_1-1)(2yvg'_2-1)-f'_2g'_1}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{g'_1(xf'_1+uf'_1-1)}{(xf'_1-1)(2yvg'_2-1)-f'_2g'_1}$.

7.7 泰勒多项式

我们在讨论一元函数的泰勒公式时,就知道用二次函数作逼近比用一次函数作逼近的效果更好,在本章7.3.2中,我们看到了如何用一个二元线性函数来逼近$f(x,y)$(局部线性化).本节将进一步讨论如何用二次及二次以上函数来逼近$f(x,y)$.

先回顾一下一元函数的情形.局部线性化为

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)\quad(x\text{ 在 }a\text{ 附近}).$$

用二阶泰勒多项式逼近:

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2\quad(x\text{ 在 }a\text{ 附近}).$$

二元函数$f(x,y)$在点(a,b)附近的局部线性化为

$$f(x,y)\approx f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b),$$

或者,若$(a,b)=(0,0)$,则

$$f(x,y)\approx f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y.$$

现在,我们想利用二次多项式作逼近:

$$f(x,y)\approx P(x,y)=A+Bx+Cy+Dx^2+Exy+Fy^2.$$

怎样选取这个多项式呢? 如果我们希望在(0,0)点的逼近是精确的,那就意味着

$$f(0,0)=P(0,0)=A.$$

如果我们对f和P在(0.0)处的一阶偏导数也要求

$$f_x(0,0)=P_x(0,0)=B,\quad f_y(0,0)=P_y(0,0)=C,$$

那么由于f和P在$(0,0)$处有相同的局部线性化,所以它们在$(0,0)$附近是很接近的.下一步自然希望f和P在$(0,0)$处的二阶偏导数相等.换句话说,要求

$$f_{xx}(0,0)=P_{xx}(0,0),\quad f_{xy}(0,0)=P_{xy}(0,0),\quad f_{yy}(0,0)=P_{yy}(0,0).$$

于是有
$$f_{xx}(0,0)=P_{xx}(0,0)=2D,\quad f_{xy}(0,0)=P_{xy}(0,0)=E,$$
$$f_{yy}(0,0)=P_{yy}(0,0)=2F.$$

这样我们就求出了系数A、B、…、F等,从而对于$f(x,y)$在$(0,0)$附近的最好的二次逼近是下列的多项式——**二阶泰勒多项式**:

$$\begin{aligned}f(x,y)&\approx P(x,y)\\&=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+\frac{f_{xx}(0,0)}{2}x^2\\&\quad+f_{xy}(0,0)xy+\frac{f_{yy}(0,0)}{2}y^2.\end{aligned}$$

同样,对于$f(x,y)$在(a,b)点附近的最好的二次逼近是下列的泰勒多项式:

$$\begin{aligned}f(x,y)&\approx P(x,y)\\&=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)\\&\quad+\frac{f_{xx}(a,b)}{2}(x-a)^2+f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)\\&\quad+\frac{f_{yy}(a,b)}{2}(y-b)^2.\end{aligned}$$

一般地,对二元函数有下面的结论(证明略).

定理7.7.1　设$z=f(x,y)$在(a,b)点的某一邻域内连续,且有直到$(n+1)$阶的连续偏导数,$(a+h,b+k)$为此邻域内一点,则有**泰勒公式**成立:

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)&=f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)\\&\quad+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(a,b)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf(a,b)\\&\quad+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(a+\theta h,b+\theta k)\qquad(0<\theta<1).\end{aligned}$$

其中记号　$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)$表示$hf_x(a,b)+kf_y(a,b)$;

$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(a,b)$表示$h^2f_{xx}(a,b)+2hkf_{xy}(a,b)+k^2f_{yy}(a,b)$;

$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^mf(a,b)$表示$\sum\limits_{p=0}^{m}C_m^ph^pk^{m-p}\frac{\partial^mf(a,b)}{\partial x^p\partial y^{m-p}}$.

例7.7.1　求函数$f(x,y)=\sqrt{x+2y+1}$在$(0,0)$处的二阶泰勒多项式.

解　先算出有关的数值:

导　　数	公　　式	在(0,0)处的值
$f(x,y)$	$(x+2y+1)^{\frac{1}{2}}$	1
$f_x(x,y)$	$\frac{1}{2}(x+2y+1)^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$
$f_y(x,y)$	$(x+2y+1)^{-\frac{1}{2}}$	1
$f_{xx}(x,y)$	$-\frac{1}{4}(x+2y+1)^{-3/2}$	$-\frac{1}{4}$
$f_{xy}(x,y)$	$-\frac{1}{2}(x+2y+1)^{-\frac{3}{2}}$	$-\frac{1}{2}$
$f_{yy}(x,y)$	$-(x+2y+1)^{-3/2}$	-1

然后写出二阶泰勒多项式：

$$f(x,y)\approx 1+\frac{1}{2}x+y-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}xy-\frac{1}{2}y^2. \qquad \square$$

习　题　7.7

(A)

1. 求 $z=\sin 2x+\cos y$ 在(0,0)处的二阶泰勒多项式.
2. 求 $z=\frac{1}{xy}$在(1,2)处的二阶泰勒多项式.

(B)

1. 试利用一阶泰勒多项式求$\sqrt{(3.012)^2+(3.997)^2}$的近似值.
2. 电阻R_1和R_2并联后的电阻为$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$,利用一阶泰勒多项式计算当$R_1=2.013$,$R_2=5.972$(单位是欧姆)时,R 的近似值.
3. 试写出函数$u=f(x,y,z)$在(a,b,c)点的一阶泰勒多项式.
4. 一长方体纸箱外侧尺寸分别为14,14,28,厚度为0.125,试利用习题3 的结果计算纸箱容积的近似值.

答案与提示

(A)

2. $\sin 2x+\cos y\approx 1+2x-\frac{1}{2}y^2$.
3. $\frac{1}{xy}\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}y-2+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{4}(x-1)(y-2)+\frac{1}{8}(y-2)^2$.

(B)

1. 5.0048.
2. 1.50556.
3. $f(x,y,z)\approx P(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0)+f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$
4. 5243

7.8　向量值函数的导数

7.8.1　向量值函数的概念

我们回忆一下从一元函数到多元函数的讨论,所涉及到的是一个自变量与一个因变量的关系,以及多个自变量与一个因变量的关系. 现在我们要把函数概念从一个因变量推广到多个因变量的情形. 也就是说,不仅自变量可以是多个的,而且因变量也可以是多个的情形.

为了更好地表述将要引进的新概念,我们首先引进矩阵的概念和记号.

定义 7.8.1(**矩阵**)　给出$m\times n$个数,排成m行n列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{7.8.1}$$

称此数表为$m\times n$ **矩阵**. 有时也用记号$(a_{ij})_{m\times n}$表示.

当$m=n$时,这样的表叫做n **阶矩阵**(**方阵**).

我们把欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的n维向量记作$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,有时也写作

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

为区别起见,我们将前者称为**行向量**,后者称为**列向量**. 本节常将向量写成列向量的形式,为了排版方便,我们采用转置符号“T”将列向量写成如下形式:

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}.$$

现在让我们回顾第6章6.6节所介绍的空间螺旋线的参数方程:

$$r=r(t)=\cos t i+\sin t j+tk. \tag{7.8.2}$$

在这里,t是自变量,而因变量则有三个,即$\cos t,\sin t,t$. 我们可以把(7.8.2)式改写成如下形式:

$$r=\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}. \tag{7.8.3}$$

由于作为函数值的是向量,因此称其为向量值函数.

一般地有如下的定义.

定义 7.8.2(**向量值函数**) 设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 是一个点集,称映射

$$f:D\to\mathbb{R}^m\quad(m\geqslant 2)$$

为定义于 D 上、在 $\mathbb{R}^m$ 中取值的**向量值函数**.

我们常将向量值函数 $f:D\to\mathbb{R}^m$ 写作

$$y=f(x),$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^m$. 若将它们的坐标分量一个一个地写出来,就是一个多元函数组

$$\begin{cases}y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ \quad\vdots\\ y_m=f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n).\end{cases}$$

在上面给出的例子中,(7.8.2)式(或(7.8.3)式)表示的是一个定义于 $\mathbb{R}$ 且在 $\mathbb{R}^3$ 中取值的一元向量值函数.

7.8.2 向量值函数的极限与连续性

(1) 极限

我们先讨论一个自变量、三个因变量的情形,然后推广到一般.

设 $f(x)=f_1(x)i+f_2(x)j+f_3(x)k$, $x\in I\subset\mathbb{R}$. 又设 $a\in I$ 是一给定的点, $A=A_1i+A_2j+A_3k$ 为一给定的向量. 如果

$$\lim_{x\to a}|f(x)-A|=0,\tag{7.8.4}$$

即当 $x\to a$ 时, $f(x)-A$ 的模趋于0,则称

$$\lim_{x\to a}f(x)=A.$$

由向量的模的定义可以推知,若 $A=A_1i+A_2j+A_3k$,则

$$\lim_{x\to a}f(x)=A\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}f_1(x)=A_1,\\ \lim\limits_{x\to a}f_2(x)=A_2,\\ \lim\limits_{x\to a}f_3(x)=A_3.\end{cases}$$

根据范数的定义,(7.8.4)式实际上等价于

$$\lim_{x\to a}\|f(x)-A\|=0,\tag{7.8.5}$$

用精确语言来描述, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 是指, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall x\in I$: $0<|x-a|<\delta$,有

$$\|f(x)-A\|<\varepsilon.$$

现在考虑一般情形. 设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 是一个区域, $f=(f_1,f_2,\cdots,f_m):D\to\mathbb{R}^m$ 是一个 n 元向

量值函数,$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in D$ 是一给定的点,$A=(A_1,A_2,\cdots,A_m)$为一给定的向量.

定义 7.8.3　如果 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in D:0<\|x-a\|<\delta$,有

$$\|f(x)-A\|<\varepsilon,$$

则称当 $x\to a$ 时,$f(x)$以 A 为极限,记作

$$\lim_{x\to a}\|f(x)-A\|=0.$$

这里,$\|x-a\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2}$,　$\|f(x)-A\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(f_i(x)-A_i)^2}$.

容易看出　$\lim_{x\to a}f(x)=A\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{x\to a}f_i(x)=A_i\quad(i=1,2,\cdots,m)$.

(2) 连续性

设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 是一个区域,$f:D\to\mathbb{R}^m$ 是一个 n 元向量值函数.

定义 7.8.4　$f:D\to\mathbb{R}^m$ 在点 $a\in D$ 连续是指,

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in D:\|x-a\|<\delta,\text{有}$$

$$\|f(x)-f(a)\|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

如果 f 在 D 的每一点连续,则称 f 在 D 上连续,或称 f 是 D 上的一个连续向量值函数.

显然

$$f:D\to\mathbb{R}^m\text{ 在点 }a\in D\text{ 连续}\Leftrightarrow\lim_{x\to a}f_i(x)=f_i(a)\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

这就是说,向量值函数的连续性可以归结为多元函数的连续性.

7.8.3　向量值函数的导数

我们还是从一个自变量、三个因变量的情形说起.设

$$y=f(x),$$

其中 $x\in\mathbb{R}$,而 $y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$,$f(x)=(f_1(x),f_2(x),f_3(x))^{\mathrm{T}}$.若 $f_1(x)$、$f_2(x)$、$f_3(x)$ 在点 $x_0\in\mathbb{R}$ 可导,则定义 $f(x)$在 x_0 点的导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\begin{pmatrix}\dfrac{f_1(x_0+\Delta x)-f_1(x_0)}{\Delta x}\\\dfrac{f_2(x_0+\Delta x)-f_2(x_0)}{\Delta x}\\\dfrac{f_3(x_0+\Delta x)-f_3(x_0)}{\Delta x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1'(x_0)\\f_2'(x_0)\\f_3'(x_0)\end{pmatrix}=f'(x_0).\end{aligned}\qquad(7.8.6)$$

这就是说,一元向量值函数的导数为各个分量的导数所组成的一个向量.

向量值函数 $y=f(x)$在 x_0 点可微,是指对于自变量 x 的任意的改变量 Δx,因变向量 y 相应的改变量 Δy 总可以分解为线性部分和高阶部分:

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)\ (\Delta x \to 0),$$

其中$A=(A_1,A_2,A_3)^{\mathrm T}$为常向量,$o(\Delta x)$也是一个向量,它的范数是$\|\Delta x\|$的高阶无穷小. 于是有微分表达式

$$\mathrm{d}y = A\mathrm{d}x,$$

这里$\mathrm{d}y=(\mathrm{d}y_1,\mathrm{d}y_2,\mathrm{d}y_3)^{\mathrm T}$. 同一元实值函数一样,可以证明:对于一元向量值函数来说,可导等价于可微,且$A=f'(x_0)$.

下面考察两个自变量、一个因变量的情形. 设

$$y = f(x),\quad x=(x_1,x_2)^{\mathrm T}\in \mathbb{R}^2,$$

它等价于二元函数　$$y = f(x_1,x_2).$$

我们知道,如果在点$x^\circ=(x_1^\circ,x_2^\circ)$处,偏导数$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$和$\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$连续,则此二元函数可微,其微分表达式可以写成如下形式:

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \mathrm{d}x_2\end{pmatrix}$$

其中的偏导数都在x°处取值. 上式中的1×2矩阵称为二元函数$f(x)$在点x°的雅可比矩阵,又称它是该函数在点x°的导数,记作

$$f'(x^\circ) = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{x^\circ}. \tag{7.8.7}$$

记自变向量x的微分$\mathrm{d}x=(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2)^{\mathrm T}$,则有微分表达式

$$\mathrm{d}y = f'(x^\circ)\mathrm{d}x.$$

现在考虑一般情形. 设$D\subset\mathbb{R}^n$是一个区域,f是定义于D内的n元向量值函数,即

$$f:D\to\mathbb{R}^m$$
$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto(y_1,y_2,\cdots,y_m).$$

f又可写成

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n))^{\mathrm T}.$$

我们看到,对于从$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}^3$的向量值函数来说,其导数是形如(7.8.6)的3×1矩阵;对于从$\mathbb{R}^2$到$\mathbb{R}$的函数来说,其导数是形如(7.8.7)的1×2矩阵. 对于向量值函数$f:D\to\mathbb{R}^m$,我们有下面的定义.

定义 7.8.5　设$x^\circ\in D$,并设每一个f_i都在x°点可微. 则称向量值函数f在点x°可微,并称下列雅可比矩阵

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}_{x^\circ}$$

是f在点x°的**导数**(又称**全导数**),记作$f'(x^\circ)$(或$\mathrm{D}f(x^\circ)$),即

$$\mathrm{D}f(x^\circ)=f'(x^\circ)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n},\tag{7.8.8}$$

它是一个$m\times n$矩阵,我们把它看作是从$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^m$的一个线性映射[①](或**线性算子**).因此,导数$f'(x^\circ)$不是一个数,而是一线性算子.

如果向量值函数f在D的每一点都可微,则称f在D可微.

可以证明,若f在x°可微,则有

$$f(x^\circ+\Delta x)=f(x^\circ)+f'(x^\circ)\Delta x+o(\Delta x),\tag{7.8.9}$$

并称

$$\mathrm{d}f(x^\circ)=f'(x^\circ)\Delta x$$

为f在x°的微分.

我们看到,(7.8.9)式与一元实值函数中相应的公式在形式上是一样的.但是要注意,(7.8.9)式两端都是m维向量.右端第二项是一个线性算子$f'(x^\circ)$作用于n维向量Δx上,把它变换为一个m维向量$f'(x^\circ)\Delta x$,右端的最后一项也是一个m维向量,它的含意是

$$\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\frac{\|o(\Delta x)\|}{\|\Delta x\|}=0,$$

即$o(\Delta x)$的范数是$\|\Delta x\|$的高阶无穷小.

(7.8.9)式表明,当$\|\Delta x\|$充分小,即$x^\circ+\Delta x$充分接近x°时,有

$$f(x^\circ+\Delta x)\approx f(x^\circ)+f'(x^\circ)\Delta x,$$

这就是说,在局部范围内,f可以线性化.

例7.8.1　对于向量值函数

$$r=r(t)=\cos t\,i+\sin t\,j+tk,$$

有

$$r'(t)=-\sin t\,i+\cos t\,j+k.$$ □

例7.8.2　求向量值函数$f(x,y,z)=\begin{bmatrix}3x+e^yz\\x^3+y^2\sin z\end{bmatrix}$在点$(x_0,y_0,z_0)$的导数.

解　f的两个坐标分量函数为

$$f_1(x,y,z)=3x+e^yz,$$

$$f_2(x,y,z)=x^3+y^2\sin z$$

它们的偏导数为

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=3,\quad\frac{\partial f_1}{\partial y}=e^yz,\quad\frac{\partial f_1}{\partial z}=e^y;$$

① 映射$A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$称为线性映射,是指(i)$A(x+y)=A(x)+A(y)$,$\forall x,y\in\mathbb{R}^n$;(ii)$A(kx)=kA(x)$,$\forall x\in\mathbb{R}^n$,$\forall k\in\mathbb{R}$.

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2y\sin z, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = y^2\cos z.$$

f 在点(x_0, y_0, z_0)的导数是雅可比矩阵

$$f'(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)} = \begin{pmatrix} 3 & e^{y_0}z_0 & e^{y_0} \\ 3x_0^2 & 2y_0\sin z_0 & y_0^2\cos z_0 \end{pmatrix}.$$

特别地,当 $x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = 1, z_0 = \pi$时,有

$$f'(\frac{1}{2}, 1, \pi) = \begin{pmatrix} 3 & e\pi & e \\ \frac{3}{4} & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

习　题　7.8

1. 回答下列问题:

(1) 什么叫做向量值函数?

(2) 向量值函数的极限与连续如何定义?

(3) 雅可比矩阵是什么? 向量值函数$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 在点x^0的导数怎样定义?

2. 求向量值函数 $f(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ 3xy \end{bmatrix}$ 的导数$f'(x, y)$.

3. 设$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ 定义为$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^x\cos y + e^y z^2 \\ 2x\sin y - 3yz^3 \end{pmatrix}$, 求$f'(0, \frac{\pi}{2}, 1)$.

4. 设$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 定义为$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin(x^2 - y^2) \\ \ln(x^2 + z^2) \\ \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \end{pmatrix}$,求$f'(1, 1, 1)$.

答案与提示

2. $f'(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 3y & 3x \end{bmatrix}$.

3. $f'(0, \frac{\pi}{2}, 1) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\pi/2} - 1 & 2e^{\frac{\pi}{2}} \\ 2 & -3 & -\frac{9\pi}{2} \end{pmatrix}$.

4. $f'(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

7.9　偏导数在几何上的应用

7.9.1　空间曲线的切线与法平面

由于空间曲线有三种表示方法,因此分三种情况讨论.

(1) 空间曲线L 由参数方程表示

$$r = r(t) = \varphi(t)i + \psi(t)j + \omega(t)k,\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{7.9.1}$$

首先考察$r'(t)$的力学意义与几何意义.

设质点在时刻t处于位置$r(t)=\{\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\}$,则$r= r(t)$刻画了质点的运动规律. 当$t$变到$t+\Delta t$时,质点$P$ 产生位移(见图7.19):

$$\Delta r = r(t+\Delta t) - r(t).$$

因此,在$[t,t+\Delta t]$上平均速度为

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t}.$$

而
$$v(t)= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}= r'(t)$$

就是质点P 在时刻t的瞬时速度.

类似可知$r''(t)$是质点P 在时刻t的加速度.

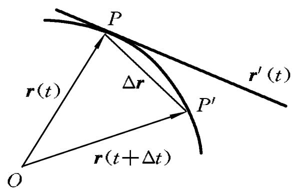


图7.19

另外,由图7.19还可以看到,Δr 等于弦PP'. 当$\Delta t> 0$时,$\frac{\Delta r}{\Delta t}$与$\Delta r$同向;当$\Delta t< 0$时$\frac{\Delta r}{\Delta t}$与$\Delta r$反向. 因此,当$\Delta t\to 0$时,若$\frac{\Delta r}{\Delta t}$的极限$r'(t)$为非零向量,则它是曲线$C$ 在t处的切向量,其正方向指向t增加的方向.

现在我们来求曲线L 过某点的切线和法平面的方程.

由$r'(t)$的几何意义知,当$t= t_0 \in [\alpha,\beta]$时,曲线$L$ 在点$(x_0,y_0,z_0)= (\varphi(t_0),\psi(t_0),\omega(t_0))$处的切向量为

$$T = r'(t_0) = \{\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\}.$$

由直线方程的对称式可知,曲线L 过点(x_0,y_0,z_0)的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}, \tag{7.9.2}$$

其中假设$\varphi'(t_0)$、$\psi'(t_0)$和$\omega'(t_0)$中至少有一个不为零.

过点(x_0,y_0,z_0)且与切线垂直的平面称为曲线L 在点(x_0,y_0,z_0)处的**法平面**,这法平面以T 为法向量. 由平面方程点法式可知,这法平面的方程为

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0. \tag{7.9.3}$$

例7.9.1　求曲线$x= t^2+ t,y= t^2- t,z= t^2$ 在点(6,2,4)处的切线及法平面方程.

解　因为$x'_t= 2t+ 1,y'_t= 2t- 1,z'_t= 2t$,而点(6,2,4)所对应的参数值为$t= 2$,所以

$$T=\{5,3,4\}.$$

于是,切线方程为

$$\frac{x-6}{5}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{4},$$

法平面方程为

$$5(x-6)+3(y-2)+4(z-4)=0,$$

即
$$5x+3y+4z=52.$$
□

(2) 空间曲线 L 的方程为显式表示

$$\begin{cases} y=y(x), \\ z=z(x). \end{cases} \tag{7.9.4}$$

此时可将其参数化,即取 x 为参数,就可化为上一种情形:

$$\begin{cases} x=x, \\ y=y(x), \\ z=z(x), \end{cases}$$

或
$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y(x)\boldsymbol{j}+z(x)\boldsymbol{k}.$$

例 7.9.2 求曲线 $y=x,z=x^2$ 在点 $M(1,1,1)$ 的切线与法平面方程.

解 取 x 为参数,则曲线的参数表示为

$$x=x,\quad y=x,\quad z=x^2.$$

它在 M 点的切向量为

$$T=\{1,1,2x\}\big|_M=\{1,1,2\}.$$

于是,过 M 点的切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2},$$

法平面方程为
$$(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0,$$

即
$$x+y+2z=4.$$
□

(3) 空间曲线 L 是两曲面的交线

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{7.9.5}$$

设 $M(x_0,y_0,z_0)$ 是曲线 L 上的一点.要想求 L 过 M 点的切线及法平面方程,只要求出曲线 L 过 M 点的切向量.为此,我们作如下的**假设**:F_1 和 F_2 有对各个变量的偏导数,且

$$\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_M\neq 0.$$

这时,方程组(7.9.5)在 M 点的某一邻域内确定了一组隐函数 $y=y(x),z=z(x)$.因此.曲线 L 过 M 点的切向量为

$$T = \{1, y'(x_0), z'(x_0)\}.$$

根据本章7.6节中的公式(7.6.9)和(7.6.10),有

$$y'(x_0) = -\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,z)}\Big/\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)},\quad z'(x_0) = -\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,x)}\Big/\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)},$$

其中的偏导数均在M点取值.将$y'(x_0)$和$z'(x_0)$的表达式代到T的表示式中,并将T乘以因子$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}$,得

$$T_1 = \left\{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}, -\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,z)}, -\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,x)}\right\}\Bigg|_{M_0},$$

这也是曲线L在点M处的一个切向量.为记忆方便,令

$$A = \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\Bigg|_M,\quad B = \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}\Bigg|_M,\quad C = \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\Bigg|_M,$$

则

$$T_1 = \{A, B, C\}.$$

于是曲线L在M点处的切线和法平面方程分别为

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C},$$

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

例7.9.3　求两柱面$x^2+y^2=a^2$和$x^2+z^2=a^2$的交线在点$\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$处的切线与法平面方程.

解　令$F_1(x,y,z)=x^2+y^2-a^2$,$F_2(x,y,z)=x^2+z^2-a^2$,则

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 2z \end{vmatrix} = 4yz,\quad \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)} = \begin{vmatrix} 0 & 2x \\ 2z & 2x \end{vmatrix} = -4xz,$$

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -4xy,$$

因此$A=2a^2$,$B=-2a^2$,$C=-2a^2$,所求切线方程为

$$\frac{x-\frac{a}{\sqrt{2}}}{2a^2} = \frac{y-\frac{a}{\sqrt{2}}}{-2a^2} = \frac{z-\frac{a}{\sqrt{2}}}{-2a^2},$$

法平面方程为

$$2a^2\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right) - 2a^2\left(y-\frac{a}{\sqrt{2}}\right) - 2a^2\left(z-\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = 0,$$

即

$$x - y - z + \frac{\sqrt{2}}{2}a = 0.$$ □

7.9.2　曲面的切平面与法线

在本章7.3.2中曾经指出,若函数$z=f(x,y)$在(a,b)点可微,那么这个函数在

(a,b)点附近可以局部线性化,即

$$f(x,y)\approx f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b).$$

而方程

$$z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b) \tag{7.9.6}$$

所表示的是一个法向量为$\{f_x(a,b),f_y(a,b),-1\}$的平面.现在我们就来解答本章7.3节中所提出的问题:曲面$z=f(x,y)$与平面(7.9.6)有什么关系?

(1) 曲面的切平面

先回忆一下曲线的切线的定义.如图7.20所示,曲线L在P_0点的切线P_0T是割线P_0P当$d(P,P_0)\to 0$时的极限位置,这里$d(P,P_0)$表示P点与P_0点的距离.

切线还有一个等价的定义:若L上的动点P到直线P_0T的距离为$d=d(P,P_0T)$,当$d(P,P_0)\to 0$时,有

$$\frac{d(P,P_0T)}{d(P,P_0)}=\sin\varphi\to 0,$$

则称P_0T是曲线L在P_0点的切线.φ为割线PP_0与直线P_0T的夹角,$\varphi\to 0$意味着PP_0的极限位置是P_0T.

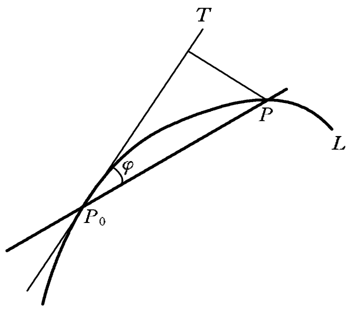


图7.20

类似地可给出曲面的切平面的定义.

设Π是过曲面S上一定点P_0的平面,P是曲面S上的动点,P点到平面Π的距离为$d(P,\Pi)$.若当$d(P,P_0)\to 0$时,有

$$\frac{d(P,\Pi)}{d(P,P_0)}\to 0,$$

则称平面Π是曲面S在P_0处的**切平面**.切平面Π的法向量n称为曲面S在P_0处的**法向量**,过点P_0且与切平面Π垂直的直线称为曲面S在P_0处的**法线**.

(2) 切平面与法线的方程

① 若曲面S的方程为 $z=f(x,y)$,

$P_0(x_0,y_0,z_0)$为S上一定点,其中$z_0=f(x_0,y_0)$.过P_0的平面Π的方程为

$$Z-z_0=A(X-x_0)+B(Y-y_0)\quad(\text{不平行于}z\text{轴}),$$

$X、Y、Z$是平面Π上动点的坐标.当A和B是什么数时,Π成为切平面呢?从切平面的定义出发进行分析.过P点作平面Π的垂线交Π于M点,同时作z轴的平行线交Π于K点,再过P_0作PK的垂线交PK于N点(见图7.21).由点到平面的距离公式(参看第6章6.4节公式(6.4.4))知,P点到Π的距离为

$$d(P,\Pi)=\frac{|z-z_0-[A(x-x_0)+B(y-y_0)]|}{\sqrt{1+A^2+B^2}},$$

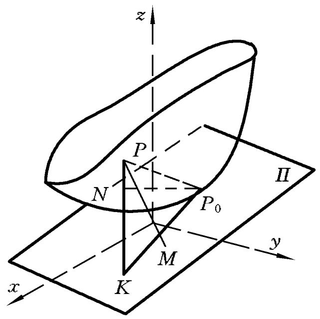


图7.21

令 $\Delta z = z - z_0, \Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$,则

$$\frac{d(P,\Pi)}{d(P,P_0)} = \frac{|\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)|}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}\, d(P,P_0)}.$$

因此,Π 是切平面的充要条件是

$$\lim_{P \to P_0} \frac{|\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)|}{d(P,P_0)} = 0, \tag{7.9.7}$$

而(7.9.7)式成立的充要条件是

$$\lim_{P \to P_0} \frac{|\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)|}{d(P_0,N)} = 0. \tag{7.9.8}$$

事实上,由于

$$\frac{|\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)|}{d(P,P_0)} = \frac{|\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)|}{d(P_0,N)} \cdot \frac{d(P_0,N)}{d(P,P_0)},$$

故若(7.9.8)式成立,必有(7.9.7)式成立. 反过来,由于

$$\frac{|\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)|}{d(P_0,N)} = \frac{|\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)|}{d(P,P_0)} \cdot \frac{d(P,P_0)}{d(P_0,N)},$$

并且可以证明当 P 点充分靠近 P_0 点时,$d(P,P_0)/d(P_0,N)$ 是有界的(证明略),故若(7.9.7)式成立,则(7.9.8)式必成立. 因此,(7.9.7)式与(7.9.8)式等价.

注意,$d(P_0,N) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$,所以(7.9.8)式成立即意味着函数 $z = f(x,y)$ 在 P_0 点可微,因此,(7.9.7)式与(7.9.8)式等价就证明了函数的可微性与切平面的存在性是等价的. 这时

$$A = f_x(x_0,y_0), \quad B = f_y(x_0,y_0).$$

于是,切平面 Π 的方程为

$$Z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(X - x_0) + f_y(x_0,y_0)(Y - y_0).$$

这也就回答了本节开头所提出的问题.

我们把上面讨论的结果写成一个定理.

定理 7.9.1　曲面 $z = f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$($z_0 = f(x_0,y_0)$)存在不平行于 z 轴的切平面的充要条件是:函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微,这时切平面方程为

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0). \tag{7.9.9}$$

我们看到,(7.9.9)式右端正好是函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全微分 $\mathrm{d}z$,而左边则是对应于自变量的改变量 $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$ 的切平面的竖坐标(沿 z 轴的坐标)的改变量. 这就是全微分的几何意义.

由切平面方程(7.9.9)式可知,这切平面的法向量为

$$n = \left\{ -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right\},$$

因此,曲面 S 过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 点的法线方程是

$$\frac{x-x_0}{-p}=\frac{y-y_0}{-q}=\frac{z-z_0}{1}, \tag{7.9.10}$$

其中 $p=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$. 若分母有一为零时,约定相应的分子也为零.

设法向量 n 与 x、y、z 轴正向的夹角分别为 α、β、γ,则 n 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \cos\beta=\frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

上面三个式子中根式前的正负号,要么同时取"+"号,要么同时取"-"号. 如果要求曲面在 P_0 点的法向量向上,那么由于它与 z 轴正向的夹角为锐角,故法向量的第三个方向余弦必须大于零,即 $\cos\gamma>0$,所以三个根式都取"+"号. 类似可知,若法向量朝下,则三个根式都取"-"号.

② 若曲面 S 方程为　　$F(x,y,z)=0$,

并设方程所确定的隐函数为　　$z=z(x,y)$,

则可以化到情形①,这里

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

根据上段的结果,曲面 S 过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程为

$$z-z_0=\frac{\partial z}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(y-y_0),$$

即

$$z-z_0=-\frac{F_x}{F_z}(x-x_0)-\frac{F_y}{F_z}(y-y_0),$$

化简得

$$F_x\cdot(x-x_0)+F_y\cdot(y-y_0)+F_z\cdot(z-z_0)=0, \tag{7.9.11}$$

其中偏导数在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 点取值. 由切平面方程(7.9.11)得到曲面 S 在 P_0 点的法向量为

$$n=\{F_x,F_y,F_z\}_{P_0},$$

因此法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x}=\frac{y-y_0}{F_y}=\frac{z-z_0}{F_z}, \tag{7.9.12}$$

其中偏导数在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 点取值.

例 7.9.4　求曲面 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$ 在点 $P_0\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 处的切平面和法线方程.

解　$f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$,　$f_x(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$,　$f_y(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$,

$$n=\{-f_x,-f_y,1\}_{P_0}=\left\{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right\}.$$

切平面方程为

$$\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)+\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

或

$$z=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-y);$$

法线方程为
$$\frac{x-1}{1/2}=\frac{y-1}{-1/2}=\frac{z-\pi/4}{1},$$
或
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\pi/4}{2}.$$
□

例7.9.5　求椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的切平面方程.

解　令$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$,先求曲面在$P_0$点的法向量.
$$F_x(P_0)=\frac{2x_0}{a^2},\ F_y(P_0)=\frac{2y_0}{b^2},\ F_z(P_0)=\frac{2z_0}{c^2},$$
$$n=\left\{\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right\}.$$
于是切平面方程为
$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0.$$
由于P_0点在椭球面上,故有
$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1,$$
所以椭球面在P_0点的切平面方程为
$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1.$$
□

习　题　7.9

(A)

1. 对下列曲线写出已知点的切向量:
   (1) $y=x,z=x^2,M_0(1,1,1)$;
   (2) $x=a\cos\alpha\cos t,y=a\sin\alpha\cos t,z=a\sin t,t=t_0$;
   (3) $x^2+z^2=10,y^2+z^2=10,M_0(1,1,3)$;
   (4) $z=f(x,y),\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha},f$可微,在曲线上的$M_0(x_0,y_0,z_0)$点处.
2. 求下列曲线在指定点的切线和法平面方程:
   (1) $x=t,y=t^2,z=t^3,M(1,1,1)$;
   (2) $x=t-\sin t,y=1-\cos t,z=4\sin\frac{t}{2},M\left(\frac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2}\right)$;
   (3) $x=a\sin^2 t,y=b\sin t\cos t,z=c\cos^2 t,t=\frac{\pi}{4}$;
   (4) $x=a\cos t,y=a\sin t,z=ct,M(a,0,0)$.
3. 在曲线$y=x^2,z=x^3$上求一点,使该点处的切线平行于平面$x+2y+z=4$.
4. 求曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0,\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$在点(1,1,1)处的切线和法平面方程.

5. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ x+y+z=0 \end{cases}$在点$(1,-2,1)$处的切线和法平面方程.

6. 对下列曲面写出在已知点的法向量:

(1) $z=x^2+y^2, M_0(1,2,5)$; (2) $z=\arctan\dfrac{y}{x}, M_0\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(3) $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8, M_0(2,2,1)$; (4) $F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0, M_0(x_0,y_0,z_0)$.

7. 求下列曲面在指定点的切平面和法线方程:

(1) $z=x^2+y^2-1$ 于$P_0(2,1,4)$处; (2) $z=e^y+x+x^2+6$ 于点$(1,0,9)$;

(3) $z=ye^{x/y}$于点$(1,1,e)$; (4) $z=\dfrac{1}{2}(x^2+4y^2)$于点$(2,1,4)$;

(5) $x^2+y^2+z^2=169, P_0(3,4,12)$; (6) $3x^2+2y^2=2z+1, P_0(1,1,2)$;

(7) $z=y+\ln\dfrac{x}{z}, P_0(1,1,1)$; (8) $e^z-z+xy=3, P_0(2,1,0)$.

8. 求曲面$2x^2+3y^2+z^2=9$的切平面,使之平行于平面$2x-3y+2z=1$.

(B)

1. 证明曲线$x=ae^t\cos t, y=ae^t\sin t, z=ae^t$(其中$a$为常数)与锥面$z^2=x^2+y^2$的母线相交的角的大小是相同的.

2. 求曲面$3x^2+y^2+z^2=16$与$x^2+y^2+z^2=14$在点$(-1,2,3)$的交角θ.

3. 求曲面$x^2+y^2+z^2=x$的切平面,使它垂直于平面$x-y-z=2$和$x-y-\dfrac{1}{2}z=2$.

4. 设$F(u,v)$是可微函数,求证:曲面$F(ax-bz, ay-cz)=0$ $(abc\neq 0)$的切平面平行于某定直线.

答案与提示

(A)

1. (1) $T=\{1,1,2\}$; (2) $T=\{-a\cos\alpha\sin t_0, -a\sin\alpha\sin t_0, a\cos t_0\}$;

(3) $T=\{-3,-3,1\}$; (4) $T=\{1,\tan\alpha, f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)\tan\alpha\}$.

2. (1) 切线:$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$,法平面:$x+2y+3z-6=0$;

(2) 切线:$\dfrac{x-(\pi/2-1)}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$,法平面:$x+y+\sqrt{2}z-\dfrac{\pi}{2}-4=0$;

(3) 切线:$\dfrac{x-a/2}{a}=\dfrac{y-b/2}{0}=\dfrac{z-c/2}{-c}$,法平面:$ax-cz-\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{c^2}{2}=0$;

(4) 切线:$\begin{cases} x-a=0, \\ cy-az=0, \end{cases}$ 法平面:$ay+cz=0$.

3. $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{27}\right)$及$(-1,1,-1)$.

4. 切线:$\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$,法平面:$16x+9y-z-24=0$.

5. 切线:$\begin{cases} x+z-2=0 \\ y+2=0 \end{cases}$,法平面:$x-z=0$.

6. (1) $\{2,4,-1\}$; (2) $\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-1\right\}$; (3) $4\ln 2\{1,1,-4\}$;

(4) $\{(z-c)F_1',(z-c)F_2',(a-x)F_1'+(b-y)F_2'\}$.

7. (1) 切平面:$4x+2y-z-6=0$,法线:$\frac{x-2}{-4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-4}{1}$;

(2) 切平面:$3x+y-z+6=0$,法线:$\frac{x-1}{-3}=\frac{y}{-1}=\frac{z-9}{1}$;

(3) 切平面:$\mathrm{e}x-z=0$,法线:$\frac{x-1}{-\mathrm{e}}=\frac{z-\mathrm{e}}{1}$,$y-1=0$;

(4) 切平面:$2x+4y-z-4=0$,法线:$\frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-4}{1}$;

(5) 切平面:$3x+4y+12z-169=0$,法线:$\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12}$;

(6) 切平面:$3x+2y-z-3=0$,法线:$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{1}$;

(7) 切平面:$x+y-2z=0$,法线:$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$;

(8) 切平面:$x+2y-4=0$,法线:$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}$,$z=0$.

8. $2x-3y+2z=\pm 9$.

(B)

2. $\theta=\arccos\frac{8}{\sqrt{77}}$.

3. $x+y=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$,$x+y=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

4. 曲面的法向量$n=\{-aF_1',-aF_2',bF_1'+cF_2'\}$,曲面的切平面平行于以$b,c,a$为方向数的某定直线.

7.10　无约束最优化问题

我们在第3章中曾讨论过一元函数的最大值和最小值问题.在实际生活中,我们会经常遇到多元函数的最大值、最小值问题.例如你现在有十万元资金,打算在你所经营的公司里投资到购买设备和做广告这两个方面.应当如何制定投资方案才能取得最好的效益呢? 又比如要做一个容积一定的铁皮长方形的有盖水箱,怎样设计长、宽、高的尺寸,才能使用料最省?本节和下一节将讨论两类最优化问题,一类是自变量可自由变化的最值问题——无约束最优化问题,另一类则是有约束条件的最值问题——约束最优化问题.

在一元函数的情形,我们说函数$y=f(x)$在$x=a$点有**极大值**,是指:a点不是f的定义域端点,且x在a点附近时,有$f(x)\leqslant f(a)$.如果说$f(x)$在$x=a$点有**最大值**,是指对于f的定义域中的一切点x,都有$f(x)\leqslant f(a)$.求一元函数的最大值或最小值时,我们是先求出区间内部的所有极值,然后与区间端点的函数值比较,这些值中最大的就是最大值,最小的就是最小值.求多元函数在闭区域上最大(小)值,我们也是先设法求出区域内部的所有极值.为此.我们先要给出多元函数的极值的概念.

7.10.1 多元函数的极值概念

定义 7.10.1(**极值**) 设函数 $z=f(x,y)$ 在 (a,b) 点附近有定义,并存在 (a,b) 点的一个 δ 邻域 $O((a,b),\delta)$,使得这邻域内的每个异于点 (a,b) 的点 (x,y) 都满足不等式

$$f(x,y)<f(a,b)\quad (或 f(x,y)>f(a,b)),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 有**严格的极大(小)值**,点 (a,b) 称为**严格的极大(小)点**. 若上式中的 $<$ $(>)$ 号改为 $\leqslant(\geqslant)$ 号,则称 $f(x,y)$ 在 (a,b) 点有**极大(小)值**,点 (a,b) 称为**极大(小)点**.

由定义可见,极值与最值不同,最值是一个**整体性**概念,它是函数在整个闭区域上的最大(小)值,而极值是一个**局部性**的概念. 讨论极值时只要存在一个以 (a,b) 点为中心的邻域就可以了,至于邻域的大小对讨论的问题没有影响.

7.10.2 极值的必要条件

在上面的极值定义中,函数在 (a,b) 点可以不存在偏导数,甚至不连续. 但一般来说,实际问题中很少有这种情况. 今后我们讨论的函数一般都假定有偏导数.

我们先来观察一下图 7.22. 图中的曲面是某个二元函数的图像,极大点与极小点如图所示. 我们知道在函数的梯度方向上,函数是递增的,而在函数的极大值处,就不存在使函数递增的方向,因此这时梯度必然为零向量(否则沿着梯度方向,函数继续递增). 类似地,与梯度方向相反的方向(即梯度的负向)是函数递减的方向,所以梯度在函数的极小值处必定为零向量. 因此,如果 P 点是函数 f 的极大点或极小点,则

$$\mathrm{grad} f(P)=0.$$

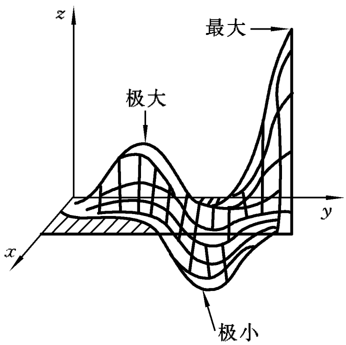


图 7.22

由此可以引进如下一个概念.

定义 7.10.2(**临界点**) 使得多元函数 f 的梯度 $\mathrm{grad} f(P)$ 为零向量以及 $\mathrm{grad} f(P)$ 不存在的点 P 统称为函数 f 的**临界点**,其中使 $\mathrm{grad} f(P)=0$ 的点 P 称为**驻点**.

由梯度的定义立即知道,对于可微的二元函数 $f(x,y)$ 来说,驻点就是方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0,\\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$$

的解. 而对于可微的三元函数 $f(x,y,z)$ 来说,驻点需从下列方程组解出:

$$\begin{cases} f_x(x,y,z)=0,\\ f_y(x,y,z)=0,\\ f_z(x,y,z)=0. \end{cases}$$

简言之,可微的多元函数取极值的**必要条件**是:**各个一阶偏导数都等于零**.

这个必要条件大大地缩小了寻找极值点的范围.如果由实际问题的意义可以判定函数在闭区域D内部达到最大(小)值,则内部的最大(小)值也就是极大(小)值,如果上述的方程组在D的内部只有一组解,则方程组的解一定是最大(小)值点.

例7.10.1　求函数$f(x,y)=x^2-2x+y^2-4y+5$的所有临界点.

解　显然$f(x,y)$处处存在偏导数.因$\mathrm{grad}f=(2x-2)i+(2y-4)j$,故当

$$2x-2=0,\quad 2y-4=0$$

时,梯度$\mathrm{grad}f$是零向量,即是说,点(1,2)是函数$f(x,y)$唯一的临界点.实际上,由于$f(x,y)$可以改写为

$$f(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^2.$$

所以临界点(1,2)是$f(x,y)$的极小点,同时也是最小点.　□

例7.10.2　函数$f(x,y)=y^2-x^2$的图形是一个鞍形曲面(参看图6.42).由

$$f_x=-2x=0,\quad f_y=2y=0$$

解出唯一的临界点(0,0).由函数的图形可以看到,在(0,0)点的附近既存在点(x_1,y_1)使得$f(0,0)<f(x_1,y_1)$,又存在点(x_2,y_2),使得$f(0,0)>f(x_2,y_2)$,因此(0,0)点不是$f(x,y)$的极值点.这样的点称为**鞍点**.　□

7.10.3　极值的充分条件

以上两例表明,函数的临界点可能是极值点,也可能是鞍点.那么,怎样判定临界点是否为极值点呢?下面我们讨论驻点是极值点的充分条件.

我们先作一点代数上的准备.考虑二元二次函数

$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2.$$

当$a\neq0$时,$f(x,y)$可改写成下面的形式:

$$ax^2+bxy+cy^2=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}y\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}y^2\right].$$

记$\Delta=4ac-b^2$,称Δ为**判别式**,由上述表达式我们可以得出以下的结论:

① 若$\Delta>0$,则上式方括号内的两项均为正,因而函数有极大值或极小值.当$a>0$时有极小值;$a<0$时有极大值(读者可画出这两种情形中,曲面$z=f(x,y)$的草图).

② 若$\Delta<0$,则方括号内的两项有不同的符号,因而(0,0)是鞍点,即没有极值.

③ 若$\Delta=0$,则二次函数形如$a\left(x+\frac{b}{2a}y\right)^2$,它的基本形状是抛物柱面,在某些点上函数值为零.

现在我们再回到一般的二元函数的情形.设有二元函数$z=f(x,y)$,且有驻点(0,0).根据本章7.7节中的讨论,在(0,0)点附近可用$f(x,y)$的二阶泰勒多项式来作逼近(当然,假设f有二阶连续的偏导数):

$$f(x,y)\approx f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y$$
$$+\frac{1}{2}f_{xx}(0,0)x^2+f_{xy}(0,0)xy+\frac{1}{2}f_{yy}(0,0)y^2.$$

在临界点处,$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$,上式简化为

$$f(x,y)\approx f(0,0)+\frac{1}{2}f_{xx}(0,0)x^2+f_{xy}(0,0)xy+\frac{1}{2}f_{yy}(0,0)y^2.$$

或者 $$f(x,y)-f(0,0)\approx\frac{1}{2}f_{xx}(0,0)x^2+f_{xy}(0,0)xy+\frac{1}{2}f_{yy}(0,0)y^2.$$

这表明当(x,y)位于$(0,0)$点的附近时,$f(x,y)-f(0,0)$的符号与右端的二次函数的符号相同.这时,判别式为

$$\Delta=4\left(\frac{1}{2}f_{xx}(0,0)\right)\left(\frac{1}{2}f_{yy}(0,0)\right)-\left(f_{xy}(0,0)\right)^2,$$

把它简化为 $$\Delta=\left(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\right)\big|_{(0,0)}.$$

类似地,若$f(x,y)$有驻点(x_0,y_0),那么在这点附近,$f(x,y)$的性态与形如$A(x-x_0)^2+B(x-x_0)(y-y_0)+C(y-y_0)^2+D$的二次函数的性态相同,其中

$$A=f_{xx}(x_0,y_0),\quad B=f_{xy}(x_0,y_0),\quad C=f_{yy}(x_0,y_0).$$

令 $$\Delta=AC-B^2,$$

那么根据前面对二次函数所作的结论,我们有下面**判别准则**:

设(x_0,y_0)是$f(x,y)$的驻点,令

$$\Delta=f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-[f_{xy}(x_0,y_0)]^2.$$

(1) $\Delta>0$且$A>0$(或$C>0$)时,(x_0,y_0)是极小点.

(2) $\Delta>0$且$A<0$(或$C<0$)时,(x_0,y_0)是极大点.

(3) $\Delta<0$时,(x_0,y_0)是鞍点.

(4) $\Delta=0$时,需进一步讨论.

例 7.10.3 求函数$f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+3y^3+9y^2-3xy+9y-9x$的极大点、极小点和鞍点.

解 由$f_x=x-3y-9=0$,$f_y=9y^2+18y-3x+9=0$解得驻点$(3,-2)$和$(12,1)$,判别式是

$$\Delta(x,y)=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=18y+9.$$

因为$\Delta(3,-2)=-36+9<0$,故$(3,-2)$是鞍点.因为$\Delta(12,1)=18+9>0$,$f_{xx}(12,1)=1>0$,所以$(12,1)$是极小值点. □

7.10.4 最大(小)值的求法

设二元函数$z=f(x,y)$在有界闭区域D上连续,则$f(x,y)$在D上必能取得最大值和最小值.再假设$f(x,y)$在D内可微,且只有有限个驻点.这时若函数在D的内部

取得最大(小)值,则这个最大(小)值也是函数的极值.

在上述假设之下,函数$f(x,y)$在D上的最大(小)值的求法可归纳为如下步骤.

① 求出$f(x,y)$在D内的所有驻点;

② 计算$f(x,y)$在各个驻点的函数值;

③ 求出$f(x,y)$在边界∂D上的最大(小)值;

④ 将上面算得的函数值加以比较,其中最大者就是最大值,最小者就是最小值.

上述的第③步做起来往往很复杂.在许多实际问题中,可以根据问题的实际意义作出判断,确定函数$f(x,y)$的最大(小)值一定在区域D的内部取得,而函数在D内只有一个驻点,则可以断定这个驻点必为最大(小)值点.

求最大(小)值的例子将在下面给出.

例7.10.4　求函数$u=x+y$在区域$D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,2x+y\geqslant 3,x+3y\geqslant 4\}$上的最小值.

解　因为$u_x=u_y=1\neq 0$,所以函数u在区域D内没有驻点,u的最小值只能在D的边界上达到.

D的边界可分成4段:

(1) 在半直线$x=0,y\geqslant 3$上,$u=y$有最小值3;

(2) 在线段$2x+y=3,0\leqslant x\leqslant 1$上,$u=3-x$有最小值2;

(3) 在线段$x+3y=4,0\leqslant y\leqslant 1$上,$u=4-2y$有最小值2;

(4) 在半直线$y=0,x\geqslant 4$上,$u=x$有最小值4.

比较上述各函数值即知,u在D上有最小值2.　□

例7.10.5(最小二乘法)　在实际问题中,常常要从一组观测数据$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$出发,预测函数$y=f(x)$的表达式.从几何上看,就是由给定的一组数据$(x_i,y_i)$去描绘曲线$y=f(x)$的近似图形,这条近似的曲线称之为拟合曲线,要求这条拟合曲线能够反映出所给数据的总趋势(参看图7.23).作曲线拟合有多种方法,其中最小二乘法是常用的一种,它是根据实际数据采用一种"直线拟合"的方法,也就是用线性函数来作逼近.

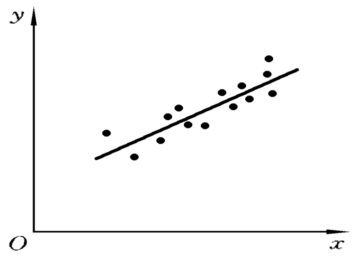


图7.23

假定所给的数据点(x_i,y_i)的分布大致成一条直线,设它的方程为

$$y=ax+b,$$

其中系数a、b待定.将x_i代入直线方程,得

$$\tilde{y}_i=ax_i+b\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

这与实测到的值y_i有偏差

$$\varepsilon_i=y_i-\tilde{y}_i=y_i-(ax_i+b)\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

作偏差的平方和　$\varepsilon^2=\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots+\varepsilon_n^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2,$

称$\varepsilon=\varepsilon(a,b)$为**平方总偏差**.

现在求a,b,使得平方总偏差ε达到最小,则所得直线$y=ax+b$就是所给数据的最佳拟合直线.

由极值的必要条件,有

$$\frac{\partial(\varepsilon^2)}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)x_i=2\left(a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)=0,$$

$$\frac{\partial(\varepsilon^2)}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)=2\left(a\sum_{i=1}^{n}x_i+nb-\sum_{i=1}^{n}y_i\right)=0.$$

于是得到a、b所满足的方程

$$\begin{cases}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)a+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)b=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\\ \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)a+nb=\sum_{i=1}^{n}y_i.\end{cases}$$

由此方程组解出a、b,则$y=ax+b$就是所要求的直线方程. □

习　题　7.10

(A)

1. 回答下列问题:

(1) $f(x,y)$的极值怎样定义?

(2) $f(x,y)$在定义域上的最大(小)值怎样定义?

(3) $f(x,y)$取极值的必要条件是什么?

(4) 怎样判断函数的临界点是否为极值点?

(5) 求$f(x,y)$在闭区域D上的最大(小)值的一般步骤是什么?

2. 求函数$f(x,y)=8xy-\dfrac{1}{4}(x+y)^4$的所有临界点,并判定它们是极大点、极小点还是鞍点.

3. 求下列函数的极值:

(1) $f(x,y)=(x+y)(xy+1)$.

(2) $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$.

(3) $f(x,y)=x^3+y^3-3(x^2+y^2)$.

(4) $f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$, $0<x<\pi$, $0<y<\pi$.

4. 求下列函数的极值点和鞍点.

(1) $f(x,y)=x^2+y^3-3xy$.　　(2) $f(x,y)=xy+\ln x+y^2-10\ (x>0)$.

5. 证明函数$z=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$有无穷多个极大值,但没有极小值.

6. 求函数$f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$在闭区域D: $-5\leqslant x\leqslant 5$, $-1\leqslant y\leqslant 1$上的最大值与最小值.

7. 设水深与流速间的测量数据为

水深x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
流速y	3.195	3.229 9	3.253 2	3.261 1	3.251 6
水深x	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
流速y	3.228 2	3.180 7	3.126 6	3.059 4	2.975 7

试用最小二乘法求最佳拟合直线$y=ax+b$.

8. 有一块宽24 cm的矩形薄铁皮,把两边折起来,做成一个梯形水槽(见图7.24),问x与θ各为何值时,水槽的流量最大?

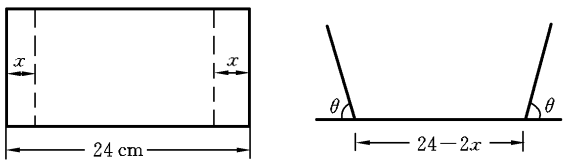


图7.24

9. 试设计一个宽w,长l,高h的长方形纸板盒,使其具有512 cm^3的容积.这个盒子的侧边的成本是0.1元/cm^2,而上下底的成本是0.2元/cm^2.试求这个盒子的尺寸,使得所用材料的成本最低.

(B)

1. 求函数$f(x,y)=e^x(1-\cos y)$的临界点,并判定它们是极大(小)值点还是鞍点.
2. 求由方程$2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$所确定的隐函数$z=z(x,y)$的极值.
3. 求由方程$x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-10=0$所确定的隐函数$z=z(x,y)$的极值.
4. 试利用费马定理(见第3章3.5节)证明:若函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)具有偏导数,且在点(x_0,y_0)处有极值,则必有$f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$.
5. 在半径为R的圆内求一内接三角形,使其面积最大.
6. 求a,b,使积分$I=\int_0^1(a+bx-x^2)^2dx$的值最小.

答案与提示

(A)

2. $(1,1)$是极大点,$(-1,-1)$是极大点,$(0,0)$是鞍点.
3. (1) 无极值;　(2) 极小值$-\frac{e}{2}$;　(3) 极小值-51;　(4) 极大值$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
4. (1) $(0,0)$是鞍点,$\left(\frac{9}{4},\frac{3}{2}\right)$是极小点,也是最小值点;　(2) $\left(2,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$是鞍点.
5. $x=k\pi,y=\cos k\pi-1(k=0,\pm 2,\pm 4,\cdots)$时,有无穷多个极大值;$x=k\pi,y=\cos k\pi-1(k=\pm 1,\pm 3,\cdots)$时,无极值.
6. 最大值为$f(5,1)=34$,最小值为$f(-5,1)=-236$.
7. $y=-0.246\,351x+3.286\,998$.
8. $x=8,\theta=\frac{\pi}{3}$.

9. $w=4\sqrt[3]{4}$, $l=4\sqrt[3]{4}$, $h=8\sqrt[3]{4}$.

(B)

1. $(x,2k\pi)$是极小点($k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$).
2. 极小值为$z(-2,0)=1$,极大值为$z(\frac{16}{7},0)=-\frac{8}{7}$.
3. 极小值为-2,极大值为6.
5. 当三角形为等边三角形时,其面积最大.
6. $a=1$, $b=-\frac{1}{6}$.

7.11　约束最优化问题

在上节所讨论的极值问题中,对自变量没有任何约束,它们可以在定义域上自由地变化.因此称这种极值问题为**无约束最优化**问题,或**简单极值**问题.然而在大多数实际问题中,自变量要受到一些约束条件的限制,使自变量不能在定义域上自由地变化,而只能在定义域的某一部分内变化.这种极值问题称为**约束最优化**问题,或**条件极值**问题.一般地,约束条件有**不等式约束**与**等式约束**两种.这里只讨论自变量在等式约束条件下求极值的方法.

7.11.1　拉格朗日乘数

考虑一种较简单的情形.求函数$z=f(x,y)$在条件

$$g(x,y)=0 \tag{7.11.1}$$

下的最大(小)值.我们称$f(x,y)$为**目标函数**,(7.11.1)为**约束条件**.这里假设f与g均为可微函数.

动点要满足条件(7.11.1),从几何上看,就是限制动点在曲线$g(x,y)=0$上变动,问题就变为当动点在曲线$g(x,y)=0$上变动时,求函数$z=f(x,y)$的最大(小)值.

函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处有满足条件$g(x,y)=0$的极大(小)值,是指对于曲线$g(x,y)=0$上位于P_0附近的点$P(x,y)$,有

$$f(P)\leqslant f(P_0)\quad (f(P)\geqslant f(P_0)).$$

现在来寻找$f(x,y)$有条件极值的必要条件.如果从方程$g(x,y)=0$中能解出y来,比方说,解得$y=h(x)$,那么问题就变成$z=f(x,y(x))$这样一个一元函数的极值问题了.然而,一般情况下,从$g(x,y)=0$中解出y来是十分困难甚至是不可能的事情.

在无约束最优化问题中,函数f取极值的必要条件是$\mathrm{grad}f=0$.因此,函数的极值只可能在某个临界点处取得.那么,在约束最优化问题中,“临界点”是什么样的点呢?为了探讨这个问题,我们用Γ表示方程$g(x,y)=0$所确定的曲线.假设函数$f(x,y)$在曲线Γ上点$P_0(x_0,y_0)$处有极大值(对极小值可同样讨论).在点P_0处取曲线Γ的

单位切向量 l(见图7.25). 若方向导数$\frac{\partial f}{\partial l}$为正,则函数 f 在曲线 Γ 上沿方向 l 是递增的. 因此,如果函数 f 在 Γ 上的 P_0 点处有极大值,则必有

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0,y_0)=0. \tag{7.11.2}$$

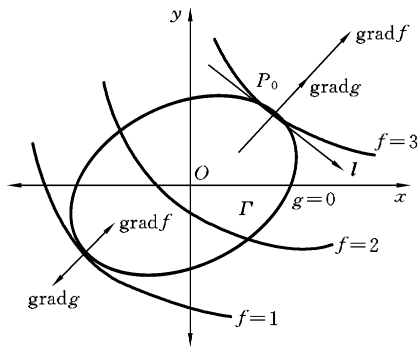


图7.25

由方向导数概念知

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0,y_0)=\mathrm{grad}f(x_0,y_0)\cdot l,$$

因此,由(7.11.2)式有

$$\mathrm{grad}f(x_0,y_0)\cdot l=0.$$

另一方面,梯度 $\mathrm{grad}g(x_0,y_0)$与切向量 l 是互相垂直的,故有

$$\mathrm{grad}g(x_0,y_0)\cdot l=0.$$

这样一来,向量$\mathrm{grad}f(x_0,y_0)$必与向量$\mathrm{grad}g(x_0,y_0)$互相平行. 这就是说,如果$P_0(x_0,y_0)$是函数f 满足条件$g(x,y)=0$ 的极值点,且梯度$\mathrm{grad}g(x_0,y_0)$是非零向量,则必存在一个数λ,使得

$$\mathrm{grad}f(x_0,y_0)=\lambda\,\mathrm{grad}g(x_0,y_0). \tag{7.11.3}$$

(7.11.3)式等价于

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)=\lambda g_x(x_0,y_0),\\ f_y(x_0,y_0)=\lambda g_y(x_0,y_0). \end{cases} \tag{7.11.4}$$

综上所述,有下面的结论:

函数 $z=f(x,y)$在条件 $g(x,y)=0$ 下取极值的必要条件是

$$\begin{cases} f_x(x,y)=\lambda g_x(x,y),\\ f_y(x,y)=\lambda g_y(x,y),\\ g(x,y)=0, \end{cases} \tag{7.11.5}$$

其中 x、y、λ 都是未知数. 引进的参数 λ 称为**拉格朗日(Lagrange)乘数**.

7.11.2　拉格朗日乘数法

由上面的讨论可知,要想求函数$f(x,y)$在条件 $g(x,y)=0$ 下的极值,只需从方程组(7.11.5)中求出可能极值点. 至于这些可能极值点是不是极值点,一般可根据实际问题的意义来判定. 若实际问题肯定存在最大(小)值,而方程组(7.11.5)又只有一组解,那么这组解就是所求的最大(小)值点. 若方程组(7.11.5)有好几组解,则通过比较函数在各组解上的值,就可求出最大(小)值.

为了便于记忆,把约束最优化的必要条件与无约束最优化的必要条件统一起来. 为此构造一个三元的辅助函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y).$$

则函数 $L(x,y,\lambda)$ 的通常极值的必要条件就是

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0. \tag{7.11.6}$$

这正是方程组(7.11.5). 这个方法称为**拉格朗日乘数法**, λ 称为**拉格朗日乘数**, $L(x,y,\lambda)$ 称为**拉格朗日函数**. 条件(7.11.6)也可表示为 $\mathrm{grad}L=0$.

例 7.11.1　求 $f(x,y)=xy$ 在圆周 $x^2+y^2=4$ 上的最大值和最小值.

解　目标函数是

$$f(x,y)=xy,$$

约束条件是

$$g(x,y)=x^2+y^2-4=0.$$

由于 $\mathrm{grad}f=y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$, $\mathrm{grad}g=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}$, 所以由 $\mathrm{grad}f=\lambda\mathrm{grad}g$ 得

$$y=2\lambda x,\quad x=2\lambda y,$$

再加上

$$x^2+y^2-4=0,$$

可以解出可能极值点为 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 及 $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$. 直接计算得

$$f_{\max}=f(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2})=2,$$

$$f_{\min}=f(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})=-2.$$

见图 7.26.　□

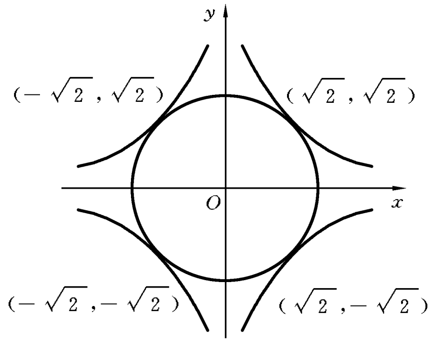


图 7.26

拉格朗日乘数法可推广到更复杂的情形.

(1) 求 $f(x,y,z)$ 在条件 $g(x,y,z)=0$ 下的极值

解法:作拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$$

由方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=f_x(x,y,z)+\lambda g_x(x,y,z)=0,\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial y}=f_y(x,y,z)+\lambda g_y(x,y,z)=0,\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial z}=f_z(x,y,z)+\lambda g_z(x,y,z)=0,\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=g(x,y,z)=0.\end{cases} \tag{7.11.7}$$

求出可能极值点.　□

(2) 求函数 $f(x,y,z)$ 在条件 $\begin{cases}g_1(x,y,z)=0,\\ g_2(x,y,z)=0\end{cases}$ 下的极值.

解法:这里有两个约束条件,因此引进两个拉格朗日乘数 λ_1 与 λ_2,作拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+\lambda_1 g_1(x,y,z)+\lambda_2 g_2(x,y,z).$$

再由方程组

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial z}=0,\quad g_1(x,y,z)=0,\quad g_2(x,y,z)=0$$

求出可能极值点. □

一般来说,上述方法对多个变量、多个约束条件(约束条件数目应小于自变量数目)的情形都适用.

例7.11.2　造一容积为V的长方形无盖铝盆,怎样设计尺寸,使它的表面积最小?

解　设铝盆的长、宽、高分别为x、y、z,则问题归结为求目标函数

$$f(x,y,z)=2(x+y)z+xy$$

在约束条件$xyz=V\ (x>0,y>0,z>0)$下的最小值.

作拉格朗日函数　$L(x,y,z,\lambda)=2(x+y)z+xy+\lambda(xyz-V)$.

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=y+2z+\lambda yz=0, & (7.11.8)\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=x+2z+\lambda xz=0, & (7.11.9)\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=2(x+y)+\lambda xy=0, & (7.11.10)\\ xyz=V, & (7.11.11)\end{cases}$$

方程(7.11.8)、(7.11.9)、(7.11.10)可改写为

$$\frac{1}{z}+\frac{2}{y}=-\lambda=\frac{1}{z}+\frac{2}{x}=\frac{2}{x}+\frac{2}{y},$$

故有

$$x_0=y_0=2z_0=\sqrt[3]{2V},\quad z_0=\sqrt[3]{\frac{V}{4}}.$$

由实际问题的意义知,表面积一定在某点达到最小.因此,当长、宽均为$\sqrt[3]{2V}$,高为$\sqrt[3]{V/4}$时,铝盆的表面积最小,且最小表面积为$3\sqrt[3]{4V^2}$. □

习　题　7.11

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 目标函数$z=f(x,y)$在条件$g(x,y)=0$下取得极值的必要条件是什么?

(2) 什么是拉格朗日乘数法?

2. 求下列函数在给定的约束条件下的最大、最小值:

(1) $f(x,y)=x^2+y,x^2-y^2=1$;　　(2) $f(x,y)=xy,x+y=1$;

(3) $f(x,y,z)=x+3y+5z, x^2+y^2+z^2=1$；　(4) $f(x,y,z)=2x+y+4z, x^2+y^2+z^2=16$.

3. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中,求有最大周界的直角三角形.
4. 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.
5. 在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点,使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短.
6. 欲造一无盖的长方体容器,已知底部造价为每平方米3元,侧面造价均为每平方米1元。现想用36元造一个容积最大的容器,求它的尺寸.

(B)

1. 为了使渠道不致漏水,在渠道表面砌一道水泥. 根据流量的大小,其截面积就确定了. 设要修的渠道是直的,其横断面是一等腰梯形(见图7.27). 问腰和底各为多少时水泥用量为最少.
2. 求二元函数 $u=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$、x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的极值、最大值和最小值.
3. 证明:周长一定的三角形中以等边三角形的面积最大.
4. 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面,使切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积最小,求切点的坐标.

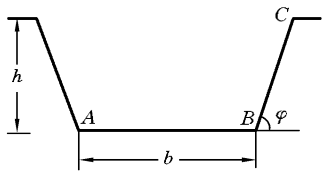


图7.27

答案与提示

(A)

2. (1) 最小值 $\frac{3}{4}$,无最大值；　(2) 最大值 $\frac{1}{4}$；　(3) 最大值 $\sqrt{35}$,最小值 $-\sqrt{35}$；
(4) 最大值 $4\sqrt{21}$,最小值 $-4\sqrt{21}$.
3. 直角边长为 $\frac{l}{\sqrt{2}}$ 的等腰直角三角形.
4. 长、宽、高均为 $\frac{a}{\sqrt{3}}$.
5. $\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$.
6. 长2米,宽2米,高3米.

(B)

1. 若截面积为 S,则当 $AB=BC=\frac{2\sqrt{S}}{3^{3/4}}$,$\varphi=\frac{\pi}{3}$ 时,水泥用量最少.
2. 极大值4,最大值4,最小值 -64.
3. 利用海伦公式写出三角形的面积.
4. 切点为 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

7.12　偏导数计算在偏微分方程中的应用

在第5章我们讨论了微分方程的问题. 在那里我们曾说过,含有未知函数及未知

函数的导数的方程叫做微分方程.注意,那时所说的函数是一元函数,所出现的导数是一元函数的导数.现在我们考虑未知函数是多元函数的情形,所出现的导数是多元函数的偏导数.我们称含有多元未知函数及其偏导数的方程为**偏微分方程**.而第5章中所讨论的那类方程就叫做**常微分方程**.

关于偏微分方程的许多基本问题,读者将有机会在后续课程《数学物理方程》中学习到.我们在这里只是作为偏导数的计算和应用,介绍几个典型的偏微分方程,以及方程中未知量的变换问题.

7.12.1　验证给定函数满足某偏微分方程

例7.12.1　证明:函数$u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$在定义域上满足**拉普拉斯**(Laplace)**方程**

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{7.12.1}$$

证　为方便起见,我们引进中间变量

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

则$u=\dfrac{1}{r}$.因$\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r}$,故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{x}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}.$$

由于函数u关于自变量x、y、z是对称的,故只要分别用y、z去替换x,就能得到其他两个二阶偏导数.于是有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}.$$

最后得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3}=0.\qquad\square$$

例7.12.2　证明函数$u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$($\varphi$、$\psi$为任意可微函数)满足**弦振动方程**

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{7.12.2}$$

证　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x-at)+\psi'(x+at)$,

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x-at)+\psi''(x+at)$,

$\dfrac{\partial u}{\partial t}=-a\varphi'(x-at)+a\psi'(x+at)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=(-a)\cdot(-a)\varphi''(x-at)+a^2\psi''(x+at)$$
$$=a^2[\varphi''(x-at)+\psi''(x+at)],$$

所以得
$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$
□

例 7.12.3　设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 确定. 证明
$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$$

证　对方程 $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 两边分别关于 x、y 求偏导数,得
$$F_1'\cdot\left(1+\frac{1}{y}z_x\right)+F_2'\cdot\left(\frac{xz_x-z}{x^2}\right)=0,$$
$$F_1'\cdot\left(\frac{yz_y-z}{y^2}\right)+F_2'\cdot\left(1+\frac{z_y}{x}\right)=0.$$

由此解得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x}\cdot\frac{zF_2'-x^2F_1'}{xF_1'+yF_2'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}\cdot\frac{zF_1'-y^2F_2'}{xF_1'+yF_2'}.$$

于是可得
$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$$
□

7.12.2　变量代换

前面出现的方程(7.12.1)、(7.12.2)都是从实际问题中提炼出来的偏微分方程. 还有其他许多实际问题都可以归结为一类含有二阶偏导数的偏微分方程. 求解这些方程时,往往需要作自变量的变量代换,使方程的形式变得比较简单,或者使方程由直角坐标系变到其他坐标系中表示,使其便于讨论.

例 7.12.4　平面拉普拉斯方程形如
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{7.12.3}$$

方程的连续解 $u=u(x,y)$ 称为**调和函数**. 当在圆形区域上求解这个方程时,常常将方程(7.12.3)化到极坐标系下讨论.

直角坐标系与极坐标系的变换公式为
$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

于是函数 $u=u(x,y)$ 变成 r、θ 的函数:
$$u=u(r\cos\theta,r\sin\theta)=u(r,\theta).$$

注意 $u=u(x,y)$ 是方程中的未知函数,为方便起见,我们把变换后的函数也写成 $u=u(r,\theta)$. 这并不是说它们有相同的函数关系,而只是表明 $u(r,\theta)$ 是由原来的 $u(x,y)$ 变来的. 下面我们来推导 $u(r,\theta)$ 应当满足的方程.

采用**直接法**. 这种方法是以 r、θ 作为自变量,而把 x、y 看作中间变量,来求原来函

数的偏导数与变换后函数的偏导数之间的关系.

一阶偏导数是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta).$$

二阶偏导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}&=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos\theta+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\sin\theta\\&=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\theta\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin\theta\right)\sin\theta\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\theta+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}&=-\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)r\sin\theta-r\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)r\cos\theta-r\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\\&=-r\sin\theta\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(-r\sin\theta)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(r\cos\theta)\right]-r\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)\\&=r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-r\frac{\partial u}{\partial r}.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

因此极坐标系下的平面拉普拉斯方程形如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

或

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0.$$ □

例 7.12.5　以 $u=\frac{y}{x}$，$v=y$ 作自变量，$w=yz-x$ 作函数，变换方程

$$xz_{xx}+2z_x=\frac{2}{y}.$$

解　我们采用所谓**反逆法**来做，即以 x、y 为自变量，而把 u、v 看作中间变量.

由题设知，$z=\frac{x}{y}+\frac{w}{y}$. 则

$$z_x=\frac{1}{y}+\frac{1}{y}(w_u u_x+w_v v_x)=\frac{1}{y}-\frac{1}{x^2}w_u,$$

$$z_{xx}=\frac{2}{x^3}w_u-\frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)w_{uu}=\frac{2}{x^3}w_u+\frac{y}{x^4}w_{uu}.$$

于是

$$xz_{xx}+2z_x=\frac{2}{x^2}w_u+\frac{y}{x^3}w_{uu}+\frac{2}{y}-\frac{2}{x^2}w_u=\frac{y}{x^3}w_{uu}+\frac{2}{y},$$

原方程变为 $\frac{y}{x^3}w_{uu}=0$，由 $x\neq0$，$y\neq0$，故得 $w_{uu}=0$. □

习　题　7.12

1. 直角坐标系与柱坐标系之间的变换式为$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$. 试将拉普拉斯方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$变换到柱坐标系下表示.

2. 作自变量变换$\xi=x+t, \eta=x-t$,变换弦振动方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

答案与提示

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0$.

总 习 题 (7)

1. 填空题:

(1) 已知$f(x+y, x-y)=xy+y^2$,则$f(x,y)=$______.

(2) 极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\sin y=$______.

(3) 函数$f(x,y)=\frac{1}{x^3y-xy^2+xy}$的间断点集为______.

(4) 函数$z=2x^2+y^2$在点(1,1)沿该点的梯度方向的方向导数为______.

(5) 设$f(x,y,z)=xy^2z^3$,其中$z=z(x,y)$是由方程$x^2+y^2+z^2=3xyz$所确定的函数,则$f_x(1,1,1)=$______.

(6) 设$y=y(x)$为由方程$f(x^2+y^2, xy)=0$确定的隐函数,其中$f(u,v)$为二元可微函数,则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$______.

(7) 函数$z=\arctan\frac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}$在点(1,0)处的梯度$\mathbf{grad}\, z\big|_{(1,0)}=$______.

(8) 由方程$xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$所确定的函数$z=z(x,y)$在点$(1,0,-1)$处的全微分$\mathrm{d}z=$______.

(9) 设a_0是常向量,$\lambda(t)$是数值函数,则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda(t)a_0)=$______,$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_0\cdot r(t))=$______.

2. 选择题(只有一个答案是正确的):

(1) 设函数$z_1=x+y, z_2=(\sqrt{x+y})^2, z_3=\sqrt{(x+y)^2}$,则(　　).

(A) z_1与z_2是相同的函数;　　(B) z_1与z_3是相同的函数;

(C) z_2与z_3是相同的函数;　　(D) 其中任何两个都不是相同的函数.

(2) 极限$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在是$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$连续的(　　).

(A) 必要条件；　　(B) 充分条件；

(C) 充分必要条件；　　(D) 既非必要条件又非充分条件.

(3) 函数 $z=\arcsin\dfrac{1}{x^2+y^2}+\ln(1-x^2-y^2)$ 的定义域为(　　).

(A) 空集；　　(B) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$；

(C) $\{(0,0)\}$；　　(D) $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$.

(4) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 及 $f_y(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的(　　).

(A) 充分而非必要条件；　　(B)必要而非充分条件；

(C) 充分必要条件；　　(D)既非充分又非必要条件.

(5) 设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 及 $f_y(x_0,y_0)$ 存在,则(　　).

(A) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 必连续；　　(B) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 必可微；

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 都存在；　　(D) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 存在.

(6) 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点(0,0)处(　　).

(A)连续,偏导数存在；　　(B)连续,偏导数不存在；

(C)不连续,偏导数存在；　　(D)不连续,偏导数不存在.

(7) 设 $z=f(x,y)$ 可微,且 $f(x,x^2)=\dfrac{1}{2}$, $f_x(x,y)\big|_{y=x^2}=\dfrac{1}{x}$,则 $f_y(x,y)\big|_{y=x^2}=$ (　　).

(A) $-\dfrac{1}{x^2}$；　　(B) $\dfrac{1}{x^2}$；　　(C) $\dfrac{1}{2x^2}$；　　(D) $-\dfrac{1}{2x^2}$.

(8) 设 $f(x,y)$ 是可微函数,且 $f(0,0)=0$, $f_x(0,0)=a$, $f_y(0,0)=b$. 令 $\varphi(t)=f(t,f(t,t))$,则 $\varphi'(0)=$ (　　).

(A) a；　　(B) $a+b(a+b)$；　　(C) $a+1$；　　(D) $\dfrac{a}{1-b}$.

(9) 设 $E=\{(x,y)\mid xy>0\}$,则 E 是 $\mathbb{R}^2$ 中的(　　).

(A)开集；　　(B)闭集；　　(C)区域；　　(D)有界集.

3. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{3-\sqrt{9+xy}}{xy}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$；　　(3) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

4. 研究下列函数的连续性：

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$　　(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$

5. 设 $z=f(x,y)$ 定义于点 $P_0(a,b)$ 的某邻域内,试总结下列诸性质之间的蕴涵关系,并对其中不可逆蕴涵者举反例说明.

(1) f 在 P_0 连续；　　(2) f 在 P_0 偏导数存在；

(3) f 在 P_0 可微；　　(4) f 的偏导数在 P_0 连续.

6. 由下列每一条件能否断定$f(x,y)$在(a,b)点有偏导数$f_x(a,b)$?

(1) $f(x,y)$在点(a,b)沿x轴正向和负向的方向导数存在且相等.

(2) $f(x,y)$在点(a,b)沿任何方向的方向导数存在.

7. 设$z=f(x,y)$满足方程$x-az=\varphi(y-bz)$,其中φ可微,a、b为常数.求证:$a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

8. 证明函数$u=x^kF\left(\dfrac{z}{x},\dfrac{y}{x}\right)$满足方程$x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=ku$,$k$为常数.

9. 设$u=yf\left(\dfrac{x}{y}\right)+xg\left(\dfrac{y}{x}\right)$,其中$f$,$g$具有二阶连续偏导数,求$x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

10. 设$w=F(x,y,z)$,$z=f(x,y)$,$y=\varphi(x)$,求$\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$.

11. 设函数$f(u)$具有二阶连续导数,而$z=f(\mathrm{e}^x\sin y)$满足方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{2x}z$,求$f(u)$.

12. 设函数$u=f(x,y,z)$有连续偏导数,$y=y(x)$和$z=z(x)$分别由方程$\mathrm{e}^{xy}=y$和$\mathrm{e}^z=xz$确定,求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

13. 求由方程组$\begin{cases}x=u\cos v,\\ y=u\sin v,\\ z=v\end{cases}$所确定的函数$z=z(x,y)$的所有二阶偏导数.

14. 设$u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$,$l$与向量$\{2,1,-1\}$同向,求$\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,1)}$.

15. 求$u=xy+yz^3$在点$M(2,-1,1)$处的梯度和在向量$l=\{2,2,-1\}$方向的方向导数.

16. 设$f(\xi,\eta)$具有连续的二阶偏导数,且满足拉普拉斯方程$\dfrac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}=0$.证明:函数$z=f(x^2-y^2,2xy)$也满足拉普拉斯方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

17. 填空题:

(1) 函数$z=x^3+y^3-3xy$的极小值为______.

(2) $(0,0)$点是函数$z=x^2-4xy+5y^2-1$的极______点.

(3) 函数$z=xy$在条件$x+y=1$下的极大值为______.

(4) 在椭圆抛物面$\dfrac{z}{c}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$,$z\leqslant c$的一段中,嵌入有最大体积的直角平行六面体,则该六面体的尺寸长=______,宽=______,高=______.

(5) 函数$z=3x^2+3y^2-x^3$在闭区域D:$x^2+y^2\leqslant 16$上的最小值是______.

(6) 当$a>0$时,曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4a^2,\\ x^2+y^2=2ax\end{cases}$在点$M(a,a,\sqrt{2}a)$处的切线方程为______,法平面方程为______.

(7) 设F为可微函数,a,b,c为非零常数,则由方程$F(cx-az,cy-bz)=0$给出的曲面S上任一点处的法向量为$n=$________.

(8) 椭球面$2x^2+3y^2+z^2=6$在点$P(1,1,1)$处的切平面方程为______,法线方程为______.

18. 选择题(正确的答案只有一个):

(1) 设$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内具有直到二阶的连续偏导数,则$f(x_0,y_0)$为函数的极大值的充分条件是(　　).

(A) $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$;

(B) $[f_{xy}(x_0,y_0)]^2-f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)<0$;

(C) $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0,[f_{xy}(x_0,y_0)]^2-f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)<0,f_{xx}(x_0,y_0)>0$;

(D) $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0,[f_{xy}(x_0,y_0)]^2-f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)<0,f_{xx}(x_0,y_0)<0$.

(2) 已知矩形的周长是$2p$,将它绕其一边旋转而形成一个旋转体,当此旋转体的体积为最大时,矩形两边的长分别为(　　).

(A) $\frac{p}{3},\frac{2p}{3}$;　(B) $\frac{p}{2},\frac{p}{2}$;　(C) $\frac{p}{4},\frac{3p}{4}$;　(D) $\frac{2p}{5},\frac{3p}{5}$.

(3) 设$z=f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$,由$f_x(x,y)=0$及$f_y(x,y)=0$求得临界点$M_0(0,0)$,$M_1(1,1)$及$M_2(-1,1)$,则(　　).

(A) $f(M_0)$是极大值;　(B) $f(M_1)$与$f(M_2)$都是极大值;

(C) $f(M_0)$是极小值;　(D) $f(M_1)$与$f(M_2)$都是极小值.

(4) 平面$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$和柱面$x^2+y^2=1$的交线上与$xOy$平面距离最短的点的坐标为(　　).

(A) $(\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{35}{12})$;　(B) $(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12})$;

(C) $(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5},\frac{85}{12})$;　(D) $(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5},\frac{85}{12})$.

(5) 抛物线$y^2=4x$上与直线$x-y+4=0$相距最近的点是(　　).

(A) $(0,0)$;　(B) $(1,1)$;　(C) $(1,2)$;　(D) $(2,2\sqrt{2})$.

(6) 曲线$C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$在点$(1,-2,1)$的切线一定平行于(　　).

(A) xOy平面;　(B) yOz平面;　(C) zOx平面;　(D) 平面$x+y+z=0$.

(7) 在曲线$x=t,y=-t^2,z=t^3$的所有切线中,与平面$x+2y+z=4$平行的切线(　　).

(A) 只有1条;　(B) 只有2条;　(C) 至少有3条;　(D) 不存在.

(8) 已知曲面$z=4-x^2-y^2$上点P处的切平面平行于平面$2x+2y+z-1=0$,则点P的坐标是(　　).

(A) $(1,-1,2)$;　(B) $(-1,1,2)$;　(C) $(1,1,2)$;　(D) $(-1,-1,2)$.

(9) 曲面$3x^2+y^2+z^2=12$上点$M(-1,0,3)$处的切平面与平面$z=0$的夹角是(　　).

(A) $\frac{\pi}{6}$;　(B) $\frac{\pi}{4}$;　(C) $\frac{\pi}{3}$;　(D) $\frac{\pi}{2}$.

(10) 曲线$C:x=ae^t\sin t,y=ae^t\cos t,z=ae^t$上任意一点处的切线与(　　).

(A) Oz轴形成定角;　(B) Ox轴形成定角;

(C) Oy轴形成定角;　(D) 锥面$x^2+y^2=z^2$的各母线夹角相同.

19. 求下列函数的极值:

(1) $z=3axy-x^3-y^3(a>0)$;　(2) $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)\quad(0\leqslant x,y\leqslant\frac{\pi}{2})$.

20. 求由下列方程所确定的隐函数$z=z(x,y)$的极值:

(1) $z^2+xyz-x^2-xy^2-9=0$;　(2) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$.

21. 生物学家发现,某种植物的生长率是温室内的温度和湿度的函数.根据大量的实验数据,生物学家认为,若温室内的温度为x,湿度为y(百分比),则植物的生长率$g(x,y)$由以下式子给出:

$$g(x,y)=-2x^2+196x-3y^2+242y+2xy-16360,$$

其中$75\leqslant x\leqslant 85$,$50\leqslant y\leqslant 75$.试求使得植物保持最大生长率的温度和湿度,并求此最大生长率.

22. 设有四个正数x,y,z,t,它们的积保持为常数,即$xyzt=c^4$.证明:当$x=y=z=t=c$时,它们的和$u=x+y+z+t$取最小值.

23. 求曲线$\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ y=\dfrac{1}{x} \end{cases}$上到$xOy$平面距离最近的点.

24. 求a,b的值,使得包含圆$(x-1)^2+y^2=1$在其内部的椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0,a\neq b)$有最小的面积.

25. 求函数$z=\dfrac{1}{2}(x^n+y^n)$在条件$x+y=l(l>0,n\geqslant 1)$之下的极值,并证明:当$a\geqslant 0,b\geqslant 0,n\geqslant 1$时,

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\leqslant\frac{a^n+b^n}{2}.$$

26. 设x,y,z为实数,且$e^x+y^2+|z|=3$.求证:$e^xy^2|z|\leqslant 1$.

27. 当$x>0,y>0,z>0$时,求$u(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z$在球面$x^2+y^2+z^2=5R^2$上的最大值,并证明当$a>0,b>0,c>0$时,有$abc^3\leqslant 27\left(\dfrac{a+b+c}{5}\right)^5$.

28. 证明:圆柱螺旋线$x=a\cos t,y=a\sin t,z=bt$的切线与z轴的夹角为常数.

29. 在球面$x^2+y^2+z^2=R^2$上求一条曲线,使其上每一点的法线与平面$2x+3y+6z-1=0$的夹角为$30°$.

30. 证明:函数$F(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的梯度向量是函数$F(x,y,z)$在点P_0的等位面的法向量.

31. 求曲面$x^2+2y^2+3z^2=21$的平行于平面$x+4y+6z=0$的各切平面.

32. 求椭球面$x^2+2y^2+3z^2=21$上某处的切平面π,使平面π过已知直线$L:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{2z-1}{-2}$.

33. 设n是曲面$2x^2+3y^2+z^2=6$在点$P(1,1,1)$处的指向外侧的法向量,求函数$u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$在$P$处沿方向$n$的方向导数.

34. 给定曲面$F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$($a,b,c$为常数),或由它确定的曲面$z=z(x,y)$,证明曲面的切平面通过一个定点.

答案与提示

1. (1) $\dfrac{1}{2}(x^2-xy)$; (2) 0; (3) $\{(x,y)|x=0$或$y=0$或$y=x^2+1\}$; (4) $2\sqrt{5}$;
   (5) -2; (6)$\dfrac{-2xf_1'-yf_2'}{2yf_1'+xf_2'}$; (7) $i+j$; (8) $dx-\sqrt{2}dy$; (9)$\lambda'(t)a_0,a_0\cdot r'(t)$.

2. (1) (D); (2) (A); (3) (A); (4) (D); (5) (C); (6) (C); (7) (D); (8) (B); (9) (A).

3. (1) $-\dfrac{1}{6}$; (2) 0; (3) 0.

4. (1) f在$(0,0)$点间断,在其他点连续; (2) f处处连续;
   (3) x轴上除原点外的任一点$(x_0,0)$均为f的间断点,在其他点处f连续.

5. (3)⇒(1),(3)⇒(2),(4)⇒(3).

6. (1) 不能断定,考虑$f(x,y)=|x|+|y|$在(0,0)点;

(2) 不能断定,考虑$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$在(0,0)点.

9. 0.

10. $F_x+F_y\varphi'(x)+F_z(f_x+f_y\varphi'(x))$.

11. $f(u)=C_1\mathrm{e}^u+C_2\mathrm{e}^{-u}$,$C_1$与$C_2$为任意常数.

12. $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_x+\frac{y^2}{1-xy}f_y+\frac{z}{xz-x}f_z$.

13. $z_{xx}=\frac{\sin 2v}{u^2}$,$z_{yy}=-\frac{\sin 2v}{u^2}$,$z_{xy}=-\frac{\cos 2v}{u^2}$.

14. $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

15. $-\frac{1}{3}$.

17. (1) -1; (2) 小; (3) $\frac{1}{4}$; (4) $\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}$; (5) -16;

(6) 切线:$\frac{x-a}{-4\sqrt{2}a}=\frac{z-\sqrt{2}a}{3a^2}$,$y=0$,法平面:$z-\sqrt{2}=0$;

(7) $\{cF_1',cF_2',-(aF_1'+bF_2')\}$; (8) 切平面:$2x+3y+z-6=0$,法线:$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=z-1$.

18. (1) (D); (2) (A); (3) (D); (4) (B); (5) (C); (6) (C); (7) (B); (8) (C); (9) (B); (10) (A).

19. (1) 极大值a^3; (2) 极大值$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

20. (1) 极小值$2\sqrt{2}$,极大值$-2\sqrt{2}$; (2) 极小值-2,极大值8.

21. $x=83$,$y=68$时,$g_{\max}=2$(英寸/周).

23. $P_1(1,1,2)$,$P_2(-1,-1,2)$.

24. $a=\frac{3}{\sqrt{2}}$,$b=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

25. 考虑$z=\frac{1}{2}(x^n+y^n)$在条件$x+y=l(n>1)$下的最小值问题.

26. 求$f(x,y)=\mathrm{e}^z y^2(3-\mathrm{e}^z-y^2)$在$\mathrm{e}^z+y^2\leqslant 3$上的最大值.

27. 利用拉格朗日乘数法.

28. $\cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

29. $x^2+y^2+z^2=R^2$,$2x+3y+6z=\frac{7}{2}R$.

31. $x+4y+6z=\pm 21$.

32. $x+2z=7$及$x+4y+6z=21$.

33. $\frac{11}{7}$.

第 8 章　重　积　分

在前面,我们将一元函数微分学推广到多元函数的情形. 现在,我们将一元函数的积分学也推广到多元函数的情形. 本章将讨论二元函数 $f(x,y)$ 在某个平面区域 D 上的积分,以及三元函数 $f(x,y,z)$ 在某个空间区域 Ω 上的积分,即二重积分与三重积分的概念和计算方法.

8.1　二重积分的概念

在讨论一元函数的定积分概念时,我们是从求曲边梯形的面积这个问题开始的. 现在,对于二元函数 $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$, D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭区域,下面考虑如何求曲顶柱体的体积的问题.

8.1.1　曲顶柱体的体积

所谓曲顶柱体,是指以 xOy 平面上的闭区域 D 为底,其侧面是以 D 的边界曲线为准线、以平行于 z 轴的直线为母线的柱面,而它的顶则是曲面 $z=f(x,y)$(见图8.1). 这里假设函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续,且 $f(x,y)\geqslant 0$. 这样一个曲顶柱体的体积怎样求呢?

我们知道,平顶柱体的高是不变的,它的体积可由下列公式给出:

$$\text{体积} = \text{高} \times \text{底面积}$$

但是曲顶柱体的高 $z=f(x,y)$ 是变化的,所以它的体积不能用上述公式来计算. 回忆一下在曲边梯形的面积问题中,我们采用了这样的途径解决困难:先在局部上“以直代曲”,得到曲边梯形面积的近似值;然后通过取极限,由近似值得到精确值. 现在我们也采用这种思想方法来求曲顶柱体的体积.

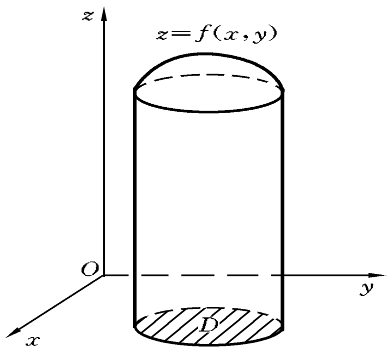


图8.1

首先将闭区域 D 分割成 n 个小区域,记为

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n.$$

同时用这些记号表示小区域的面积. 以小区域 $\Delta\sigma_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的边界曲线为准线、以平行于 z 轴的直线为母线作柱面,就可把给定的曲顶柱体分割成 n 个细长的小曲顶柱体. 由于曲顶的高度 $z=f(x,y)$ 是连续变化的,故当小区域 $\Delta\sigma_i$ 充分小时,小区域内各点处高度的变化也很小. 这样可以在 $\Delta\sigma_i$ 中任意取一点 (ξ_i,η_i),以这点处的高度 $f(\xi_i,\eta_i)$ 作一个以 $\Delta\sigma_i$ 为底的小平顶柱体. 这个小平顶柱体的体积就是该小曲顶柱体

的体积的近似值(见图8.2),于是,就可用n个细长的平顶柱体体积的总和,近似地代替曲顶柱体的体积V,即

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

很显然,当小区域$\Delta\sigma_i$的图形越来越小时,上式的近似程度越高,为了刻划$\Delta\sigma_i$的图形越来越小这件事,引进闭区域的直径的概念.一个闭区域的直径是指该区域上任意两点间距离的最大者,如小区域$\Delta\sigma_i$的直径就是

$$d_i = \max_{P,Q \in \Delta\sigma_i} \| P - Q \|.$$

当$d_i \to 0$时,不仅$\Delta\sigma_i$的面积趋于零,而且小区域$\Delta\sigma_i$收缩成一点,令

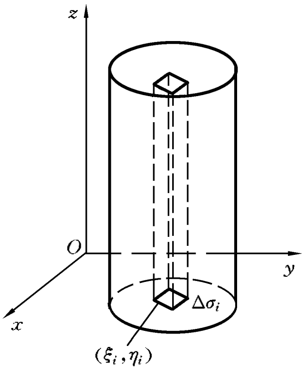


图8.2

$$\lambda = \max_{1 \le i \le n} \{d_i\},$$

则通过对$\lambda \to 0$取极限,就可得到曲顶柱体体积V的精确值:

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

8.1.2 平面区域内昆虫群体的总量

假设平面闭区域D内分布有某种昆虫,昆虫群体的密度为$f(x,y)$.求D内昆虫的总量.假定密度函数在D上连续,取正值.

如果昆虫的群体密度是常数(即均匀分布),那么昆虫的总量可以用公式

总量 = 密度 × 面积

来计算.现在密度不是常数,而是变化的.我们把区域D任意分成n个小区域$\Delta\sigma_i$($i=1,2,\cdots,n$),并且$\Delta\sigma_i$也表示小区域的面积.在每个$\Delta\sigma_i$上任取一点(ξ_i,η_i),并用这点的密度$f(\xi_i,\eta_i)$来代替小区域$\Delta\sigma_i$上各点的密度,换句话说,可以认为$\Delta\sigma_i$上的昆虫分布近似于均匀分布.这样就得到了昆虫总量M的近似值:

$$M \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

设λ如前所述,则区域D上昆虫总量的精确值为

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

我们看到,上面两个问题的实际意义是完全不同的,但解决问题的思路是相同的,并且最后表达曲顶柱体的体积、昆虫总量的数学表达式也极其相似,即都是求某个和式的极限.因此,可以从这类问题抽象出它们共同的数学本质,得到二重积分的概念.

8.1.3 二重积分的定义

设D是$\mathbf{R}^2$中的有界闭区域,函数$f(x,y)$在D上定义.把D任意分割成n个小区域$\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$,且$\Delta\sigma_i$也表示小区域的面积.在每个小区域$\Delta\sigma_i$上任取一点$(\xi_i,\eta_i)(i=1,2,\cdots,n)$,若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

存在,则称极限值为函数$f(x,y)$在闭区域D上的**二重积分**(其中λ表示$\Delta\sigma_i$的直径d_i中的最大者),记作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

称$f(x,y)$为**被积函数**,称D为**积分区域**,x、y称为**积分变量**,$\mathrm{d}\sigma$称为**面积元素**,$f(x,y)\mathrm{d}\sigma$称为**被积表达式**,$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$称为**积分和**(或**黎曼和**).这时我们说$f(x,y)$在D上是**可积的**.

在上面的定义中,对闭区域D的分割是任意的.在直角坐标系下,如果用平行于坐标轴的直线网来划分D,那么除了包含边界点的一些小闭区域外,其余的小闭区域都是矩形闭区域(见图8.3).设矩形闭区域$\Delta\sigma_i$的边长为Δx_i和Δy_i,则

$$\Delta\sigma_i=\Delta x_i\Delta y_i.$$

因此,在直角坐标系中,有时也把面积元素$\mathrm{d}\sigma$记作$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,而二重积分记为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$称为直角坐标系中的面积元素.

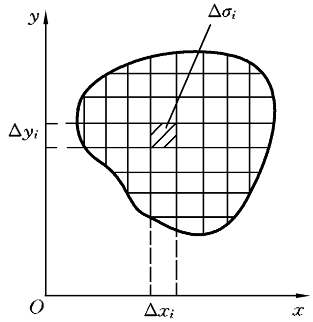


图8.3

在这里不加证明地指出以下两点.

(1) 若函数$f(x,y)$在闭区域D上连续,则$f(x,y)$在D上是可积的.

(2) 若$f(x,y)$在闭区域D上除去有限条线及有限个点外连续,并在D上有界,则$f(x,y)$在D上也是可积的.

8.1.4 二重积分的性质

设$f(x,y)$和$g(x,y)$是闭区域D上的可积函数,则有以下性质成立.

(1) $\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma=k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ (k为常数).

(2) $\iint\limits_D [f(x,y) \pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$

(3) 设$D = D_1 \cup D_2$,且D_1与D_2除边界外无公共点(见图8.4),则二重积分具有**可加性**:

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(4) 若在D上有$f(x,y) \leqslant g(x,y)$,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

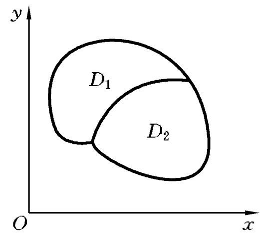


图8.4

(5) 设M、m分别是连续函数在闭区域D上的最大值和最小值,σ是D的面积,则有

$$m\sigma \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant M\sigma. \tag{8.1.1}$$

这个性质可由性质(4)推得.

(6) (**二重积分的中值定理**) 设$f(x,y)$在闭区域D上连续,σ是D的面积,则在D上至少存在一点(ξ,η),使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta) \cdot \sigma. \tag{8.1.2}$$

下面只证明性质(6).

证 将性质(5)中的不等式(8.1.1)各除以σ,得

$$m \leqslant \frac{1}{\sigma}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant M.$$

根据连续函数的介值定理(参见第7章7.2.3的定理7.2.2),在D上必存在一点(ξ,η),使得

$$\frac{1}{\sigma}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta),$$

即公式(8.1.2)成立. □

这个性质表明,当曲顶柱体竖坐标连续变化时,曲顶柱体的体积等于以某一竖坐标为高的同底平顶柱体的体积.$f(\xi,\eta)$称为$f(x,y)$在D上的平均高度.

习 题 8.1

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 什么叫曲顶柱体?它的体积怎样求?

(2) 二重积分的概念是怎样的?

(3) 二重积分有哪些重要性质?

2. 设有一平面薄片,它占有 xOy 平面上的闭区域 D,在 D 上的每点 (x,y) 处的面密度为 $\rho(x,y)$,其中 $\rho(x,y)$ 是 D 上的连续正值函数,试利用本节所介绍的求曲顶柱体体积的思想及方法,求这块平面薄片的质量.

3. 试对下列二重积分给出几何上或物理上的一种解释:设 D 是平面闭区域,

(1) $\iint\limits_D 1\mathrm{d}\sigma$;　　(2) $\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$, $\rho(x,y)$ 为密度;

(3) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, $f(x,y)$ 为曲面上点的竖坐标.

4. 根据二重积分的几何意义,说明下列积分值是大于零,还是小于零,还是等于零:

(1) $\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\|y|\leqslant 1}}(1+x)\mathrm{d}\sigma$;　　(2) $\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\|y|\leqslant 1}}(x-1)\mathrm{d}\sigma$;　　(3) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} x\mathrm{d}\sigma$;

(4) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} x^2\mathrm{d}\sigma$;　　(5) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} xy\mathrm{d}\sigma$;　　(6) $\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} y\mathrm{d}\sigma$.

(B)

1. 设 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续,证明:$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$.

2. 根据二重积分的性质,比较下列积分的大小:

(1) $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是矩形闭区域;$3\leqslant x\leqslant 5, 0\leqslant y\leqslant 1$.

答案与提示

(A)

3. (1) 平面区域 D 的面积;　(2) 平面薄片 D 的质量;

(3) 曲顶柱体的体积,曲顶是曲面 $z=f(x,y)$,底是平面区域 D.

4. (1) 大于零;　(2) 小于零;　(3) 等于零;　(4) 大于零;　(5) 等于零;　(6) 大于零.

(B)

2. (1) $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$;　　(2) $\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma<\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$.

8.2 二重积分的计算

要想从定义出发来计算二重积分是非常困难的. 本节将给出一种计算方法,它将把二重积分化为依次运算的两个定积分.

8.2.1 矩形区域上的二重积分

首先考虑一种较简单的情形. 即积分区域 D 是矩形区域:

$$D = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\} \equiv [a,b;c,d].$$

设函数$z=f(x,y)$在D上连续、非负. 由二重积分的几何意义知,以曲面$z=f(x,y)$为顶、以矩形D为底的曲顶柱体的体积为

$$V = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma. \tag{8.2.1}$$

另一方面,令$A(x)$表示用垂直于x轴的平面去截曲顶柱体所得的截面面积(见图8.5). 根据第4章4.8节中的由已知平面截面面积求体积的公式,V又可通过公式

$$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x \tag{8.2.2}$$

来计算. 而面积$A(x)$又可表示为下列定积分:

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y. \tag{8.2.3}$$

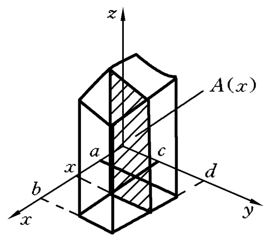


图8.5

注意,在(8.2.3)式的积分中,x始终是固定的. 这样一来,由(8.2.1)、(8.2.2)、(8.2.3)式即可得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x = \int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x. \tag{8.2.4}$$

当然,也可以用垂直于y轴的平面去截这个曲顶柱体,同样可得到以下的公式:

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y. \tag{8.2.5}$$

称$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$和$\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$为**二次积分**(或**累次积分**). 通常把方括号去掉而把二次积分写成

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x. \tag{8.2.6}$$

请注意,公式(8.2.6)对可积函数$f(x,y)$也成立.

例8.2.1　求$\iint_D (x+y^2)\mathrm{d}\sigma$,其中$D=[0,1;0,3]$.

解　利用公式(8.2.4),有

$$\iint_D (x+y^2)\mathrm{d}\sigma = \int_0^1\left[\int_0^3 (x+y^2)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_0^1\left(xy+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^3\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (3x+9)\mathrm{d}x = \left(\frac{3}{2}x^2+9x\right)\Big|_0^1 = \frac{21}{2}. \qquad \square$$

8.2.2　一般区域上的二重积分

下面考察两类简单的非矩形区域的情形.

(1) x-型区域

若闭区域D 可用不等式

$$\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$$

表示,则称D 为x-**型区域**(见图8.6).

设函数$f(x,y)$在D 上连续,则有以下的公式成立:

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y. \tag{8.2.7}$$

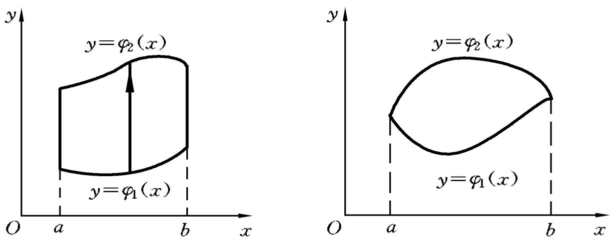


图8.6

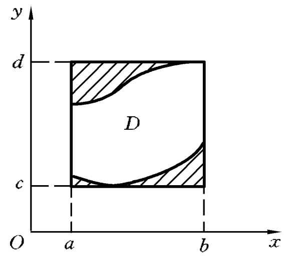


图8.7

公式(8.2.7)推导如下:取闭矩形$R=[a,b;c,d]$,使得$D\subset R$(见图8.7),作辅助函数

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\in R-D. \end{cases}$$

则$F(x,y)$是矩形区域R 上的可积函数,故由公式(8.2.6),有

$$\iint_R F(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d F(x,y)\mathrm{d}y.$$

而
$$\begin{aligned} \int_c^d F(x,y)\mathrm{d}y &= \int_c^{\varphi_1(x)} F(x,y)\mathrm{d}y + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x,y)\mathrm{d}y + \int_{\varphi_2(x)}^d F(x,y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

又
$$\iint_R F(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

故得
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(2) y-**型区域**

当闭区域D 可用不等式

$$\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), \quad c \leqslant y \leqslant d$$

表示时,称D 为y-**型区域**(见图8.8).与公式(8.2.7)类似,这时有公式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x. \tag{8.2.8}$$

当函数$f(x,y)$是可积函数,且在区域D 内有一些间断线和间断点时,上面化二

次积分的公式仍然成立,不再作详细的讨论.

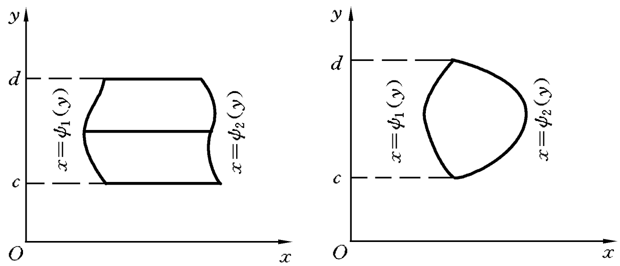


图8.8

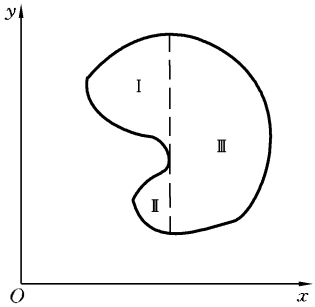


图8.9

若D 不是上述两类简单区域,可以用平行于坐标轴的直线将D 划分为几个x-型区域或y-型区域(见图8.9).

现在进一步分析x-型区域和y-型区域的特点.先看x-型区域,其特点是,上、下边为两条曲线,左、右边为两直线段(两者都可退化成一点).作一条平行于y 轴的直线L,则L 与D 的上、下边界各有一个交点,下面的交点叫做穿入点,上面的交点叫穿出点.所有穿入点构成穿入边,所有穿出点构成穿出边.在公式(8.2.7)中,先对y 求内层积分,就是从穿入边$y=\varphi(x)$积到穿出边$y=\varphi(x)$;再对x 求外层积分,就是从最左点$x=a$ 积到最右点$x=b$(参看图8.6).

对于y-型区域,其特点是,左、右边为两条曲线,上、下边为直线段(两者都可能退化成一点).作平行于x 轴的直线L,则L 与D 的左边界的交点构成穿入边,与D 的右边界的交点构成穿出边.因而在公式(8.2.8)中,先对x 的内层积分,是从穿入边$x=\psi_1(y)$积到穿出边$x=\psi_2(y)$,而对y 的外层积分则是从最下点$y=c$ 积到最上点$y=d$(参看图8.8).

认清上述几何特征有助于迅速地把一个二重积分化为二次积分来计算.

例8.2.2 求$I=\iint\limits_D \frac{1}{2}(2-x-y)\mathrm{d}\sigma$,其中$D$ 由直线$y=x$ 与抛物线$y=x^2$ 围成.

解 首先画出积分区域D 的草图(见图8.10).经过观察发现,D 既可看作x-型区域,又可看作y-型区域.如果看作x-型区域,就画一条平行于y 轴的直线L 穿过区域D,找出穿入边为$y=x^2$,穿出边为$y=x$.而D 的最左点对应于$x=0$,最右点对应于$x=1$.因此,I 可化为下列二次积分计算:

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\frac{1}{2}(2-x-y)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(y-\frac{xy}{2}-\frac{y^2}{4}\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left(x-\frac{7}{4}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^4\right)\mathrm{d}x=\frac{11}{120}.$$

若把D 看作y-型区域.则积分化为

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}(2-x-y)\mathrm{d}x=\frac{11}{120}.$$ □

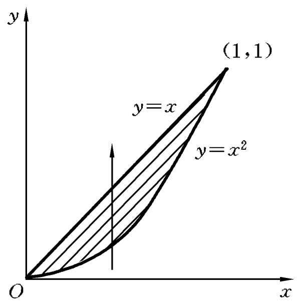


图8.10

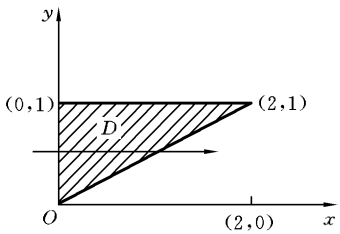


图8.11

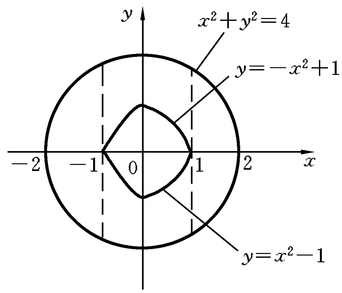


图8.12

例8.2.3　设有一块三角形的平面薄片(见图8.11),其面密度为$\rho(x,y)=e^{y^2}$,求它的质量

$$M=\iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

解　D 可以表示为

$$0\leqslant x\leqslant 2,\quad \frac{x}{2}\leqslant y\leqslant 1.$$

即为x-型区域,因此

$$M=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{x/2}^1 e^{y^2}\mathrm{d}y.$$

遗憾的是微积分基本定理在这里不能用,因为e^{y^2}是积不出来的. 所以必须换一个次序来积分. 把D 看作y-型区域:

$$D:0\leqslant y\leqslant 1,\quad 0\leqslant x\leqslant 2y.$$

则　$$M=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{2y} e^{y^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 (xe^{y^2})\Big|_{x=0}^{x=2y}\mathrm{d}y=\int_0^1 e^{y^2}2y\mathrm{d}y=e^{y^2}\Big|_0^1=e-1.$$ □

由此可见,合理地安排二次积分的积分次序是十分重要的. 安排得不好,不仅会使计算更加麻烦,而且有时根本就算不出来.

例8.2.4　设D 是由$x^2+y^2=4$与$y=-x^2+1$,$y=x^2-1$($|x|\leqslant 1$)所围成的区域,计算二重积分

$$I=\iint_D (x^2+y)\mathrm{d}\sigma.$$

解　首先画出区域D 的草图(见图8.12). 然后作平行于y 轴的直线L,L 与D 的边界的交点,有的地方是四个,有的地方是两个,因此D 不是简单区域,为此,用直线$x=-1$,$x=1$将D 分成四个简单区域(见图8.12):

$$D_1:\ 1\leqslant x\leqslant 2,\ -\sqrt{4-x^2}\leqslant y\leqslant \sqrt{4-x^2};$$

$$D_2: -2 \leqslant x \leqslant -1, -\sqrt{4-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2};$$

$$D_3: -1 \leqslant x \leqslant 1, -\sqrt{4-x^2} \leqslant y \leqslant x^2-1;$$

$$D_4: -1 \leqslant x \leqslant 1, -x^2+1 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}.$$

于是有
$$\iint_D (x^2+y)\mathrm{d}\sigma = \sum_{i=1}^{4}\iint_{D_i}(x^2+y)\mathrm{d}\sigma.$$

这样就可以逐步计算出来. 但这个做法不是太好. 由于被积函数和积分区域具有对称性,可以利用对称性将积分先化简,然后再进行计算.

因D 关于x 轴对称,即当$(x,y)\in D$ 时, 同时必有$(x,-y)\in D$,而被积函数当y 换成$-y$ 时,相差一个符号,故积分

$$\iint_D y\mathrm{d}\sigma = 0.$$

又D 关于x 轴、y 轴对称,被积函数x^2,将x 换成$-x$,y 换成$-y$ 时,被积函数形式保持不变,故积分可化为D 在第一象限部分区域上的积分. 令

$$D^* = \{(x,y) | (x,y)\in D, x \geqslant 0, y \geqslant 0\},$$

则

$$I = \iint_D (x^2+y)\mathrm{d}\sigma = 4\iint_{D^*} x^2\mathrm{d}\sigma = 4\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x^2}^{\sqrt{4-x^2}} x^2\mathrm{d}y + 4\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2\mathrm{d}y$$

$$= 4\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2\mathrm{d}y - 4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x^2} x^2\mathrm{d}y = 4\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x - 4\int_0^1 x^2(1-x^2)\mathrm{d}x$$

$$= 64\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t - 4\int_0^1 x^2(1-x^2)\mathrm{d}x = 4\pi - \frac{8}{15}. \qquad \square$$

8.2.3 利用极坐标计算二重积分

回忆一下,在定积分的计算中,主要的困难来自被积函数,而我们克服困难的一个重要方法就是变量代换——换元法,这种方法可以化简被积函数,从而较方便地求出定积分. 在计算二重积分时,困难就来自两个方面. 一方面是被积函数,另一方面就是积分区域是多种形状的. 克服这些困难的思路仍然是作适当的变换. 当积分区域的边界由圆弧段及射线组成时,用极坐标变换往往可将区域化简.

考察二重积分

$$I = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

其中D 由射线$\theta=\alpha$,$\theta=\beta$ 及方程$r=r_1(\theta)$、$r=r_2(\theta)$所表示的曲线围成(见图8.13(a)). 采用微元法进行分析.

首先. 用以极点为中心的一族同心圆($r=$ 常数)和自极点出发的一族射线($\theta=$ 常

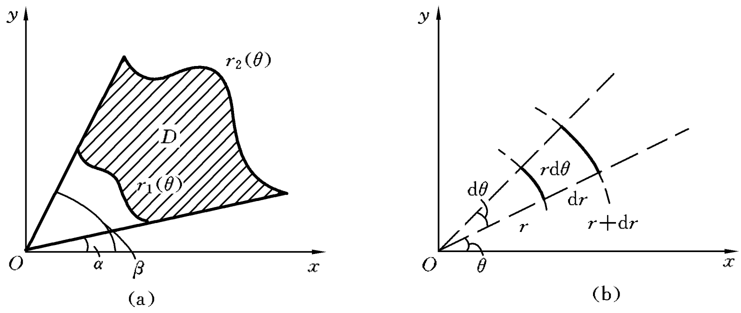


图8.13

数)把区域D 分割成若干个小区域.然后取出其中一个小区域$\Delta\sigma$作代表.$\Delta\sigma$由半径为r 和$r+\mathrm{d}r$ 的圆弧段、极角为θ和$\theta+\mathrm{d}\theta$的射线段所围成(见图8.13(b)).在这里,把曲的圆弧段近似地看作直线段,把相交的射线段近似地看作平行的射线段,所以小区域$\Delta\sigma$的面积的主要部分,等于以$r\mathrm{d}\theta$为长、以$\mathrm{d}r$为宽的小矩形面积,即

$$\Delta\sigma\approx\mathrm{d}\sigma=r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r(\textbf{面积微元}).$$

因而在极坐标变换

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

之下,有

$$f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r,$$

从而有

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r.$$

由于在直角坐标系中,$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$常写作$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,因此上式又写作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.\qquad(8.2.9)$$

简单地归纳一下上述的步骤.把二重积分$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$化为极坐标系下的二重积分时,

① 把$f(x,y)$中的x和y分别换成$r\cos\theta$和$r\sin\theta$,把$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$换成$r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$;

② 用极坐标刻划积分区域D:

或者　　$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\quad r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta)$,

或者　　$a\leqslant r\leqslant b,\quad \theta_1(r)\leqslant\theta\leqslant\theta_2(r)$;

③ 计算

$$\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\quad\text{或}\quad\int_a^b\mathrm{d}r\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta.$$

例8.2.5　设D 为圆域:$x^2+y^2\leqslant a^2$,计算积分$I=\iint_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　由极坐标变换得

$$I=\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\0\leqslant r\leqslant a}}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]\Bigg|_0^{a}\mathrm{d}\theta=\pi(1-\mathrm{e}^{-a^2}).\qquad\square$$

我们知道,在直角坐标系下,积分$\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 不能用初等函数表示,因此是积不出来的. 而用极坐标时,面积元素 $r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$ 中的因子 r 帮了很大的忙,使被积函数变成了 $\mathrm{e}^{-r^2}\cdot r$ 的形式,从而可以算出积分来. 可见不同的坐标系各有其不同的用处.

例 8.2.6　求 $I=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中D 是由曲线$(x-a)^2+y^2=a^2(y>0)$,$(x-2a)^2+y^2=4a^2(y>0)$和直线$y=x$ 围成的区域.

解　画出D 的图形(见图8.14). 在极坐标系下,D 的边界曲线的方程为

$$r=2a\cos\theta,\quad r=4a\cos\theta,\quad \theta=\frac{\pi}{4}.$$

于是有

$$I=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}r\cdot r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2a\cos\theta}^{4a\cos\theta}r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(r^3\Big|_{2a\cos\theta}^{4a\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{56}{3}a^3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{112-70\sqrt{2}}{9}a^3.\qquad\square$$

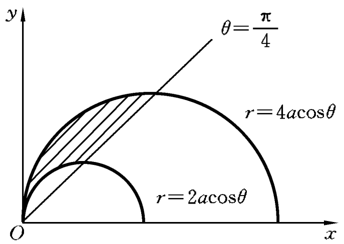


图8.14

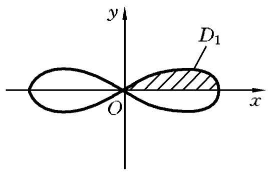


图8.15

例 8.2.7　求双纽线$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$所围区域$D$ 的面积.

解　在极坐标系下,双纽线的方程为

$$r^2=2a^2\cos 2\theta.$$

画出D 的图形(见图8.15),利用对称性,只须考虑区域

$$D_1:0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},\quad 0\leqslant r\leqslant a\sqrt{2\cos 2\theta}.$$

$$D\text{ 的面积}=4\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}}r\mathrm{d}r=4\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}r^2\Big|_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}}\mathrm{d}r$$

$$=2\int_0^{\pi/4}2a^2\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=2a^2.\qquad\square$$

8.2.4　二重积分的一般换元法

现在我们考虑一般的换元法,设函数

$$x = x(u,v),\quad y = y(u,v) \tag{8.2.10}$$

在uv平面的某区域D'内具有对u,v的连续偏导数,当(u,v)在D'上变动时,对应于xy平面上的点(x,y)在区域D上变动. 又设(8.2.10)式给出了区域D和D'之间的一一对应,并且在D'上雅可比行列式

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0.$$

把区域D'划分成若干个小矩形,其中的一个代表记作D_i',它的两边长分别为Δu和Δv,左下角顶点的坐标为(u,v)(见图8.16). xy平面内对应的有一个曲边四边形D_i,如果选取$\Delta u,\Delta v$充分地小,那么通过局部线性化,D_i将近似于一个平行四边形. 当然,一般地,D_i的边长不再是Δu和Δv,D_i的面积也不是$\Delta u\Delta v$.

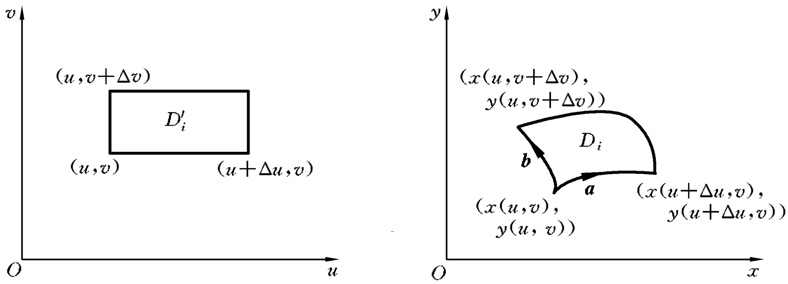


图8.16

由第6章6.2.3知,以向量a、b为邻边的平行四边形的面积等于$|a\times b|$. 若我们能设法将D_i的边以向量的形式写出来,就可以求出D_i的面积,由对应的关系,曲边四边形D_i的三个顶点坐标分别为$(x(u,v),y(u,v))$,$(x(u+\Delta u,v),y(u+\Delta u,v))$,$(x(u,v+\Delta v),y(u,v+\Delta v))$(见图8.16),因此由$D_i$所形成的向量为

$$\begin{aligned} a &= [x(u+\Delta u,v) - x(u,v)]i + [y(u+\Delta u,v) - y(u,v)]j + 0k \\ &\approx \left(\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u\right)i + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\right)j + 0k. \end{aligned}$$

类似地有

$$b \approx \left(\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v\right)i + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right)j + 0k.$$

计算向量的叉积可得

$$\begin{aligned} D_i\text{的面积} &\approx |a\times b| \approx \left|\left(\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\right)\right| \\ &= \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|\Delta u\Delta v = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta u\Delta v = |J|\Delta u\Delta v, \end{aligned}$$

于是有

$$D_i\text{的面积} \approx |J|\Delta u\Delta v.$$

现在利用变量代换来计算二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 为此,考虑把$D$ 划分为D_i 的黎曼和:

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \sum_i f(x_i,y_i)\cdot(D_i\text{ 的面积}) \approx \sum_i f(x_i,y_i)\cdot |J|\Delta u\Delta v.$$

由于xOy 平面上的每个点(x_i,y_i)都对应于uOv 平面上的某个点(u_i,v_i),所以这个和又可写为

$$\sum_i f(x(u_i,v_i),y(u_i,v_i))\cdot |J|\Delta u\Delta v,$$

这是关于变量u、v 的黎曼和,当Δu、Δv 趋于零时,即得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{8.2.11}$$

这就是**二重积分的一般换元公式**.

由前面的推导可以看到

$$|J| = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u\mathrm{d}v} \approx \frac{D_i\text{ 的面积}}{D_i'\text{ 的面积}}$$

因此雅可比行列式的绝对值$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$是变换(8.2.10)式在某点的面积伸缩系数. 可以验证,对极坐标变换$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,其雅可比行列式$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$. 这是因为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

例 8.2.8 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ 的面积.

解 令$x = au, y = bv$,则xy 平面上的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ 对应于uv 平面上的圆$u^2+v^2 = 1$. 变换的雅可比行列式为

$$J = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{vmatrix} = ab.$$

于是有

$$xy\text{-椭圆的面积} = \iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} ab\mathrm{d}u\mathrm{d}v = ab\iint\limits_{D'}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= ab\cdot(uv\text{-圆的面积}) = \pi ab.$$ □

习 题 8.2

(A)

1. 将$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$化为二次积分,其中$D$ 为:(a)如图8.17 所示,(b)如图8.18 所示.

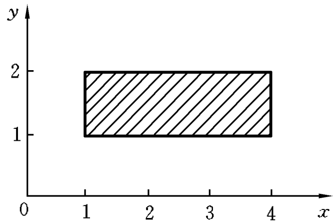


图 8.17

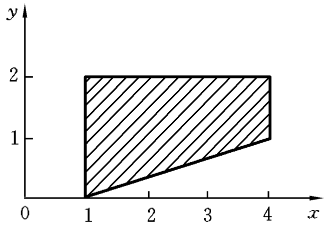


图 8.18

2. 在下列各题中,对二重积分 $I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 按所给的区域 D 依两个不同的顺序安置积分的上、下限.

(1) D:以 $O(0,0)$,$A(1,0)$,$B(1,1)$ 为顶点的三角形;

(2) D:圆 $x^2+y^2\leqslant a^2$;

(3) D:以 $O(0,0)$,$A(2,1)$,$B(-2,1)$ 为顶点的三角形;

(4) D:圆 $x^2+y^2\leqslant y$;

(5) D:由曲线 $y=x^2$ 与 $y=1$ 围成.

3. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D\sqrt{x+y}\,\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是矩形区域:$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2$;

(2) $\iint\limits_D(5x^2+1)\sin 3y\,\mathrm{d}\sigma$,其中 D:$-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{3}$;

(3) $\iint\limits_D(2x+3y)^2\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是以 $(-1,0)$,$(0,1)$ 和 $(1,0)$ 为顶点的三角形区域.

4. 计算下列重积分:

(1) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y$; (2) $\int_1^4\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{y} x^2y^3\mathrm{d}x$; (3) $\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x$; (4) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x y\sin\pi x\,\mathrm{d}y$.

5. 在下列积分中先交换积分的次序,然后算出积分值:

(1) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^3\mathrm{d}y\int_{y^2}^9 y\sin(x^2)\mathrm{d}x$; (3) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{2+x^3}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int_{-4}^0\mathrm{d}x\int_0^{2x+8}(8-y)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}y+\int_0^4\mathrm{d}x\int_0^{-2x+8}(8-y)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}y$.

(提示:先画出积分区域的图形)

6. 求 $I=\iint\limits_D|y-x^2|\mathrm{d}\sigma$,其中 D:$-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$.

7. 求 $I=\iint\limits_D|xy|\mathrm{d}\sigma$,其中 D:$x^2+y^2\leqslant a^2$.

8. 求 $I=\iint\limits_D\dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$D$ 由 $y^2=x$ 及 $y=x$ 围成.

9. 在怎样的情况下,当变换为极坐标之后,积分的限是常数?

10. 利用极坐标计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$, D:$x^2+y^2\leqslant 4$; (2) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}x^3\mathrm{d}y$;

(3) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$ 是由圆周$x^2+y^2=1$及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

(4) $\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}\sigma$,其中$D$ 是由圆周$x^2+y^2=4$,$x^2+y^2=1$及直线$y=0$,$y=x$所围成的在第一象限内的闭区域.

11. 下列等式是否成立,请说明理由,其中D:$x^2+y^2\leqslant 1$;D_1:$x^2+y^2\leqslant 1$,$x\geqslant 0$,$y\geqslant 0$.

(1) $\iint\limits_D x\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=0$;　　(2) $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1}\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$;

(3) $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;　　(4) $\iint\limits_D |xy|\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}\sigma$.

(B)

1. 求$\iint\limits_D (x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma$,其中$D$:$0\leqslant y\leqslant \sin x$,$0\leqslant x\leqslant \pi$.

2. 画出积分区域,把积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$表示为极坐标形式的二次积分,其中积分区域$D$ 是:

(1) $x^2+y^2\leqslant a^2(a>0)$;　　(2) $x^2+y^2\leqslant 2x$;

(3) $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2(0<a<b)$;　　(4) $0\leqslant y\leqslant 1-x$,$0\leqslant x\leqslant 1$.

3. 将下列积分变换为极坐标下的二次积分:

(1) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$;　　(2) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$;　　(3) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{3}x}f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y$.

4. 利用极坐标计算二重积分:$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y$.

5. 设$f(x)\in C[a,b]$,证明等式$\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^x f(y)\mathrm{d}y=\int_a^b f(y)(b-y)\mathrm{d}y$.

6. 求由抛物线$y^2=px$,$y^2=qx(0<p<q)$以及双曲线$xy=a$,$xy=b(0<a<b)$所围区域的面积(提示:令$u=\dfrac{y^2}{x}$,$v=xy$).

答案与提示

(A)

1. (1) $\int_1^4\mathrm{d}x\int_1^2 f(x,y)\mathrm{d}y$;　(2) $\int_1^4\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{3}(x-1)}^2 f(x,y)\mathrm{d}y$.

2. (1) $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x$;

(2) $I=\int_{-a}^a\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-a}^a\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$;

(3) $I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-2y}^{2y}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-2}^2\mathrm{d}x\int_{\frac{|x|}{2}}^1 f(x,y)\mathrm{d}y$;

(4) $I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$;

(5) $I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

3. (1) $\frac{4}{15}[9\sqrt{3}-1-4\sqrt{2}]$; (2) $\frac{32}{9}$; (3) $\frac{13}{6}$.

4. (1) $\frac{1}{2}(e^4-1)$; (2) $\frac{1}{21}(4^7-1)-\frac{2}{33}(4^{11/2}-1)$; (3) $\frac{1}{2}e^4-\frac{3}{2}e^2+e$; (4) $\frac{1}{2\pi}-\frac{2}{\pi^3}$.

5. (1) $\frac{1}{2}(e-1)$; (2) $\frac{1-\cos 81}{4}$; (3) $\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{4}{9}\sqrt{2}$; (4) $\frac{384}{7}$.

6. $\frac{11}{15}$.

7. $\frac{a^4}{2}$.

8. $1-\sin 1$.

10. (1) $\pi(e^4-1)$; (2) $\frac{2}{15}$; (3) $\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1)$; (4) $\frac{3}{64}\pi^2$.

11. (1),(2),(4)成立,(3)不成立.

(B)

1. $\pi^2-\frac{40}{9}$

2. (1) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r$; (2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r$;

(3) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r$; (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}\csc(\theta+\frac{\pi}{4})}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r$.

3. (1) $\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\csc\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r$

$$=\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}\theta+\int_1^{\sqrt{2}}r\mathrm{d}r\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}\theta;$$

(2) $\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}}^{1}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}r\mathrm{d}r\int_{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}}^{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}\theta$;

(3) $\int_0^{2\sqrt{2}}f(r)r\mathrm{d}r\int_{\pi/4}^{\pi/3}\mathrm{d}\theta+\int_{2\sqrt{2}}^{4}f(r)r\mathrm{d}r\int_{\arccos\frac{2}{r}}^{\pi/3}\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{\pi}{12}\int_0^{2\sqrt{2}}f(r)\cdot r\mathrm{d}r+\int_{2\sqrt{2}}^{4}\left(\frac{\pi}{3}-\arccos\frac{2}{r}\right)\cdot rf(r)\mathrm{d}r.$$

4. $\frac{1}{6}[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$

6. $\frac{1}{3}(b-a)\ln\frac{q}{p}$.

8.3 广义二重积分

我们仅考虑无界区域上简单的二重积分.

设D 是 $\mathbb{R}^2$ 中一个无界区域.函数 $f(x,y)$在D 上各点有定义.用任意的光滑曲线

Γ 在D 中划出有限区域σ(见图8.19).假设二重积分$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 存在,当曲线Γ连续变动,使所划出的区域σ无限扩展而趋于区域D 时,如果不论Γ 的形状如何,也不论扩展的过程怎样,

$$\lim_{\sigma\to D}\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

恒有同一极限值I,则称I 是函数$f(x,y)$在无界区域D 上的**广义二重积分**,记作

$$I=\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

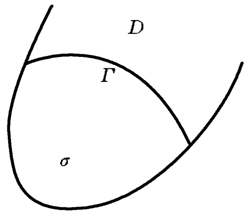


图8.19

这时也称$f(x,y)$在D 上的积分收敛.否则,称积分是发散的.

下面给出一些有关的结论(略去证明),使得我们能计算某些简单然而有用的广义二重积分.

假设函数$f(x,y)$定义于无穷矩形$[a,b;c,+\infty)$上,且$f(x,y)$非负,则有公式

$$\iint\limits_{[a,b;c,+\infty)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y, \tag{8.3.1}$$

并且由右端的二次积分存在就推得二重积分存在.

如果非负函数$f(x,y)$定义于无穷矩形$[a,+\infty;c,+\infty)$上,并且对任何$b>a$及任何$d>c$,$f(x,y)$在每一有限矩形$[a,b;c,d]$上的二重积分及对y 的单积分在正常的意义下皆存在,则有公式

$$\iint\limits_{[a,+\infty;c,+\infty)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y, \tag{8.3.2}$$

其中假定右端的二次积分存在.

在上述情形中,还可利用极坐标变换计算广义二重积分.

例8.3.1　求$\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　由于被积函数非负,故

$$\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

此题中的积分区域D 如图8.20所示.　□

例8.3.2　计算$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,并由此证明概率积分

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=1. \tag{8.3.3}$$

解 利用极坐标,有

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}\cdot r\mathrm{d}r=2\pi\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right)\Big|_0^{+\infty}=\pi.$$

另一方面,通过化为二次积分,有

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2.$$

合起来便推得 $\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\pi$,

即(8.3.3)式成立. □

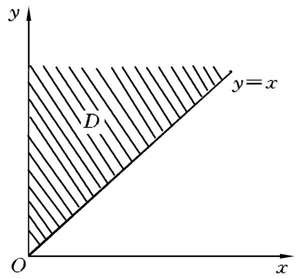


图8.20

习 题 8.3

1. 求 $\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2. 求 $I=\iint\limits_D x\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是由曲线$y=4x^2$ 和$y=9x^2$ 在第一象限所围成的区域.

3. 求 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{x,y\}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

答案与提示

1. $\dfrac{\pi}{\mathrm{e}}$.

2. $\dfrac{5}{144}$.

3. $-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

8.4 三重积分的概念和计算

8.4.1 三重积分的概念

二重积分在几何上表示立体的体积,三重积分在几何上已没有几何意义,但它在物理和力学中有重要的应用.

设函数$f(x,y,z)$定义于 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭区域Ω上,我们还是从积分和出发,首先将Ω分割成n 个小区域,然后将小区域的体积与函数在该区域上某点处的值相乘,再加起来. 例如,积分和可以表示为

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i,$$

其中ΔV_i 表示小区域的体积,(ξ_i,η_i,ζ_i)是ΔV_i 上某点. 设λ表示所有小区域的直径中

的最大者.仿照二重积分的定义,我们称极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$$

为函数$f(x,y,z)$在区域Ω上的三重积分,记作

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V,$$

其中$\mathrm{d}V$ 称为**体积元素**.与二重积分类似,在直角坐标系中,有时把体积元素$\mathrm{d}V$ 记作$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,而把三重积分记作

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 称为**直角坐标系中的体积元素**,$f(x,y,z)$称为被积函数,Ω称为积分区域.当$f(x,y,z)\equiv 1$时,三重积分$\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V$ 在数值上就等于区域Ω的体积.

可以证明,闭区域Ω上的连续函数$f(x,y,z)$在Ω上的三重积分一定存在.今后我们总假定函数$f(x,y,z)$在闭区域上连续.

8.4.2 利用直角坐标系计算三重积分

三重积分的计算可以化为算一个定积分,和算一个二重积分,也就可以化为三次积分的问题,我们考察两种基本情形.

(1) 设Ω可以表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D,z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)\},$$

其中D 是xOy 平面中的闭区域(见图8.21).

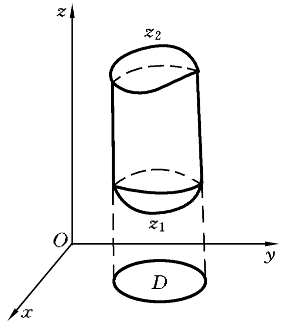


图8.21

对这种区域计算三重积分$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$,可以化为先对$z$求一个定积分,再对$x$、$y$算一个二重积分,即

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint_{D}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.\quad(8.4.1)$$

注意到上面的积分区域Ω有这样的特点:它是由D 的边界上下移动所得的柱面,与两张曲面$z=z_1(x,y)$、$z=z_2(x,y)$所围成的.此外,平行于z轴且穿过闭区域Ω内部的直线与Ω的上、下边界曲面相交不多于两点,而平面区域D 恰为Ω在xOy 平面上的投影区域.

我们计算三重积分,就要让积分变量跑遍整个区域Ω,公式(8.4.1)表明可以分为两步做到这一点,首先过D 内任一点(x,y)作平行于z轴的直线,这条直线在Ω内

的部分其竖坐标由$z=z_1(x,y)$到$z=z_2(x,y)$. 先让积分变量沿着这条线段变动. 随之便完成了函数$f(x,y,z)$对z的定积分;然后让点(x,y)跑遍整个区域D,相应的直线段也就跑遍整个区域Ω. 这样,再求二重积分时,积分变量既不重复也不遗漏地跑遍整个区域Ω,也就对函数$f(x,y,z)$完成了区域上的三重积分.

简言之,先对z求内层积分,是从穿入面$z=z_1(x,y)$积到穿出面$z=z_2(x,y)$,再对Ω在xOy平面上的投影区域D求外层积分.

(2) 设Ω可以表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid a_3\leqslant z\leqslant b_3,(x,y)\in D(z)\},$$

其中$D(z)$是竖坐标为z的平面截Ω所得到的一个平面闭区域(见图8.22),则三重积分可以化为先对闭区域$D(z)$求二重积分,再对z在区间$[a_3,b_3]$上求定积分,即

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_{a_3}^{b_3}\left[\iint\limits_{D(z)}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z$$

$$=\int_{a_3}^{b_3}\mathrm{d}z\iint\limits_{D(z)}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{8.4.2}$$

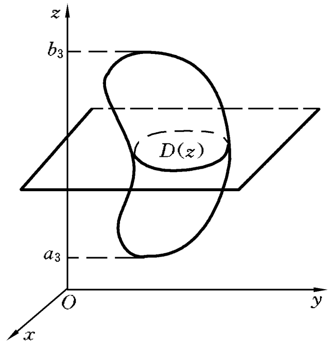


图8.22

简言之,内层积分是在平面$z=z$与Ω的交集$D(z)$上求积分,外层积分是在Ω在z轴上的投影区间$[a_3,b_3]$上求积分.

例8.4.1 设Ω是由平面$x=0,y=0,z=0$及$x+y+z=1$围成的立体,求

$$I=\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad J=\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

解 先画出积分区域的草图,如图8.23所示,再试用公式(8.4.1)计算. 为此,作平行于z轴的直线,则穿入面为$z=0$,穿出面为$z=1-x-y$. 再找出Ω在xOy平面上的投影区域

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1-x\}(见图8.24),$$

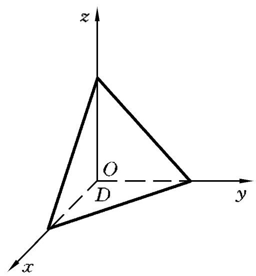


图8.23

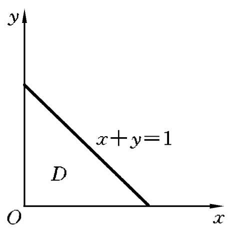


图8.24

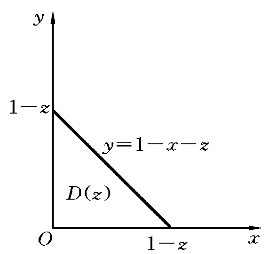


图8.25

于是有

$$I=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y} z^2\mathrm{d}z=\iint_D \frac{1}{3}z^3\Big|_0^{1-x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\iint_D (1-x-y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)^3\mathrm{d}y=\frac{1}{12}\int_0^1(1-x)^4\mathrm{d}x=\frac{1}{60}.$$

计算积分 J 时,可利用区域 Ω 及被积函数关于变量 x、y、z 的轮换对称性,即把变量 x 换成 z,z 换成 y,y 换成 x 后,积分 J 变成 I,它们之间的差别仅仅在于记号的不同,而积分并不依赖于积分变量采用什么记号. 因此有

$$J=I=\frac{1}{60}.$$

也可以利用公式(8.4.2)来计算 I. 为此,用 $z=z$ 平面去截 Ω,得一三角形区域 $D(z)=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1-z, 0\leqslant y\leqslant 1-x-z\}$(见图 8.25),$D(z)$ 的面积为 $\frac{1}{2}(1-z)^2$,所以

$$I=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D(z)} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 z^2\mathrm{d}z\iint_{D(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 z^2\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{1}{60}.$$ □

例 8.4.2 计算三重积分 $I=\iiint_\Omega (x+y+z)^2\mathrm{d}V$,其中 Ω: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

解 首先将被积函数展开,有

$$I=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz)\mathrm{d}V.$$

注意到 Ω 关于 yOz 平面是对称的,被积函数 $2xy$ 有特性

$$2(-x)y=-2xy.$$

直接由重积分概念看出 $$\iiint_\Omega 2xy\mathrm{d}V=0.$$

同理 $$\iiint_\Omega 2xz\mathrm{d}V=\iiint_\Omega 2yz\mathrm{d}V=0.$$

所以 $$I=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\iiint_\Omega x^2\mathrm{d}V+\iiint_\Omega y^2\mathrm{d}V+\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}V=I_1+I_2+I_3.$$

利用轮换对称性,只需计算 I_3. 积分区域 Ω 是一个椭球,用 $z=z$ 平面去截它,得一椭圆区域 $D(z)$(见图 8.26):

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}\leqslant 1,$$

$D(z)$ 的面积为 $\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$,$\Omega$ 在 z 轴上的投影区间为 $[-c,c]$,故

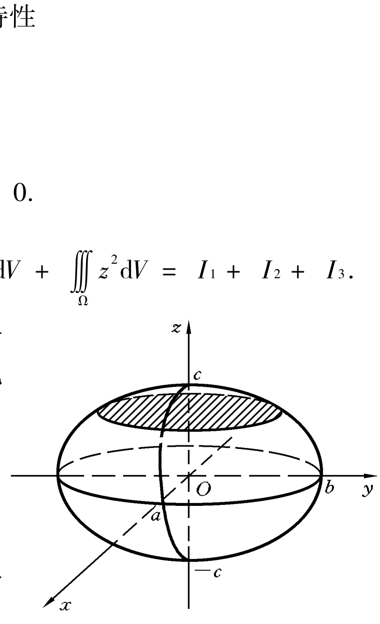


图 8.26

$$I_3=\iiint_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-c}^{c}\mathrm{d}z\iint_{D(z)} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-c}^{c} z^2\mathrm{d}z\iint_{D(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-c}^{c} z^2\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3.$$

同理可得
$$I_1=\frac{4}{15}\pi bca^3,\quad I_2=\frac{4}{15}\pi cab^3,$$

最后得
$$I=\frac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2+c^2).$$
□

8.4.3 利用柱坐标系计算三重积分

三维空间的柱坐标系就是平面极坐标加上 z 轴(见图 8.27),因此直角坐标与柱坐标之间的关系是

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z$$
$$(0\leqslant r<+\infty,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,-\infty<z<+\infty)$$

且
$$x^2+y^2=r^2.$$

三组坐标面分别为

$r=r_0$,是一个以 z 轴为中心轴、半径为 r_0 的圆柱面;

$\theta=\theta_0$,是一个过 z 轴、极角为 θ_0 的半平面;

$z=z_0$,是一个与 xOy 平面平行,高度为 z_0 的水平面.

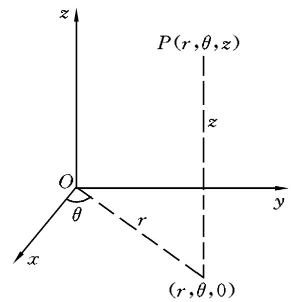


图 8.27

图 8.28 是利用柱坐标刻划的曲面或平面.

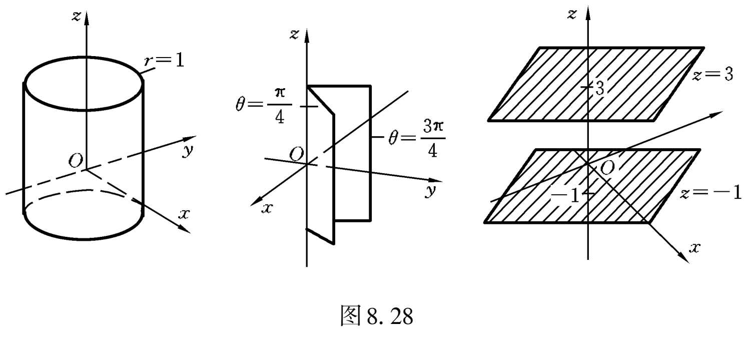


图 8.28

在平面极坐标系中计算二重积分时,必须用极坐标表示面积微元,即 $\mathrm{d}\sigma=r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$. 为了在柱坐标系下计算三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$,我们需要用柱坐标表示体积微元 $\mathrm{d}V$. 如图 8.29 所示,体积元素 ΔV 由半径为 r 和 $r+\mathrm{d}r$ 的圆柱面,极角为 θ 和 $\theta+\mathrm{d}\theta$ 的半平面,以及高度为 z 和 $z+\mathrm{d}z$ 的水平面所围成. 通过以直代曲和以平行代相交,把 ΔV 近似地看作一长方体,该长方体的三条边分别为 $\mathrm{d}z$、$\mathrm{d}r$ 和 $r\mathrm{d}\theta$,则有

$$\Delta V\approx r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z.$$

因此在略去了高阶无穷小量之后,得体积微元

$$\mathrm{d}V = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z.$$

于是,把直角坐标系中的三重积分变换到柱坐标时,只要把被积函数 $f(x,y,z)$ 中 x、y、z 分别换成 $r\cos\theta$、$r\sin\theta$、z;把体积微元 $\mathrm{d}v$ 换成柱坐标系中的体积微元 $r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z$;最后把积分区域 Ω 换成 r、θ、z 的相应变化范围 Ω',即

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z. \tag{8.4.3}$$

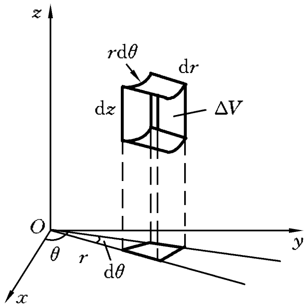


图8.29

柱坐标系中的三重积分也可以化为三次积分来计算,下面通过例子说明.

例8.4.3 计算三重积分 $I=\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 和抛物面 $x^2+y^2=3z$ 围成的区域.

解 首先画出 Ω 的草图(见图8.30(a)),并将 Ω 的边界曲面方程化为柱坐标方程:

$$r^2+z^2=4,\quad r^2=3z.$$

由图8.30(a)看出,θ 的变化范围是 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 对任意取定的 $\theta\in[0,2\pi]$,我们来看极角为 θ 的半平面与 Ω 的交 $D(\theta)$ 是什么. 由图 8.30(a)可见,截面 $D(\theta)$ 由圆周 $r^2+z^2=4$、抛物线及 z 轴所围成(见图 8.30(b)),两曲线的交点为 $z=1$, $r=\sqrt{3}$,因此

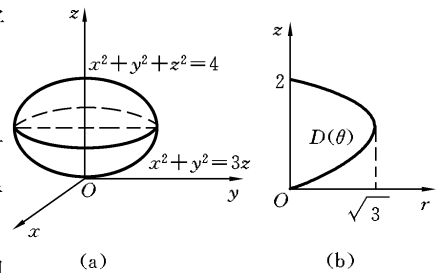


图8.30

$$I = \iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega'} zr\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\iint_{D(\theta)} zr\mathrm{d}r\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}\mathrm{d}r\int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} zr\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} \frac{r}{2}\left(4-r^2-\frac{r^4}{9}\right)\mathrm{d}r = \frac{13}{4}\pi.$$

本题有另一种解法:先对 z 求积分,再算一个对 r、θ 的二重积分. 为此,我们找出区域 Ω 在 (r,θ) 平面上的投影区域 $D: r\leqslant\sqrt{3}$,作平行于 z 轴的直线穿过 Ω,则穿入面为 $z=\frac{r^2}{3}$,穿出面为 $z=\sqrt{4-r^2}$,因此

$$I = \iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega'} zr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \iint_{D}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} zr\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}\mathrm{d}r\int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} zr\mathrm{d}z = \frac{13}{4}\pi.$$

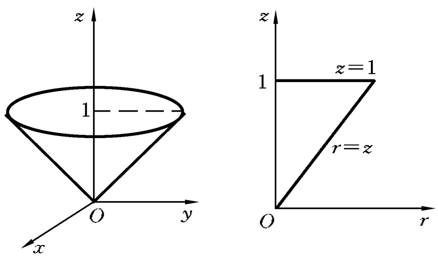
□

例 8.4.4　计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=1$ 所围成的区域.

解　画出 Ω 的图形(见图 8.31(a)). Ω 的边界方程化为柱坐标方程

$$r=z,\quad z=1.$$

用极角为 θ 的半平面去截 Ω，得到 rOz 平面上一区域 $D(\theta)$，它由 $r=0$，$r=z$ 和 $z=1$ 围成(见图 8.31(b))，当 θ 由 0 变至 2π 时，$D(\theta)$ 旋转后得 Ω，因此



(a)　　　　(b)

图 8.31

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega'}r^2\cdot r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\iint\limits_{D(\theta)}r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_r^1 r^3\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1 r^3(1-r)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{10}.$$

读者可尝试用另外的次序算此积分.　□

8.4.4　利用球坐标系计算三重积分

空间 $\mathbb{R}^3$ 中的一点 $P(x,y,z)$ 用球坐标系表示时，有如下的关系(见图 8.32)：

$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta,\quad y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\quad z=\rho\cos\varphi$$
$$(0\leqslant\rho<+\infty,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$$

且
$$\rho^2=x^2+y^2+z^2.$$

三组坐标面分别为

$\rho=\rho_0$，是一个以原点为心、半径为 ρ_0 的球面；

$\theta=\theta_0$，是一个过 z 轴且极角为 θ_0 的半平面；

$\varphi=\varphi_0$，是一个以原点为顶点，z 轴为轴，张角为 φ_0 的锥面.

在球坐标系中，用三组坐标面 $\rho=$ 常数，$\varphi=$ 常数，$\theta=$ 常数可把积分区域 Ω 分成许多小区域，我们取出其中的一个代表 ΔV 进行分析. ΔV 由半径为 ρ 和 $\rho+\mathrm{d}\rho$ 的球面，极角为 θ 和 $\theta+\mathrm{d}\theta$ 的半平面，张角为 φ 和 $\varphi+\mathrm{d}\varphi$ 的圆锥面所围成(见图 8.33). 通过以直代曲、以平行代相交，把 ΔV 近似地看作一长方体，其**体积微元**为

$$\mathrm{d}V=\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho.$$

于是，把直角坐标系中的三重积分变换成球坐标系中的三重积分时，只要把被积函数中的 x、y、z 分别换成 $\rho\sin\varphi\cos\theta$、$\rho\sin\varphi\sin\theta$、$\rho\cos\varphi$，把体积微元 $\mathrm{d}V$ 换成球坐标系中的体积微元 $\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho$，把积分区域 Ω 换成 θ、φ、ρ 相应的变化范围 Ω' 就可以了，也就是

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega'}f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho.\qquad(8.4.4)$$

球坐标系中的三重积分,同样可以化为算一个二重积分和算一个定积分. 下面通过例子说明.

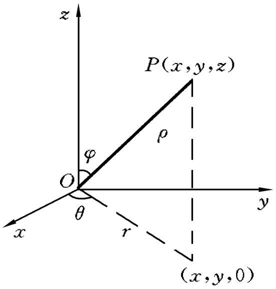


图8.32

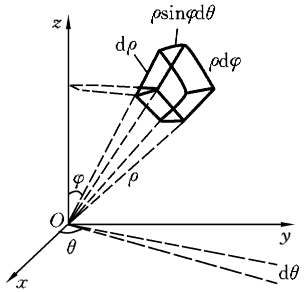


图8.33

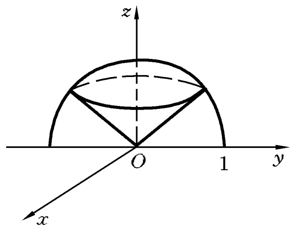


图8.34

例8.4.5　计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}V$,其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.

解　画出 Ω 的图形(见图8.34). 注意 $z\geqslant 0$,因此 Ω 的下底是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$,上底是球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$. 在球坐标系下,这两个边界曲面的方程分别为

$$\varphi=\frac{\pi}{4},\quad \rho=1.$$

故 Ω 可表示为 Ω':$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}, 0\leqslant\rho\leqslant 1$,于是

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega'}(\rho\sin\varphi\cos\theta+\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(\rho\sin\varphi\cos\theta+\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho \\
&= \sin\theta\Big|_0^{2\pi}\cdot\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{4}\sin\varphi\right)\Big|_0^{\pi/4}\cdot\frac{1}{4}+2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\pi/4}\cdot\frac{1}{4} \\
&= 0+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

□

例8.4.6　计算三重积分

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V,\quad \Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 2z.$$

解　画出 Ω 的图形(见图8.35). 将 Ω 的边界面方程化为球坐标下的方程:

$$\rho=2\cos\varphi.$$

用 θ 为定值的半平面去截 Ω,得一平面区域 $D(\theta)$,它是一个半圆域:

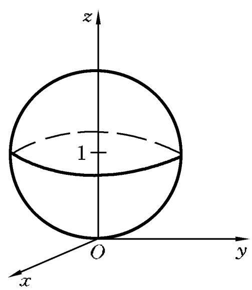


图8.35

$$D(\theta): 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 2\cos\varphi.$$

当 θ 从 0 变到 2π 时，由 $D(\theta)$ 旋转即得区域 Ω. 对 $D(\theta)$ 利用平面极坐标来确定积分限，得

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \mathrm{d}V = \iiint_{\Omega'} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \iint_{D(\theta)} \rho^4 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^4 \sin\varphi \,\mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{32}{5} \sin\varphi \cos^5\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{32}{15}\pi. \qquad \square$$

习　题　8.4

(A)

1. 在直角坐标系下将三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \mathrm{d}V$ 化为三次积分，其中区域 Ω 为：

(1) Ω 由三个坐标面及平面 $x + y + z = 1$ 所围成的四面体；

(2) Ω 由平面 $z = R\ (R > 0)$ 与锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 围成；

(3) Ω 由平面 $z = 2, z = 4$ 及曲面 $z = x^2 + y^2$ 围成；

(4) Ω 是两个球 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ 与 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz$ 的公共部分，其中 $R > 0$.

2. 在柱坐标系下将三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \mathrm{d}V$ 化为三次积分，其中区域 Ω 为：

(1) Ω 由曲面 $x^2 + y^2 = 2z$ 与平面 $z = 4$ 围成；

(2) Ω 由曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 与 $z = x^2 + y^2$ 围成；

(3) Ω 是由曲线 $y^2 = 2z, x = 0$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与两平面 $z = 2, z = 8$ 所围的立体；

(4) Ω 由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 围成.

3. 在球坐标系下将三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \mathrm{d}V$ 化为三次积分，其中区域 Ω 为：

(1) Ω 为球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz, R > 0$；

(2) $\Omega: x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leqslant a^2, x^2 + y^2 \leqslant z^2$；

(3) Ω 由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = 1$ 围成；

(4) $\Omega: a^2 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4a^2, \sqrt{x^2 + z^2} \leqslant y, a > 0$.

4. 计算下列三重积分：

(1) $\iiint_{\Omega} x \,\mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$，$\Omega$ 为三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的区域.

(2) $\iiint_{\Omega} \dfrac{\mathrm{d}V}{(1 + x + y + z)^3}$，$\Omega$ 是由平面 $x = 0, y = 0, z = 0$ 以及 $x + y + z = 1$ 所围成的四面体.

(3) $\iiint_{\Omega} (x + y + z) \mathrm{d}V$，$\Omega: x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$.

(4) $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V$，$\Omega$ 由曲面 $z = x^2 + y^2$ 及平面 $z = 1, z = 2$ 围成.

5. 利用柱坐标系计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2 + y^2 + z)\mathrm{d}V$，$\Omega$ 由曲面 $x^2 + y^2 = 2z$ 与平面 $z = 4$ 围成.

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2 + y^2)^2\mathrm{d}V$，$\Omega$ 由曲面 $z = x^2 + y^2$，平面 $z = 4$ 及 $z = 16$ 围成.

(3) $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V$，$\Omega$ 由曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 围成.

(4) $\iiint\limits_{\Omega}(\sqrt{x^2 + y^2})^3\mathrm{d}V$，$\Omega$ 由 $x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 16, z^2 = x^2 + y^2, z \geqslant 0$ 围成.

6. 利用球坐标系计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}V$，$\Omega$：$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x + y + z)\mathrm{d}V$，$\Omega$：$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$.

(3) $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\mathrm{d}V$，$\Omega$ 由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 1$ 围成.

(B)

1. 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V$，$\Omega$：$x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leqslant a^2, x^2 + y^2 \leqslant z^2$.

(2) $\iiint\limits_{\Omega}\left|\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1\right|\mathrm{d}V$，$\Omega$ 由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 1$ 围成.

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(x + y + z)\mathrm{d}V$，$\Omega$：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

2. 设 Ω 为球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$，求证：$\iiint\limits_{\Omega} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pi\int_{-1}^{1} f(z)(1 - z^2)\mathrm{d}z$.

答案与提示

(A)

1. (1) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y} f(x, y, z)\mathrm{d}z$；　(2) $\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{R} f(x, y, z)\mathrm{d}z$；

(3) $\int_2^4\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} f(x, y, z)\mathrm{d}y$；

(4) $\int_0^{R/2}\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{2Rz-z^2}}^{\sqrt{2Rz-z^2}}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y^2-(2Rz-z^2)}}^{\sqrt{y^2-(2Rz-z^2)}} f(x, y, z)\mathrm{d}x + \int_{R/2}^{R}\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y^2-(R^2-z^2)}}^{\sqrt{y^2-(R^2-z^2)}} f(x, y, z)\mathrm{d}x$.

2. (1) $\int_0^4\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\mathrm{d}r = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{8}}\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^{4} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cdot r\mathrm{d}z$；

(2) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cdot r dz$;

(3) $\int_2^8 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cdot r dr = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 dr\int_0^8 f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cdot r dz$

$+\int_0^{2\pi}d\theta\int_2^4 dr\int_{\frac{r^2}{2}}^8 f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cdot r dz$;

(4) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dr\int_r^{\sqrt{1-r^2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dz$.

3. (1) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi} F(\rho,\theta,\varphi)\rho^2\sin\varphi d\rho$;　(2) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi} F(\rho,\theta,\varphi)\rho^2\sin\varphi d\rho$;

(3) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} F(\rho,\theta,\varphi)\rho^2\sin\varphi d\rho$;　(4) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_a^{2a} F(\rho,\theta,\varphi)\rho^2\sin\varphi d\rho$,

其中 $F(\rho,\theta,\varphi)\equiv f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)$.

4. (1) $\frac{1}{48}$;　(2) $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$;　(3) $\frac{3\pi}{16}a^4$;　(4) $\frac{7\pi}{3}$.

5. (1) $\frac{256}{3}\pi$;　(2) 5440π;　(3) $\frac{7\pi}{12}$;　(4) $\frac{3367}{3}\pi$.

6. (1) $\frac{4\pi}{5}$;　(2) 0;　(3) $\frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1)$.

(B)

1. (1) $\frac{7}{6}\pi a^4$;　(2) $\frac{\pi}{6}(\sqrt{2}-1)$;　(3) 0.

2. 利用柱坐标将左端积分化为三次积分.

8.5　重积分的应用

8.5.1　体积

以曲面 $z=f(x,y)$ $((x,y)\in D)$ 为顶的曲顶柱体的体积等于

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy. \tag{8.5.1}$$

空间区域 Ω 的体积用以下公式计算:

$$V=\iiint_\Omega dxdydz. \tag{8.5.2}$$

例 8.5.1　求由两个底圆半径相等的直交圆柱面所围成的立体的体积.

解　设圆柱面的半径为 R,且这两个圆柱面的方程分别为

$$x^2+z^2=R^2,\quad x^2+y^2=R^2.$$

利用所求立体关于坐标面的对称性,只要算出它在第一卦限部分(见图 8.36)的体积 V_1,然后乘以 8 就行了.

所求立体在第一卦限的部分，可以看成是一个曲顶柱体，它的顶是柱面 $z=\sqrt{R^2-x^2}$，它的底是 xOy 平面上的四分之一圆域 $D: 0\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2}$ 与 $0\leqslant x\leqslant R$（见图8.37）. 因此，由公式(8.5.1)，有

$$V_1=\iint_D\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^R(R^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}R^3.$$

于是所求立体的体积为 $\quad V=8V_1=\dfrac{16}{3}R^3.$ □

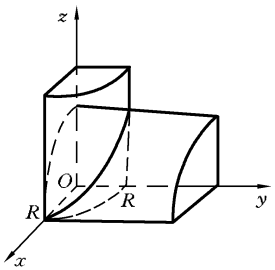


图8.36

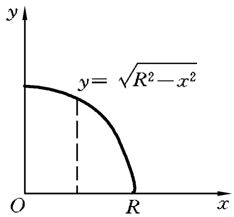


图8.37

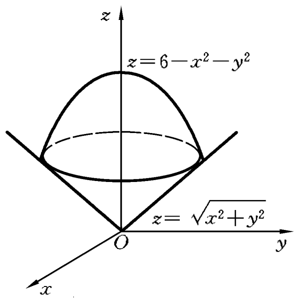


图8.38

例 8.5.2　求由曲面 $z=6-x^2-y^2$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体的体积.

解　画出题目所给立体 Ω 的图形（见图8.38）. 两曲面的交线的柱坐标方程为 $r=2$. 因此，在柱坐标系下，Ω 可表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant2\pi,\quad 0\leqslant r\leqslant2,\quad r\leqslant z\leqslant6-r^2.$$

于是，Ω 的体积为

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\mathrm{d}r\int_r^{6-r^2}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^2(6r-r^3-r^2)\mathrm{d}r=2\pi\left(3r^2-\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{3}r^3\right)\bigg|_0^2=\frac{32\pi}{3}.$$ □

8.5.2　物体的质心

在力学中，已给出质点组的质心、转动惯量、引力等概念. 质点组的质点是离散地分布的，如果要从离散的质点组过渡到连续体，那么求连续体的质心、转动惯量、引力等量时，就必须借助重积分的工具才能算出来.

设有一质点组，每个质点的位置为 $(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,\cdots,n)$，质量为 $m_i(i=1,2,\cdots,n)$，则质点组的质心坐标 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 为

$$\bar{x}=\frac{\sum\limits_{i=1}^n m_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^n m_i},\quad \bar{y}=\frac{\sum\limits_{i=1}^n m_iy_i}{\sum\limits_{i=1}^n m_i},\quad \bar{z}=\frac{\sum\limits_{i=1}^n m_iz_i}{\sum\limits_{i=1}^n m_i},$$

其中 $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ 是质点组的总质量.

设有一物体,占有 $\mathbf{R}^3$ 中的闭区域 Ω,在点 (x,y,z) 的密度为 $\rho(x,y,z)$,并设函数 $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续. 求该物体的质心坐标.

在闭区域 Ω 上任取一个直径很小的闭区域 $\mathrm{d}V$,并且 $\mathrm{d}V$ 也表示该小闭区域的体积. 在这个小闭区域上任取一点 (x,y,z). 由于 $\mathrm{d}V$ 的直径很小,且 $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续,所以物体中对应于 $\mathrm{d}V$ 的部分的质量近似等于 $\rho(x,y,z)\mathrm{d}V$,并且这部分质量可近似地看作集中在点 (x,y,z) 处. 分别以微元 $x\rho(x,y,z)\mathrm{d}V$、$y\rho(x,y,z)\mathrm{d}V$、$z\rho(x,y,z)\mathrm{d}V$ 以及 $\rho(x,y,z)\mathrm{d}V$ 作被积表达式,在 Ω 上积分,就可得到物体的质心坐标:

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} x\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} y\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{M}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{M},$$

其中 $M = \iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)\mathrm{d}V$ 为物体的总质量.

若物体为一平面薄片 D,面密度为 $\rho(x,y)$,则其质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint\limits_{D} x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iint\limits_{D} y\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $M = \iint\limits_{D} \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 为该平面薄片的质量.

例 8.5.3 一均匀物体由曲面 $z=z^2+y^2$ 及 $z=1$ 围成,求该物体的质心.

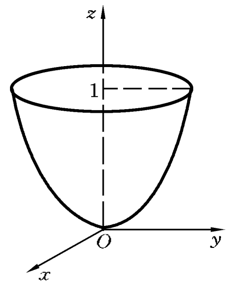


图8.39

解 该物体所占空间区域 Ω 可用柱坐标表示为:$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant 1, r^2\leqslant z\leqslant 1$(见图8.39). 不妨设物体的密度 $\rho=1$. 由对称性知,物体的质心坐标 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 中的 $\bar{x}=0, \bar{y}=0$,而

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V} = \frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 zr\mathrm{d}z}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 r\mathrm{d}z} = \frac{2\pi\int_0^1\frac{1}{2}(r-r^5)\mathrm{d}r}{2\pi\int_0^1(r-r^3)\mathrm{d}r} = \frac{2}{3}.$$

故物体的质心坐标为 $\left(0,0,\frac{2}{3}\right)$. □

8.5.3 转动惯量

设有 n 个质点的质点组,其质量为 $m_i\ (i=1,2,\cdots,n)$,所在位置为 $(x_i,y_i,z_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$,则由力学知,此质点组关于 x、y、z 轴的转动惯量分别为

$$I_x = \sum_{i=1}^{n}(y_i^2+z_i^2)m_i, \quad I_y = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2+z_i^2)m_i, \quad I_z = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2)m_i.$$

类似于对质心的处理方法. 现在把质点组的转动惯量过渡到连续体的情形. 设物

体占有空间区域Ω,密度函数$\rho(x,y,z)$在Ω上连续,则物体绕x、y、z轴的转动惯量分别为

$$I_x = \iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V, \quad I_y = \iiint_{\Omega}(z^2+x^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,$$

$$I_z = \iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V.$$

若物体为一平面薄片D,密度为$\rho(x,y)$,则该薄片对于x、y轴的转动惯量分别为

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma, \quad I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

例8.5.4　求半径为a的均匀半圆薄片对于其直径的转动惯量.

解　不妨设薄片的密度为常数ρ_0. 如图8.40所示建立坐标系,则薄片所占有的闭区域D可表示为

$$x^2+y^2\leqslant a^2, \quad y\geqslant 0.$$

于是,半圆薄片对x轴(即直径边)的转动惯量为

$$I_x = \iint_D \rho_0 y^2\mathrm{d}\sigma = \rho_0\iint_D r^3\sin^2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \rho_0\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\sin^2\theta\mathrm{d}r$$

$$= \rho_0\cdot\frac{a^4}{4}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\rho_0 a^4\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}Ma^2,$$

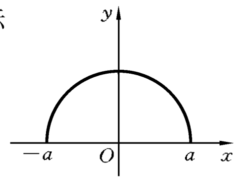


图8.40

其中$M=\frac{1}{2}\pi a^2\rho_0$为半圆薄片的质量. □

8.5.4　引力

设有一物体占有空间区域Ω,密度为$\rho(x,y,z)$,且$\rho(x,y,z)$在Ω上连续. 在Ω之外点$P(x_0,y_0,z_0)$处放一单位质量的质点,求物体对该质点的引力.

我们用微元法进行分析. 在Ω内取出有代表性的一小块体积微元$\mathrm{d}V$,在$\mathrm{d}V$内任取一点(x,y,z). 体积微元$\mathrm{d}V$的质量

$$\mathrm{d}M = \rho(x,y,z)\mathrm{d}V.$$

令　$$\boldsymbol{r} = (x-x_0)\boldsymbol{i}+(y-y_0)\boldsymbol{j}+(z-z_0)\boldsymbol{k},$$

向量$\boldsymbol{r}$由P点指向$\mathrm{d}V$(见图8.41),把体积微元$\mathrm{d}V$近似地看作一点. 根据万有引力定律知,微元$\mathrm{d}V$对质点的引力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = k\frac{\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{r^3}\boldsymbol{r},$$

其中$r=|\boldsymbol{r}|$,k为比例常数. 于是物体Ω对质点P的引力为

$$\boldsymbol{F} = \iiint_{\Omega}\frac{k\rho(x,y,z)\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V.$$

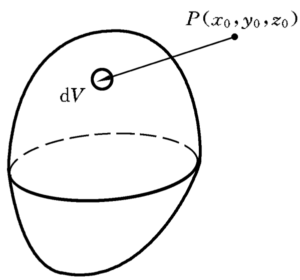


图8.41

这里被积函数是一个向量函数,积分所得结果也是一个向

量,由于两向量相等即其对应分量相等,所以向量F 在x、y、z 轴上的分量分别为

$$F_x = k\iiint_\Omega \frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}\mathrm{d}V,\quad F_y = k\iiint_\Omega \frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}\mathrm{d}V,$$

$$F_z = k\iiint_\Omega \frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}\mathrm{d}V,$$

其中$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$,$F_x$、$F_y$、$F_z$ 表示向量F 的三个分量.

若物体为一平面薄片D,且位于xOy 平面上. 则它对点$P(x_0,y_0,z_0)$处单位质量的质点的引力的三个分量为

$$F_x = k\iint_D \frac{\rho(x,y)(x-x_0)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{3/2}}\mathrm{d}\sigma,$$

$$F_y = k\iint_D \frac{\rho(x,y)(y-y_0)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{3/2}}\mathrm{d}\sigma,$$

$$F_z = -k\iint_D \frac{\rho(x,y)z_0}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{3/2}}\mathrm{d}\sigma.$$

例 8.5.5 设有一均匀的球顶锥体,球心在原点,半径为R,锥体的顶点在原点,轴为z 轴,锥面与z 轴交角为$\alpha\left(0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$(见图 8.42). 求此球顶锥体对于在其顶点的一单位质量的质点的引力.

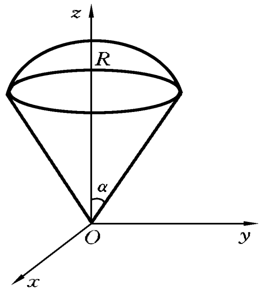


图 8.42

解 不妨设密度$\rho=1$. 由对称性知,引力在x 轴和y 轴上的分量为零,即

$$F_x = F_y = 0.$$

利用球坐标,引力在z 轴的分量为

$$F_z = k\iiint_\Omega \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\varphi\int_0^R \frac{r\cos\varphi}{r^3}\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^R\mathrm{d}r = k\pi R\sin^2\alpha.$$ □

习 题 8.5

(A)

1. 求由下列曲面所围立体的体积:

(1) 由$x=0$,$y=0$,$x=1$,$y=1$所围成的柱体被平面$z=0$及$2x+3y+z=6$截得的立体;

(2) $z=x^2+y^2$,$y=x^2$,$y=1$,$z=0$;

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=x^2+y^2$;

(4) $x^2+y^2+z^2=2az(a>0)$及$x^2+y^2=z^2$(含有z轴的部分);

(5) $x^2+y^2+z^2=1, x^2+y^2+z^2=2z, z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成立体位于锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$内那部分.

2. 求下列平面图形的质心(设$\rho\equiv1$):

(1) 抛物线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$与两坐标轴所围部分;

(2) 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant1$在第一象限部分.

3. 求区域$\Omega: a^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant b^2$与$x\geqslant0$的质心($\rho\equiv1$).

4. 求球体$x^2+y^2+z^2\leqslant2az$的质心,这里假设球体内各点处的体密度等于该点到坐标原点的距离的平方.

5. 设均匀平面薄片所占区域D由抛物线$y^2=\frac{9}{2}x$与直线$x=2$围成,求转动惯量I_x和I_y.

6. 设球在动点$P(x,y,z)$的密度与该点到球心距离成正比.求质量为m的非均匀球体$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$对于其直径的转动惯量.

(B)

1. 求下列各曲面所围立体的体积:

(1) $z=xy, x+y+z=1$及坐标平面$y=0, x=0$;

(2) $z=x^2+2y^2$与$z=6-2x^2-y^2$.

2. 求位于两圆$r=2\sin\theta$和$r=4\sin\theta$之间的均匀薄片的质心.

3. 证明:由$x=a, x=b, y=f(x)$及x轴所围的平面图形绕x轴旋转一周所成的旋转体对x轴的转动惯量为$I_x=\frac{\pi}{2}\int_a^b[f(x)]^4\mathrm{d}x$,其中正值函数$f(x)\in C[a,b]$,立体的密度$\rho\equiv1$.

4. 求面密度为常量,半径为R的均匀圆形薄片$x^2+y^2\leqslant R^2, z=0$,对位于$z$轴上点$M(0,0,a)(a>0)$处单位质量的质点的引力.

5. 设有一顶角为90°、高为1的正圆锥体,密度为1,求此正圆锥体与位于圆锥顶点质量为1的质点之间的引力.

答案与提示

(A)

1. (1) $\frac{7}{2}$; (2) $\frac{88}{105}$; (3) $\frac{\pi}{6}$; (4) πa^3; (5) $\frac{\pi}{3}(1+\sqrt{2})$.

2. (1) $\left(\frac{a}{5},\frac{a}{5}\right)$; (2) $\left(\frac{4a}{3\pi},\frac{4b}{3\pi}\right)$.

3. $\left(\frac{3}{8}\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{a^2+ab+b^2},0,0\right)$.

4. $\left(0,0,\frac{5a}{4}\right)$.

5. $I_x=\frac{72}{5}, I_y=\frac{96}{7}$.

6. $\frac{4}{9}MR^2$.

(B)

1. (1) $2\ln 2-\frac{5}{4}$; (2) 6π.

2. $\left(0,\frac{7}{3}\right)$.

4. $F=\left\{0,0,2k\pi a\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}-\frac{1}{a}\right)\right\}$.

5. $F_x=F_y=0,F_z=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)k\pi,k>0$ 为引力常数.

总 习 题 (8)

1. 填空题:

(1) 积分$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 的值等于________.

(2) 交换积分的顺序,则$\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y=$________.

(3) 交换积分的顺序,则$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-y}^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x=$________.

(4) 由xOy平面及曲面$z=x^2+y^2,x^2+y^2=4$所围成立体的体积$V=$____.

2. 选择题(只有一个答案是正确的):

(1) 设D是xOy平面上以$(1,1),(-1,1)$和$(-1,-1)$为顶点的三角形区域,D_1为第一象限的部分,则$\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$等于(　　);

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; (B) $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; (D) 0.

(2) 设有空间区域$\Omega_1:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0$;$\Omega_2:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$. 则(　　);

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1}x\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}x\mathrm{d}V$; (B) $\iiint\limits_{\Omega_1}y\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}y\mathrm{d}V$;

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}z\mathrm{d}V$; (D) $\iiint\limits_{\Omega_1}xyz\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}xyz\mathrm{d}V$.

(3) 设$f(x,y)$是有界闭区域$D:x^2+y^2\leqslant a^2$上的连续函数,则当$a\to 0$时,$\frac{1}{\pi a^2}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$的极限(　　).

(A) 不存在; (B) 等于$f(0,0)$;

(C) 等于$f(1,1)$; (D) 等于$f(1,0)$.

(4) 设区域$D:0\leqslant y\leqslant x,0\leqslant x\leqslant\pi$,则二重积分$\iint\limits_D\sqrt{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$(　　).

(A) 0; (B) $\dfrac{\pi}{2}$; (C) 2; (D) π.

3. 设Ω:$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$;Ω_1:$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2, z\geqslant 0$;$\Omega_2$:$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$. 问下列等式是否成立,请说明理由.

(1) $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}V=0, \iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V=0$;

(2) $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}V, \iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}V$;

(3) $\iiint\limits_{\Omega_1} xy\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega_1} yz\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega_1} zx\mathrm{d}V=0$.

4. 求 $I=\iint\limits_{D}\dfrac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$由曲线$y=\dfrac{x^2}{2}$与直线$y=x$围成.

5. 计算$\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\dfrac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\dfrac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$.

6. 求 $I=\iint\limits_{D}\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$是区域$x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$.

7. 设D是曲线$\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1$与$x$轴、$y$轴所围成的区域,$a>0, b>0$. 计算$I=\iint\limits_{D} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

8. 求 $I=\iint\limits_{D}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$:$x^2+y^2\leqslant x+y+1$.

9. 设Ω由$y=\sqrt{x}, y=0, z=0, x+z=\dfrac{\pi}{2}$围成,计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{y\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

10. 将三次积分$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{3(x^2+y^2)}}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}z$变换为柱坐标及球坐标形式.

11. 计算$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$,其中$\Omega$为由平面曲线$\begin{cases}y^2=2z,\\ x=0\end{cases}$绕$z$轴旋转一周形成的曲面与平面$z=8$所围成的区域.

12. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}V$,其中$\Omega$:$\begin{cases}1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4,\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0.\end{cases}$

13. 求由曲面$x^2+y^2=az$,柱面$x^2+y^2=ay\ (a>0)$以及平面$z=0$所围的立体体积.

14. 已知两个球的半径分别为a和$b\ (a>b)$,且小球的球心在大球的球面上,试求小球在大球内的那一部分的体积.

15. 求以下各均匀物体(密度$\rho=1$)对原点的转动惯量I_0:

(1) 圆盘$(x-a)^2+y^2\leqslant a^2$; (2) 球体$x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2$.

16. 在半径为a的均匀半球体的大圆上接一个半径与球的半径相等,材料相同的均匀圆柱体,为使拼接后的立体质心位于球心上,该圆柱体的高应为多少?

17. 设$f(x)\in C[0,+\infty)$,且满足方程$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,求$f(t)$.

18. 设$f(x)\in C[0,1]$,求证$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

19. 设$f(x)\in C[0,1]$,求证$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}y\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z=\dfrac{1}{3!}\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^3$.

答案与提示

1. (1) $\frac{1}{2}(1-e^{-4})$;　(2) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{e^y}^{e} f(x,y)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_{-x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^1 f(x,y)\mathrm{d}y$;　(4) 8π.

2. (1) (A);　(2) (C);　(3) (B);　(4) (D).

3. (1) 两个等式均成立;　(2) 第一个等式错,第二个等式对;　(3) 等式成立.

4. $\ln 2$.

5. $\frac{4}{\pi^3}(2+\pi)$.

6. $\frac{\pi}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}$.

7. $\frac{ab^2}{30}$.

8. $\frac{3\pi}{2}$.

9. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

10. $I=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta} r\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{3}r} f(\sqrt{r^2+z^2})\mathrm{d}z=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}}\rho^2 f(\rho)\mathrm{d}\rho$.

11. $\frac{1024\pi}{3}$.

12. $\frac{\pi}{4e^4}(2e^3-5)$.

13. $\frac{3\pi}{32}a^3$.

14. $\left(\frac{2}{3}-\frac{b}{4a}\right)\pi b^3$.

15. (1) $I_0=\frac{3}{2}\pi a^4\rho$;　(2) $\frac{32}{15}\pi a^5\rho$.

16. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

17. $f(t)=(1+4\pi t^2)e^{4\pi t^2}$.

第 9 章　曲线积分与曲面积分

在前面的章节中,我们利用定积分、重积分的工具解决了一类求面积、体积、不均匀物体的质量等问题. 在实际中还有许多新的问题,例如求不均匀的曲线形或曲面形物体的质量,求质点沿曲线移动时变力所作的功,以及流体流过一曲面的流量等等. 这些问题的解决需要进一步推广积分的概念. 为此目的,我们将在本章中引进两类曲线积分及两类曲面积分的概念,并给出它们的计算方法.

在许多实际问题中,常常需要研究物理量在空间区域的分布及其随时间变化的规律. 如在天气预报工作中,需要知道温度、气压、气流速度等在空间区域中的分布,及其随时间变化的规律;对引力场的规律的研究,则可使人们有可能确定行星和人造卫星的轨道. 所谓"场",就是指某种物理量在某个空间区域中的分布.

物理量一般可分为两类:一类是数量,如温度、压力、密度等,它们在某空间区域中的分布就称为温度场、压力场、密度场,这些场统称为**数量场**. 给定一个数量场就相当于给定了一个四元函数

$$u = u(x, y, z, t).$$

另一类物理量是向量,如速度、引力、电场强度等,它们在某空间区域中的分布称为速度场、引力场、电场等,这些场统称为**向量场**. 给定一个向量场就相当于给定了一个四元向量值函数

$$F = F(x, y, z, t) = P(x, y, z, t)i + Q(x, y, z, t)j + R(x, y, z, t)k.$$

若场明显地依赖于时间 t,且随时间的变化而变化,这种场称为**不稳定场**;若场不依赖于时间 t,不随时间而变化,这种场称为**稳定场**. 我们仅限于讨论稳定场. 本章将给出场论的三个基本公式:格林公式、高斯公式和斯托克斯公式. 最后我们还采用较直观的方法引进外积和外微分的概念,将上述三个公式纳入一个统一的形式之中,以达到拓宽视野的目的.

9.1　第一类曲线积分

考虑一个实际问题:设有一曲线形的物体占有空间的一条曲线 C(见图 9.1),其线密度为 $\rho(x, y, z)$,$(x, y, z) \in C$,并设 ρ 是连续函数. 求这个不均匀曲线形物体的质量(下面为方便起见,我们就说求曲线 C 的质量).

先采用微元法进行分析. 在曲线 C 上点 (x, y, z) 处取一段微元 $\mathrm{d}s$(见图 9.1),并近似地认为这一小段 $\mathrm{d}s$ 上的质量分布是均匀的. 那么这段微元的质量是 $\rho(x, y, z)\mathrm{d}s$. 然后将这些无穷小的质量沿曲线 C 累加(即积分),便得到整条曲线 C 的质量:

$$m=\int_C \rho(x,y,z)\mathrm{d}s, \tag{9.1.1}$$

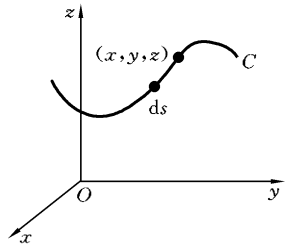


图9.1

这种形式的积分称为第一类曲线积分. 由于 $\mathrm{d}s$ 在这里是弧长的微分,故亦称为对弧长的曲线积分.

假设曲线 C 的参数表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k},\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta. \tag{9.1.2}$$

其中 $x(t)$、$y(t)$、$z(t)$ 连续可微,且 $x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)\neq 0$. 那么弧长微分的表达式为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

于是由(9.1.1)式的启发,我们可以有

$$\int_C \rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta \rho(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t,$$

右端是一个定积分. 由此便可引进下列概念.

定义9.1.1 设有光滑曲线 C,其方程为(9.1.2),$f(x,y,z)$ 是定义在 C 上的连续函数,则定义

$$\int_C f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t, \tag{9.1.3}$$

称左端是函数 $f(x,y,z)$ 在曲线 C 上的**第一类曲线积分**,它是用右端的一种特定形式的定积分来定义的,又称为对弧长的曲线积分.

可以证明,上述定义与曲线的参数方程的表示无关,因而定义是合理的.

由定义以及定积分的性质,不难推知第一类曲线积分有以下的基本性质.

(1) **线性性质**:设 f 和 g 在曲线 C 上的第一类曲线积分都存在,k_1、k_2 是两个常数,则 k_1f+k_2g 在曲线 C 上的第一类曲线积分也存在,并且

$$\int_C (k_1f+k_2g)\mathrm{d}s=k_1\int_C f\mathrm{d}s+k_2\int_C g\mathrm{d}s.$$

(2) **可加性**:设函数 f 在曲线 C 上的第一类曲线积分存在,而 C 可以划分成两段 C_1 和 C_2,则 f 在 C_1 和 C_2 上的第一类曲线积分都存在;反之,若 f 在 C_1 和 C_2 上的第一类曲线积分都存在,则 f 在 C 上的第一类曲线积分存在. 在这种情形下并且有

$$\int_C f\mathrm{d}s=\int_{C_1} f\mathrm{d}s+\int_{C_2} f\mathrm{d}s.$$

例9.1.1 求螺旋线 C:$\boldsymbol{r}(t)=a\cos t\boldsymbol{i}+a\sin t\boldsymbol{j}+bt\boldsymbol{k}$,$0\leqslant t\leqslant 2\pi$($a>0$,$b>0$)的质量. 已知其线密度为 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

解 所求质量为

$$m=\int_C (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s,$$

C 的弧长的微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t=\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t.$$

因此

$$m=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t+b^2t^2)\cdot\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\mathrm{d}t=\sqrt{a^2+b^2}\left(2\pi a^2+\frac{8}{3}\pi^3b^3\right).\qquad\square$$

若L是光滑的平面曲线,它的方程为

$$r(t)=x(t)i+y(t)j,\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

其中$x'^2(t)+y'^2(t)\neq0$,则有类似于(9.1.3)式的公式成立:

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t.\tag{9.1.4}$$

若平面曲线L的方程为直角坐标方程

$$y=y(x),\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

则可令x为参数,由(9.1.4)式即得

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x.\tag{9.1.5}$$

例9.1.2　计算曲线积分$\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s$,其中$L$为曲线$x=a(\cos t+t\sin t)$,$y=a(\sin t-t\cos t)(0\leqslant t\leqslant2\pi)$.

解　弧长微分为　$\mathrm{d}s=\sqrt{a^2t^2\cos^2t+a^2t^2\sin^2t}\mathrm{d}t=at\mathrm{d}t.$

由公式(9.1.4),有

$$\begin{aligned}\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s&=\int_0^{2\pi}[a^2(\cos t+t\sin t)^2+a^2(\sin t-t\cos t)^2]at\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}a^3t(1+t^2)\mathrm{d}t=2\pi^2a^3(1+2\pi^2).\qquad\square\end{aligned}$$

例9.1.3　求一均匀半圆周(设密度$\rho=1$)对位于圆心的单位质点的引力.

解　将坐标原点置于圆心,设圆的半径为a,并且该半圆周是上半圆周(见图9.2).设所求引力为

$$F=F_xi+F_yj.$$

由对称性知$F_x=0$.下面我们利用微元法求F_y,在圆周上点(x,y)处取一微元$\mathrm{d}s$,其质量为$\rho\mathrm{d}s$.把这个微元近似地看作一个点,它对位于圆心处的单位质点的引力的大小是

$$k\frac{\rho\mathrm{d}s}{a^2}=k\frac{\mathrm{d}s}{a^2},\quad k\text{为比例常数}.$$

引力的方向是向量$xi+yj$的方向,其单位向量是$e_r=\frac{1}{a}(xi+yj)$.于是该引力为

$$k\frac{\mathrm{d}s}{a^2}e_r=k\frac{\mathrm{d}s}{a^3}(xi+yj).$$

将它沿半圆周C累加起来,便得到

$$F_y=\int_C k\frac{y}{a^3}\mathrm{d}s.$$

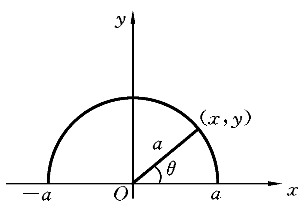


图9.2

半圆周 C 的方程是 $y=\sqrt{a^2-x^2}\,(-a\leqslant x\leqslant a)$，其弧长微分是

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x.$$

利用公式(9.1.5)，得

$$F_y=k\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^3}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{k}{a^2}\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x=\frac{2k}{a}.$$ □

习　题　9.1

(A)

1. 回答下列问题：
   (1) 如何运用微元法求曲线的质量？
   (2) 第一类曲线积分怎样定义？
2. 计算下列曲线积分：
   (1) $\int_L xy\,\mathrm{d}s$，其中 L 是曲线 $x=t, y=\dfrac{t^2}{2}, 0\leqslant t\leqslant 1$.
   (2) $\oint_L (x+y)\,\mathrm{d}s$，其中 L 是以点 $(0,0),(1,0),(1,1)$ 为顶点的三角形的边界.
   (3) $\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s$，其中 C 是以 a 为半径、圆心在原点的右半圆周.
   (4) $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$，$C$ 为圆周 $x^2+y^2=ax$.
3. 计算曲线积分 $\int_C y\,\mathrm{d}s$ 与 $\int_C |y|\,\mathrm{d}s$，其中 C 是右半圆周 $x^2+y^2=a^2, x\geqslant 0, a>0$.
4. 计算曲线积分 $\int_L x^2\,\mathrm{d}s$，其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线.

(B)

1. 求 $\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$，$L$ 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界.
2. 求曲线 $x=at, y=\dfrac{a}{2}t^2, z=\dfrac{a}{3}t^3\,(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的质量，其密度函数 $\rho=\sqrt{\dfrac{2y}{a}}$.
3. 设在 xOy 平面内有一分布着质量的曲线 L，在点 (x,y) 处它的线密度为 $\rho(x,y)$，试用第一类曲线积分分别表达：
   (1) 曲线 L 对 x 轴、对 y 轴的转动惯量 I_x、I_y；
   (2) 曲线 L 的重心坐标 $\bar{x}, \bar{y}$.
4. 求半径为 a、中心角为 2φ 的均匀圆弧(密度 $\rho=1$)的质心.

答案与提示

(A)

2. (1) $\dfrac{1}{15}(1+\sqrt{2})$；　(2) $2+\sqrt{2}$；　(3) $2a^2$；　(4) $2a^2$.

3. $0, 2a^2$.

4. $\frac{2}{3}\pi a^3$.

(B)

1. $e^a(2+\frac{\pi a}{4})-2$.

2. $\frac{a}{8}\left(3\sqrt{3}-1+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$.

3. (1) $I_x=\int_L y^2\rho(x,y)\mathrm{d}s, I_y=\int_L x^2\rho(x,y)\mathrm{d}s$;　(2) $\bar{x}=\frac{\int_L x\rho(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L\rho(x,y)\mathrm{d}s}, \bar{y}=\frac{\int_L y\rho(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L\rho(x,y)\mathrm{d}s}$.

4. $(\frac{a\sin\varphi}{\varphi}, 0)$

9.2　第二类曲线积分

9.2.1　第二类曲线积分的概念和性质

我们还是从一个实际问题开始. 设$D\subset\mathbb{R}^2$是一个开区域,$\boldsymbol{F}$是定义于D内的一个力场,即

$$\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j},\quad (x,y)\in D.$$

假设函数P、Q在D上连续,从而$\boldsymbol{F}$是连续的. 设有一质点在力$\boldsymbol{F}$的作用下,从D内某A点出发,沿着D内一条光滑曲线L运动到点B. 求变力$\boldsymbol{F}$对该质点所作的功.

在第4章中,我们曾经应用定积分求出了变力沿直线对质点作的功,那里的公式显然不能搬到这里来,但是解决问题的微元法仍然是可以采用的. 为此,我们在曲线L上点(x,y)处取一微元$\mathrm{d}s$(弧长微分),并由此作出一个向量$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$,它的模长为$\mathrm{d}s$,它的方向与曲线L在点(x,y)处的切向量相同,并和从A到B的方向一致(见图9.3). 设单位切向量是$\boldsymbol{e}_\tau$,则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{e}_\tau\mathrm{d}s.$$

若质点在力$\boldsymbol{F}$的作用下位移是$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$,我们近似地把微元$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$看作直线段,则$\boldsymbol{F}$对此质点所作的功是

$$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_\tau\mathrm{d}s.$$

将它沿曲线L从A点到B点累加起来,便得到所求的功为

$$W=\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_\tau\mathrm{d}s.$$

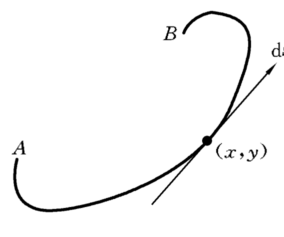


图9.3

称积分$\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$为一个第二类曲线积分.

现在我们给出一般的定义.

定义 9.2.1　设 L 是一条光滑的平面曲线,起点是 A,终点是 B. 这意味着我们规定了曲线 L 上的单位切向量 e_T,其方向与曲线上从 A 点到 B 点的方向一致(见图9.4),又设 $F(x,y)$ 是一个连续的向量值函数. 定义 F 在有向曲线 L 上的**第二类曲线积分** $\int_L F \cdot \mathrm{d}s$ 是

$$\int_L F \cdot \mathrm{d}s = \int_L F \cdot e_T \mathrm{d}s,$$

它是用右端的一个已知的第一类曲线积分来定义的.

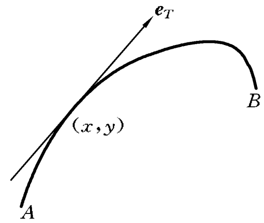


图9.4

由定义可直接推得下列性质.

(1) **线性性质**:设 F、G 是两个连续的向量值函数,k_1,k_2 是两个常数,曲线 L 如前所述,并给定了方向,则

$$\int_L (k_1 F + k_2 G) \cdot \mathrm{d}s = k_1 \int_L F \cdot \mathrm{d}s + k_2 \int_L G \cdot \mathrm{d}s.$$

(2) **可加性**:　设 F 是连续的向量值函数,曲线 L 如前所述. 又设 L 可划分成两段 L_1 和 L_2,并且 L_1 和 L_2 的方向都与 L 的方向一致,则

$$\int_L F \cdot \mathrm{d}s = \int_{L_1} F \cdot \mathrm{d}s + \int_{L_2} F \cdot \mathrm{d}s.$$

(3) 设 F 是连续的向量值函数,L 如前所述. 又设 L^- 是 L 的反向曲线(即 L^- 与 L 的方向恰好相反). 则

$$\int_L F \cdot \mathrm{d}s = -\int_{L^-} F \cdot \mathrm{d}s.$$

性质(3)表明第二类曲线积分是有方向性的,它是区别于第一类曲线积分的重要特征. 第二类曲线积分的有向性与作功的概念是一致的,如果质点由曲线 L 上的 A 点移动到 B 点时,力 F 作了功,则质点由 B 点沿原路移动到 A 点时,质点就要克服力 F 作功,即力 F 作了负功.

9.2.2　第二类曲线积分的计算

设平面光滑曲线 L 的方程是

$$r(t) = x(t)i + y(t)j \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta).$$

设参数 $t=\alpha$ 对应于 L 的起点 A,参数 $t=\beta$ 对应于终点 B,并假设参数增大的方向与曲线的方向一致,则切向量

$$T = r'(t) = \{x'(t), y'(t)\}$$

与曲线 L 的方向一致,单位切向量为

$$e_T = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}\{x'(t), y'(t)\}.$$

设
$$F(x,y) = P(x,y)i + Q(x,y)j.$$

其中P、Q 是连续函数,注意到曲线L 上的弧长微分是

$$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt,$$

因此得

$$\int_L F\cdot ds=\int_L F\cdot e_\tau ds=\int_\alpha^\beta[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]dt. \tag{9.2.1}$$

若参数$t=\alpha$对应于终点B,$t=\beta$对应于起点A,这时参数增大的方向与指定曲线的方向恰好相反,为此考虑反向曲线$L^-=BA$.对于曲线L^-来说,参数增大的方向与曲线的方向一致,因此由上面的讨论知

$$\int_{L^-}F\cdot ds=\int_{L^-}F\cdot e_\tau ds=\int_\alpha^\beta[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]dt,$$

由第二类曲线积分的有向性及定积分的性质,即得

$$\begin{aligned}\int_L F\cdot ds&=\int_L F\cdot e_\tau ds\\&=\int_\beta^\alpha[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]dt.\end{aligned} \tag{9.2.2}$$

由此可知,把第二类曲线积分化为定积分计算时,把与起点对应的参数作为下限,与终点对应的参数作为上限.

如果C 是一条光滑的空间曲线,其方程为

$$r(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k\qquad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta),$$

并设$t=\alpha$对应于C 的起点,$t=\beta$对应于C 的终点,又设F 是连续的向量值函数,即

$$F(x,y,z)=P(x,y,z)i+Q(x,y,z)j+R(x,y,z)k.$$

则可类似地定义F 在C 上的第二类曲线积分,并有计算公式:

$$\begin{aligned}\int_C F\cdot ds&=\int_C F\cdot e_\tau ds\\&=\int_\alpha^\beta[P^*(t)x'(t)+Q^*(t)y'(t)+R^*(t)z'(t)]dt,\end{aligned} \tag{9.2.3}$$

其中　$P^*(t)=P(x(t),y(t),z(t)),\quad Q^*(t)=Q(x(t),y(t),z(t)),$

$$R^*(t)=R(x(t),y(t),z(t)).$$

9.2.3　第二类曲线积分的几个等价形式

设平面光滑曲线L 的单位切向量为

$$e_\tau=\{\cos\alpha,\cos\beta\},$$

又设　$F(x,y)=P(x,y)i+Q(x,y)j,$

则　$\displaystyle\int_L F\cdot e_\tau ds=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds.$

又因为弧长微分ds与dx、dy 有关系式(见图9.5)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\cos\alpha,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\cos\beta$$

所以上述积分又可写成

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{e}_T\mathrm{d}s=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

于是得到了第二类曲线积分的四个等价形式：

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s},\ \int_L \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{e}_T\mathrm{d}s,\ \int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)\mathrm{d}s,\ \int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

对空间曲线的情形也有类似的等价形式,此处不再列举.由第四种等价形式,第二类曲线积分又称为**对坐标的曲线积分**.

下面给出几个计算的例子.

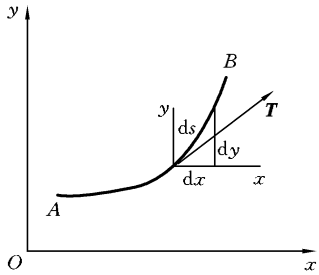


图9.5

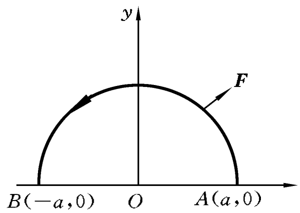


图9.6

例9.2.1　计算曲线积分$\int_L x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$,其中$L:x^2+y^2=a^2,y\geqslant 0$,起点为$A(a,0)$,终点为$B(-a,0)$(见图9.6).

解　取L的参数方程：

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t\quad (0\leqslant t\leqslant \pi).$$

其中$t=0$对应于起点A,$t=\pi$对应于终点B.由公式(9.2.1)得

$$\int_L x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}[a\cos t\cdot(-a\sin t)+a\sin t\cdot a\cos t]\mathrm{d}t=0$$

(请读者试着给这题一个物理解释).　□

由于第二类曲线积分有下面的等价形式：

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

它的计算公式又是

$$\begin{aligned}\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}&=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_{\alpha}^{\beta}[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因此能够很容易地记住将第二类曲线积分化为定积分计算的方法.被积函数P,Q中

的 x、y 用曲线的参数方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 代入, $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ 用 $x'(t)\mathrm{d}t$、$y'(t)\mathrm{d}t$ 代入,然后把与起点对应的参数作下限,与终点对应的参数作上限即成.

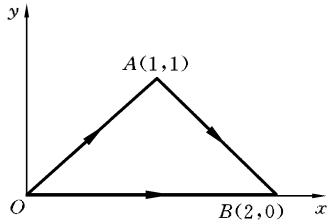


图9.7

例9.2.2　计算曲线积分

$$I=\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y,$$

其中 L 为:(1) 折线 OAB;(2)直线段 OB(见图9.7).

解　(1)折线 OAB 可分成 OA 与 AB 两段,故

$$I=\int_{OA}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y+\int_{AB}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y.$$

令 x 作参数,则直线段 OA 的方程为

$$x=x,\quad y=x\quad(0\leqslant x\leqslant 1),$$

起点对应于 $x=0$,终点对应于 $x=1$,所以

$$\begin{aligned}\int_{OA}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y&=\int_0^1[(x^2+x^2)\cdot 1+(x^2-x^2)\cdot 1]\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

直线段 AB 的方程为

$$x=x,\quad y=-x+2\quad(1\leqslant x\leqslant 2),$$

起点对应于 $x=1$,终点对应于 $x=2$,所以

$$\begin{aligned}&\int_{AB}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y\\&=\int_1^2\{[x^2+(-x+2)^2]+[x^2-(-x+2)^2]\cdot(-1)\}\mathrm{d}x\\&=\int_1^2 2(-x+2)^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

因此 $I=\frac{4}{3}$.

(2) 直线段 OB 的参数方程为

$$x=x,\quad y=0\quad(0\leqslant x\leqslant 2).$$

所以 $\displaystyle\int_{OB}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y=\int_0^2[x^2+(x^2-0^2)\cdot 0]\mathrm{d}x=\frac{8}{3}.$ □

我们看到,上题中的曲线积分的值不仅与积分路径的起点及终点有关,还与路径本身有关.尽管有相同的起点及终点,但当路径不同时,积分值可以不相等.

例9.2.3　计算曲线积分 $I=\displaystyle\int_L\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,其中 L 是半平面 $x>0$ 内的光滑曲线 $r(t)=x(t)i+y(t)j$,起终点分别为(1,0),(6,8).

解　设起终点所对应的参数值分别为 t_0 和 t_1.于是 I 化为下面的定积分:

$$I=\int_{t_0}^{t_1}\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\frac{[x^2(t)+y^2(t)]'}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\right)'\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\bigg|_{t_0}^{t_1}=\sqrt{6^2+8^2}-\sqrt{1^2+0^2}=9.$$ □

例9.2.3说明,有的曲线积分与路径的起点及终点有关,而与如何连接起点及终点的路径本身无关.

例9.2.4　计算曲线积分$I=\int_C x^3\mathrm{d}x+y^3\mathrm{d}y+z^3\mathrm{d}z$,其中$C$是从点$A(3,2,1)$到点$B(0,0,0)$的直线段$AB$.

解　直线段AB的方程是
$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1},$$
化为参数方程:$r(t)=3ti+2tj+tk$,其中t从1变到0. 于是
$$I=\int_1^0[(3t)^3\cdot 3+(2t)^3\cdot 2+t^3]\mathrm{d}t=98\int_1^0 t^3\mathrm{d}t=-\frac{49}{2}.$$ □

例9.2.5　设有一质量为m的质点受重力作用在空间沿某光滑曲线弧AB移动,求重力所作的功.

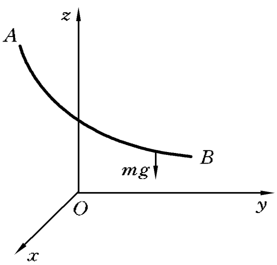


图9.8

解　取一空间直角坐标系,z轴铅直向上,则重力在坐标轴上的投影分别为
$$P(x,y,z)=0,\quad Q(x,y,z)=0,\quad R(x,y,z)=-mg,$$
其中g为重力加速度. 设A、B点的坐标分别为(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)(见图9.8),则质点从A点移动到B点时重力所作的功为
$$W=\int_{AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=-\int_{z_1}^{z_2}mg\mathrm{d}z=-mg(z_2-z_1).$$
我们看到,功W的值只与高度有关,而与A到B的具体路径无关. □

当第二类曲线积分的路径为平面光滑闭曲线时,起点与终点重合,只能具体指明曲线的方向是两个可能方向中的哪一个方向. 只要方向不变,计算闭路曲线积分时,可取闭路上任一点作为起点,曲线积分的值与起点无关. 我们规定逆时针方向为平面闭路的正向. 以后若不特别声明闭路的方向时,总认为积分是沿闭路正向来取的.

例9.2.6　计算曲线积分$\oint_C(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$,其中$C$为依逆时针方向通过的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解　利用椭圆的参数方程
$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$
则有
$$\oint_C(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}[(a\cos t+b\sin t)(-a\sin t)+(a\cos t-b\sin t)b\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(ab\cos 2t-\frac{a^2+b^2}{2}\sin 2t\right)\mathrm{d}t=0. \qquad \square$$

注意,上题中的积分符号 $\oint_C$ 表示闭路 C 上的积分.

习　题　9.2

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 质点在变力 F 作用下沿曲线 L 移动,变力 F 所作的功如何表示?

(2) 第二类曲线积分的定义是怎样的?

(3) 第二类曲线积分有几个等价形式?

(4) 第二类曲线积分的计算公式是怎样的?

2. 计算下列第二类曲线积分:

(1) $\int_{OA}x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x$, 其中 O 为坐标原点, A 点的坐标为 $(1,2)$. 并设:(a) OA 为直线段;(b) OA 为抛物线 $y=2x^2$;(c) OA 为由 Ox 轴上的线段 OB 和平行于 Oy 轴的线段 BA 所组成的折线;

(2) $\int_L(x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$, L 是抛物线 $y^2=x$ 上从点 $(1,-1)$ 到 $(1,1)$ 的一段弧;

(3) $\int_{AB}y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y$, $A(1,1)$, $B(2,4)$, 方向从 A 到 B:(a) AB 为直线段 $\overline{AB}$;(b) AB 为抛物线段 $y=x^2(1\leqslant x\leqslant 2)$;(c) AB 为折线段 $\overline{AC}+\overline{CB}$,其中 $C(2,1)$,方向从 A 到 C,再从 C 到 B;

(4) $\oint_C\dfrac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 C 是依逆时针方向通过的圆周 $x^2+y^2=a^2$.

3. 求力场 F 对运动的单位质点所作的功,此质点沿曲线 C 从 A 点运动到 B 点:

(1) $F=(x-2xy^2)i+(y-2x^2y)j$, C 为平面曲线 $y=x^2$, $A(0,0)$, $B(1,1)$;

(2) $F=(x+y)i+xyj$, C 为平面曲线 $y=1-|1-x|$, $A(0,0)$, $B(2,0)$;

(3) $F=(x-y)i+(y-z)j+(z-x)k$, C 为空间曲线 $r(t)=ti+t^2j+t^3k$, $A(0,0,0)$, $B(1,1,1)$;

(4) $F=y^2i+z^2j+x^2k$, C 为曲线 $r(t)=a\cos ti+b\sin tj+ctk$ (a、b、c 为正数), $A(a,0,0)$, $B(a,0,2\pi c)$.

4. 求 $I=\oint_C|y|\mathrm{d}x+|x|\mathrm{d}y$, 其中 C 为以点 $A(1,0)$, $B(0,1)$ 及 $C(-1,0)$ 为顶点的三角形的边界曲线,取逆时针方向.

(B)

1. 设 C 是一条简单的光滑闭曲线,取逆时针方向为正向,其参数方程为 $x=x(s)$, $y=y(s)$, s 为弧长.

(1) 若记 C 上的单位切向量为 $e_T=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}i+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}j$,则 C 上的单位(外)法向量为 $e_n=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}i-\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}j$;

(2) 若 $u(x,y)$ 是可微函数,试将对弧长的曲线积分 $\oint_C\dfrac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$ 化为对坐标的曲线积分.

2. 设有稳定的流体运动(即流速不随时间改变的),流体层充分薄,可看成一个平面问题,每点处的

流速可表为向量 $v(x,y)=P(x,y)i+Q(x,y)j$. 平面上给定曲线 C,并给定了单位法向量的指向.

(1) 用微元法证明单位时间内流出曲线 C 的流量微元为

$$\mathrm{d}q(x,y)=[P(x,y)\cos(e_n,x)+Q(x,y)\cos(e_n,y)]\mathrm{d}s;$$

(2) 用微元法证明单位时间内从区域 D 内渗出来或漏下去的流量微元为(D 为 C 所围区域)

$$\mathrm{d}q^*(x,y)=\left[\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

(3) 证明流体通过 C 的流量为

$$\oint_C[P\cos(e_n,x)+Q\cos(e_n,y)]\mathrm{d}s=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

答案与提示

(A)

2. (1) (a) 2,(b) 2,(c) 2; (2) $-\dfrac{14}{15}$; (3) (a) -2,(b) $-\dfrac{7}{3}$,(c) -5; (4) -2π.

3. (1) 0; (2) $\dfrac{8}{3}$; (3) $\dfrac{1}{60}$; (4) $4\pi bc^2+\pi a^2c$.

4. -1.

(B)

1. (2) $\oint_C\dfrac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\oint_C-\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$.

9.3 第一类曲面积分

9.3.1 曲面面积

本节要讨论展布在曲面上的积分的问题,为此,先弄清楚曲面的面积怎样计算.

设给定空间曲面 S,它的方程是

$$z=f(x,y),$$

其中 $(x,y)\in D$,而 D 是曲面 S 在 xOy 平面上的投影区域. 又设偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 在 D 上连续.

我们用切平面近似代替曲面的办法来求曲面的面积. 为此,将 D 划分成 n 个小区域:$D_1,D_2,\cdots,D_n$,在 D_i 上任取一点 $(x_i,y_i)\in D_i(i=1,2,\cdots,n)$,相应地曲面 S 也可划分成 n 小块:$S_1,S_2,\cdots,S_n$,并且每个 S_i 上有一点 $M_i(x_i,y_i,z_i)$,$z_i=f(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$. 过 M_i 点作曲面 S 的切平面 π_i,在 M_i 点的法向量为

$$n_i=\{-p_i,-q_i,1\},$$

其中 $p_i=f_x(x_i,y_i)$,$q_i=f_y(x_i,y_i)$. 以 D_i 的边界为准线,作母线平行于 z 轴的柱面,介于该柱面内的平面 π_i 的一部分,记作 σ_i,显然 σ_i 在 xOy 平面上的投影为 D_i(见图 9.9).

由于D_i的面积(仍记为D_i)存在,所以σ_i的面积(仍记为σ_i)也存在,它不仅与D_i有关,也与它们所在的平面的法向量夹角有关:

$$D_i = \sigma_i\cos(n_i, z)$$

当σ_i为平行四边形时,通过两向量的叉积,容易得出该公式成立,一般情形看成平行四边形和的极限.因为

$$\cos(n_i, z) = \frac{1}{\sqrt{1+p_i^2+q_i^2}},$$

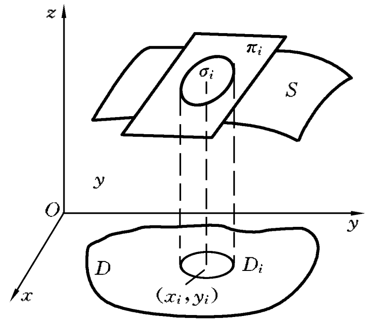


图9.9

所以 $$\sigma_i = \sqrt{1+p_i^2+q_i^2}\cdot D_i.$$

于是定义光滑曲面S的面积为

$$S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+p_i^2+q_i^2}\cdot D_i = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中$p=f_x(x,y)$,$q=f_y(x,y)$,λ的含义见第8章8.1节.于是,曲面S的面积可表示为一个二重积分:

$$S = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{9.3.1}$$

其中$\mathrm{d}S=\sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$称为曲面的面积微元.

例9.3.1　求球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的面积.

解　由对称性,只需求出位于第一卦限的那部分球的表面积S_1(见图9.10),整个球面的面积即为

$$S = 8S_1.$$

在第一卦限中球面的方程为

$$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

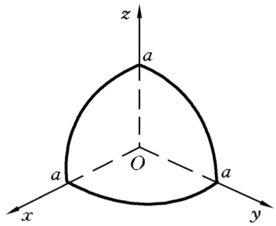


图9.10

它在xOy平面的投影区域为$D: x^2+y^2\leqslant a^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0$,由

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

得 $$\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

所以

$$S_1 = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注意到被积函数在D的一段边界曲线$x^2+y^2=a^2(x\geqslant 0, y\geqslant 0)$上不连续,因此采用下面的方法处理:先取区域$D_\varepsilon: x^2+y^2\leqslant(a-\varepsilon)^2$,其中$0<\varepsilon<a$,算出对应于$D_\varepsilon$上的球面面积$S_1'$后,令$\varepsilon\to 0$取$S_1'$的极限,就得到所求的面积$S_1$.

$$S_1' = \iint_{D_\varepsilon} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_\varepsilon} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{a-\varepsilon} \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

$$= \frac{\pi a}{2} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{\pi a}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - (a-\varepsilon)^2}\right),$$

于是
$$S_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} S_1' = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\pi a}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - (a-\varepsilon)^2}\right) = \frac{\pi a^2}{2},$$

由此得
$$S = 8S_1 = 4\pi a^2.$$
□

9.3.2 第一类曲面积分的概念和性质

假设今后的讨论中所涉及的曲面都是光滑的,即曲面上各点处都存在切平面,且当点在曲面上连续变动时,切平面也连续变动.又假定曲面的边界曲线是分段光滑的曲线.今后不再重复说明.

我们现在要研究第一类曲面积分的概念,其引进的方式与第一类曲线积分十分相似.如果把本章9.1节中所研究的质量问题再拿到这里来,而把曲线C换为光滑曲面S,线密度改为面密度,弧长微元$\mathrm{d}s$换成曲面面积微元$\mathrm{d}S$,曲线上的点改为曲面上的点(x,y,z),那么,当面密度函数$\rho(x,y,z)$连续时,曲面S的质量便可表示为

$$M = \iint_S \rho(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

这就是第一类曲面积分.

如果曲面的方程是

$$z = z(x,y), \quad (x,y) \in D,$$

D是xOy平面上的区域,那么

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中$p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$,$q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$,于是

$$M = \iint_S \rho(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_D \rho(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这表明左端的第一类曲面积分就是右端的二重积分.

现在抽象出第一类曲面积分的概念.

定义9.3.1 设S是一个光滑曲面,它的方程是

$$z = z(x,y), \quad (x,y) \in D,$$

D是xOy平面上的区域.设$f(x,y,z)$是S上的连续函数.则定义$f(x,y,z)$在S上的**第一类曲面积分**$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$是

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

即第一类曲面积分是用右端的一个二重积分来定义的.

可以证明(此处略去)上述定义与曲面方程的表示无关.

第一类曲面积分有以下两个基本性质.

(1) **线性性质**：设f和g在光滑曲面S上的第一类曲面积分存在，k_1、k_2是两个常数，则k_1f+k_2g在S上的第一类曲面积分也存在，并且

$$\iint_S (k_1f+k_2g)\mathrm{d}S = k_1\iint_S f\mathrm{d}S + k_2\iint_S g\mathrm{d}S.$$

(2) **可加性**：设函数f在光滑曲面S上的第一类曲面积分存在，S可以划分为两个光滑曲面S_1和S_2，则f在S_1和S_2上的第一类曲面积分都存在. 反之，若f在S_1和S_2上的第一类曲面积分都存在，则f在S上的第一类曲面积分也存在，在这种情形下有

$$\iint_S f\mathrm{d}S = \iint_{S_1} f\mathrm{d}S + \iint_{S_2} f\mathrm{d}S.$$

当S为一封闭曲面时，习惯上把$f(x,y,z)$在S上的第一类曲面积分记作

$$\oiint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

9.3.3　第一类曲面积分的计算

下面通过具体的例子来说明第一类曲面积分的计算.

例9.3.2　计算曲面积分$I=\oiint_S (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$，其中$S$是球面：$x^2+y^2+z^2=a^2$.

解　由被积函数与曲面的对称性知，所求积分等于半球面S_1上的积分的两倍，其中

$$S_1: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

由
$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

得
$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

而S_1在xOy平面上的投影区域D为$x^2+y^2\leqslant a^2$. 于是有

$$\begin{aligned}I&=2\iint_{S_1}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=2\iint_D(x^2+y^2+a^2-x^2-y^2)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2a^3\iint_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=2a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{a^2-r^2}}\\&=-2\pi a\int_0^a\frac{\mathrm{d}(a^2-r^2)}{\sqrt{a^2-r^2}}=-2\pi a^3(2\sqrt{a^2-r^2})\Big|_0^a=4\pi a^4.\end{aligned}$$

本例若利用曲面的方程式先将被积函数化简，其结果立即可得，即

$$I=\iint_S (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=a^2\iint_S \mathrm{d}S=a^2\cdot 4\pi a^2=4\pi a^4.$$ □

例 9.3.3　设曲面 S 的方程为 $z=9-x^2-y^2(z\geqslant 0)$，计算曲面积分

$$I=\iint_S \frac{2x^2+2y^2+z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\mathrm{d}S.$$

解　先算出

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2},$$

再由计算公式，得

$$\begin{aligned}I&=\iint_S \frac{2x^2+2y^2+z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\mathrm{d}S\\&=\iint_D \frac{2x^2+2y^2+(9-x^2-y^2)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\sqrt{4x^2+4y^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D (9+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中 D 为 S 在 xOy 平面上的投影区域：$x^2+y^2\leqslant 9$，因此，

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^3(9+r^2)r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^3(9r+r^3)\mathrm{d}r=\frac{243\pi}{2}.$$ □

例 9.3.4　求密度 $\rho\equiv 1$ 的均匀球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$ 对于 Oz 轴的转动惯量.

解　转动惯量为

$$\begin{aligned}I_z&=\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r=2\pi a^4\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4}{3}\pi a^4.\end{aligned}$$ □

习　题　9.3

(A)

1. 回答下列问题：
   (1) 光滑曲面 S 的面积怎样定义和计算？
   (2) 第一类曲面积分是怎样定义的？
2. 计算下列第一类曲面积分：
   (1) $\oiint_S (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$，$S$ 是 $x=0, y=0$ 及 $x^2+y^2+z^2=a^2(x\geqslant 0, y\geqslant 0)$ 所围成的闭曲面；
   (2) $\oiint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S$，$S$ 为立体 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$ 的边界曲面；

(3) $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=h(h>0)$ 所截部分;

(4) $\iint\limits_S (x+y+z)\,dS$, S 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geqslant 0$;

(5) $\iint\limits_S z\,dS$, S 为曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 被平面 $z=2$ 所截下的有限部分;

(6) $\iint\limits_S y\,dS$, S 是平面 $x+y+z=4$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 截出的有限部分.

3. 求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 夹在两曲面 $x^2+y^2=y$, $x^2+y^2=2y$ 之间的那部分的面积.

(B)

1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被柱面 $x^2+y^2=ax$ 截下部分的面积.
2. 求抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$ 的质量(在 xOy 平面上方的部分),其密度为 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$.
3. 求均匀曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的质心的坐标.

答案与提示

(A)

2. (1) $\frac{3\pi}{2}a^4$; (2) $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$; (3) $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi h^3$; (4) πa^3; (5) $\frac{2\pi}{15}(25\sqrt{5}+1)$; (6) 0.

3. $\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$.

(B)

1. $2a^2(\pi-2)$.
2. $\frac{149}{30}\pi$.
3. $\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$.

9.4　第二类曲面积分

9.4.1　第二类曲面积分的概念

本节要讨论的第二类曲面积分,是一种有方向性的积分.曲面的定向比曲线的定向要复杂得多.在日常生活中,我们所见到的曲面总可以分清它的两侧.例如一张纸,我们可以谈它的上侧与下侧、前侧与后侧、左侧与右侧等.一个纸盒子,我们可以谈它的内侧与外侧.也就是说,一个曲面总可以分出它的两侧.对于有两侧的曲面,若用颜料来涂这个曲面,我们可以使曲面的一侧涂上一种颜色,曲面的另一侧涂上另一种颜色,而这两种颜色永远不会碰头.这种能够分出两侧的曲面,称之为**双侧曲面**.以后我们总假定所考虑的曲面是双侧的.至于单侧曲面.以及如何严格地定义双侧曲面及单

侧曲面,这里就不作深入的讨论了.

对于曲面的两个侧,怎样具体地加以刻画呢?设光滑曲面 S 的方程是

$$z = z(x, y),$$

函数 $z(x, y)$ 在区域 D 上有连续偏导数. 由第 7 章 7.9.2 知曲面 S 的法向量为

$$\boldsymbol{n} = \pm \{-z_x, -z_y, 1\}.$$

若要表示曲面的上侧,这时法向量应向上,即它的第三个分量应大于零(见图 9.11),所以取"+"号得到的法向量

$$\boldsymbol{n} = \{-z_x, -z_y, 1\}$$

即表示曲面 S 的上侧;若要表示曲面的下侧,这时法向量应向下,即第三个分量应小于零,所以取"-"号得到的法向量

$$\boldsymbol{n} = \{z_x, z_y, -1\}$$

即表示曲面的下侧.

现在我们考虑一个实际问题:设空间区域 Ω 内布满某种流体,其流速为 $\boldsymbol{v}(x, y, z)$. 又设 S 是 Ω 内的一个光滑曲面,求单位时间内流体通过曲面 S 的流量. 下面分几步研究这个问题.

(1) 设流速 $\boldsymbol{v}$ 是常向量,S 是一个平面,并设平面 S 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向与流速 $\boldsymbol{v}$ 的方向一致(见图 9.12). 这时,单位时间内通过 S 的流量 Φ 是 $\Phi = |\boldsymbol{v}| A$, A 是平面 S 的面积.

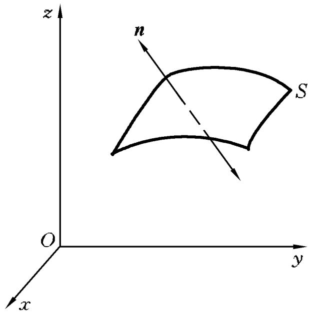


图 9.11

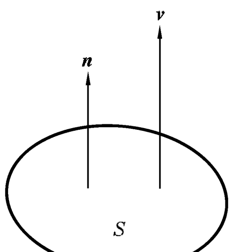


图 9.12

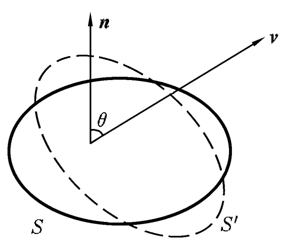


图 9.13

(2) 设平面 S 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与常向量 $\boldsymbol{v}$ 的方向不一致,其夹角 $\theta \neq 0$,则在单位时间内通过 S 的流量,等于通过 S' 的流量(见图 9.13),S' 是 S 在流速方向上的投影. 换句话说,在单位时间内通过 S 的流量,等于以 S 为底,以 $|\boldsymbol{v}|$ 为斜高的斜柱体体积,即流量 Φ 是

$$\Phi = |\boldsymbol{v}| A \cos\theta = |\boldsymbol{v}| A \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}).$$

设 $\boldsymbol{e}_n$ 表示平面 S 的单位法向量,作向量

$$\boldsymbol{S} = A \boldsymbol{e}_n,$$

则流量 Φ 可表为 $\Phi = |\boldsymbol{v}| A \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_n A$.

(3) 最后设v不是常向量,$v= v(x,y,z)$,S也不是平面,而是$\mathbb{R}^3$内的一个光滑曲面.在S上点(x,y,z)处取一面积元素$\mathrm{d}S$,作一向量

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = |\mathrm{d}S|\boldsymbol{e}_n = \mathrm{d}S\,\boldsymbol{e}_n$$

其中$\boldsymbol{e}_n$是曲面S在点(x,y,z)处的单位法向量.则单位时间内通过$\mathrm{d}S$的流量$\mathrm{d}\Phi$为

$$\mathrm{d}\Phi = v(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = v(x,y,z)\cdot \boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S,$$

将这些流量沿S累加(积分)起来,便得到所求的流量

$$\Phi = \iint_S v(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S v(x,y,z)\cdot \boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S$$

这就是一个第二类曲面积分.

下面给出一般的定义.

定义9.4.1　设有光滑曲面S,预先指定了曲面的侧,也就是预先给定了曲面S上的单位法向量$\boldsymbol{e}_n$,又设$f(x,y,z)$是一个向量值连续函数:

$$f(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}.$$

则定义f在曲面S上的**第二类曲面积分**$\iint_S f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$为

$$\iint_S f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S f\cdot \boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S, \tag{9.4.1}$$

它是用右端的一个第一类曲面积分来定义的.

由定义直接推得下列性质:

$$\iint_{S_{\text{某侧}}} f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint_{S_{\text{另一侧}}} f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

即第二类曲面积分沿不同的侧将改变符号.

9.4.2　第二类曲面积分的几个等价形式

设曲面S上的单位法向量是

$$\boldsymbol{e}_n = \{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\},$$

则由(9.4.1)式可得

$$\iint_S f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S. \tag{9.4.2}$$

与第二类曲线积分

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\mathrm{d}s$$

比较,我们还要引入第二类曲面积分的另一种记号.由本章9.3节知道,如果在曲面S上取一微元$\mathrm{d}S$,并把它近似地看作平面,则$\mathrm{d}S$在xOy平面上投影的面积为$\cos\gamma\mathrm{d}S$.类似地,$\mathrm{d}S$在yOz平面、zOx平面上投影的面积为$\cos\alpha\mathrm{d}S$,$\cos\beta\mathrm{d}S$.现在投影面积是

带正负号的:若单位法向量 e_n 与 z 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$,即 $\gamma<\frac{\pi}{2}$,则有 $\cos\gamma dS>0$;若法向量 e_n 与 z 轴正向的夹角大于 $\frac{\pi}{2}$,即 $\gamma>\frac{\pi}{2}$,则有 $\cos\gamma dS<0$. 这种投影称为有向投影. 我们用 $dydz$、$dzdx$、$dxdy$ 分别表示 dS 在 yOz 平面、zOx 平面、xOy 平面上有向投影的面积微元,即

$$dydz=\cos\alpha dS,\quad dzdx=\cos\beta dS,\quad dxdy=\cos\gamma dS,$$

则第二类曲面积分也常写成下列形式:

$$\iint_S f\cdot dS=\iint_S P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy. \tag{9.4.3}$$

这样我们便给出了第二类曲面积分的四个等价形式:

$$\iint_S f\cdot dS,\quad \iint_S f\cdot e_n dS,\quad \iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS,$$

$$\iint_S P\,dydx+Q\,dzdx+R\,dxdy.$$

9.4.3　第二类曲面积分的计算

由于我们是利用第一类曲面积分来定义第二类曲面积分的,所以,会计算第一类曲面积分也就会计算第二类曲面积分.

设给定曲面 S 的方程是

$$z=z(x,y),\quad (x,y)\in D,$$

函数 $z(x,y)$在 D 上有连续偏导数. 我们知道,S 上点 (x,y,z)处的法向量是

$$n=\pm\{-z_x,-z_y,1\},$$

n 的方向余弦是

$$\cos\alpha=\frac{-z_x}{\pm\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\quad \cos\beta=\frac{-z_y}{\pm\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\pm\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$$

又

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy,$$

故得

$$\begin{aligned}&\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS\\ &=\pm\iint_D [P(x,y,z(x,y))\cdot(-z_x)+Q(x,y,z(x,y))\cdot(-z_y)\\ &\quad +R(x,y,z(x,y))\cdot 1]dxdy.\end{aligned} \tag{9.4.4}$$

若指定曲面的侧为上侧,则公式前取“+”号;若指定曲面的侧为下侧,则公式前取“-”号. 根据这个公式,求第二类曲面积分时,不必算法向量的方向余弦,只要求出法向量 $n=\pm\{-z_x,-z_y,1\}$,且上侧取正号,下侧取负号. 然后把积分

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

中的$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$换成n的分量,$\mathrm{d}S$换成$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$即可.

例9.4.1　计算曲面积分$I=\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$S$为如图9.14所示的三角形$ABC$,方向向上.

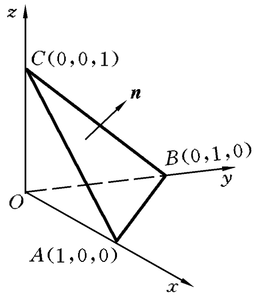


图9.14

解　首先写出曲面S的方程:

$$x+y+z=1 \quad 或 \quad z=1-x-y.$$

S在xOy平面上的投影区域D为

$$D: x+y\leqslant 1, \quad x\geqslant 0, y\geqslant 0.$$

其次求出曲面S的上侧法向量

$$n=\{-z_x,-z_y,1\}=\{1,1,1\}.$$

最后利用公式,得

$$\begin{aligned}I&=\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S\\&=\iint_D [x^2\cdot 1+y^2\cdot 1+(1-x-y)^2\cdot 1]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1+2x^2+2y^2+2xy-2x-2y)\mathrm{d}y=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

□

例9.4.2　计算曲面积分$\iint_S (z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$S$是旋转抛物面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$介于平面$z=0$及$z=2$之间的部分的下侧(见图9.15).

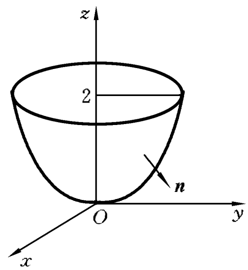


图9.15

解　由$z_x=x$,$z_y=y$得S的法向量

$$n=\{x,y,-1\},$$

S在xOy平面的投影区域为

$$D: x^2+y^2\leqslant 2^2.$$

于是有

$$\begin{aligned}&\iint_S (z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S [(z^2+x)\cos\alpha-z\cos\gamma]\mathrm{d}S\\&=\iint_D\left\{\left[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x\right]\cdot x-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\cdot(-1)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D \frac{1}{4}x(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D\left[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

注意到 $\iint\limits_D \frac{1}{4}x(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$, 故

$$\iint\limits_S (z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \left[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\left(r^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}r^2\right)r\mathrm{d}r=8\pi. \qquad \square$$

例 9.4.3 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的在第一卦限内的部分的前侧(见图 9.16).

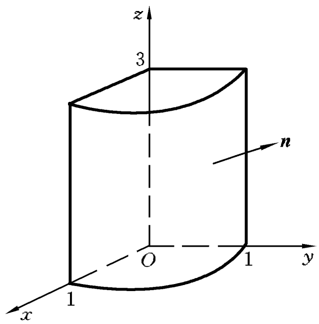


图 9.16

解 我们将积分拆成三项分别计算.

因曲面 S 在 xOy 平面上的投影为一弧段, 其面积为零, 故 $\iint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

S 在 yOz 平面上的投影区域为

$$D_{yz}: 0\leqslant y\leqslant 1,\quad 0\leqslant z\leqslant 3,$$

S 的方程可写成 $x=x(y,z)=\sqrt{1-y^2}$, 其指定侧(前侧)的法向量与 x 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$, 所以

$$\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^3\mathrm{d}z\int_0^1\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=3\left(\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{2}\arcsin y\right)\Big|_0^1=\frac{3\pi}{4}.$$

S 在 zOx 平面上的投影区域为

$$D_{zx}: 0\leqslant z\leqslant 3,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

S 的方程写成 $y=y(z,x)=\sqrt{1-x^2}$, 其指定侧的法向量与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$, 所以

$$\iint\limits_S y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}.$$

最后得

$$I=\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}. \qquad \square$$

习 题 9.4

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 曲面的方程为 $z=z(x,y)$ 时, 曲面的上侧与下侧如何通过法向量来表示?

(2) 第二类曲面积分的概念是如何引进的?

(3) 第二类曲面积分有哪四种等价形式?

2. 计算下列第二类曲面积分:

(1) $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, S 为曲面 $z = x^2 + y^2$ 在第一卦限中,$0 \leqslant z \leqslant 1$ 之间部分的上侧;

(2) $\iint\limits_S \frac{z^2}{x^2 + y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, S 为上半球面 $z = \sqrt{2ax - x^2 - y^2}$ $(a > 0)$ 在圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 的外面部分的上侧;

(3) $\iint\limits_S x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, S 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \leqslant z \leqslant R)$ 的下侧;

(4) $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(R > 0)$ 的内侧. (提示:将球面分成两个半球面.)

3. 设 Ω 是立体: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$, S 为 Ω 的外表面的外侧, $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ 为连续函数. 求

$$\iint\limits_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(B)

1. 计算曲面积分 $I = \iint\limits_S xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, 其中 S 是平面 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

2. 计算曲面积分 $I = \iint\limits_S (y - z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z - x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, S 为锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$ 的外表面.

3. 计算曲面积分 $I = \oiint\limits_S \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧表面.

答案与提示

(A)

2. (1) $-\frac{\pi}{8}$;　(2) $\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)a^2$;　(3) $-\frac{\pi}{28}R^7$;　(4) 0.

3. $abc\left[\frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c}\right]$.

(B)

1. $\frac{1}{8}$.

2. 0.

3. 4π.

9.5 格林公式及其应用

9.5.1 平面闭曲线的定向

我们在本章9.2节中曾经规定,平面上简单闭曲线沿逆时针方向为正向. 现在我们进一步讨论平面闭曲线的定向问题.

设平面上有一条简单闭曲线(简称闭路)C:

$$r(t)=x(t)i+y(t)j,\quad t\in[a,b],\quad r(a)=r(b).$$

闭路C将平面$\mathbb{R}^2$分成两个不相交的区域,而C是它们的公共边界. 这两个区域中有一个是有界的,称为内部区域;另一个是无界的,称为外部区域.

若闭路C位于xOy平面上,一人按z轴的正向站立,沿闭路环行. 如果C围成的有界区域(内部区域)总位于人的左边,此时C的方向定义为**正向**(见图9.17(a));反之为**负向**(见图9.17(b)). 正向的闭路C,记为C^+,负向的闭路C记为C^-.

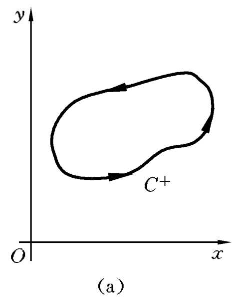


图9.17

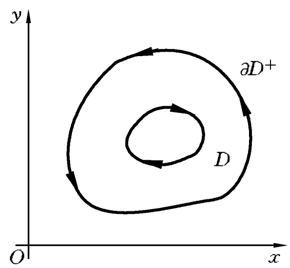


图9.18

如果xOy平面上的开区域D由一条或有限条封闭曲线所围成,一人按z轴正向站立,沿D的边界行进,如果D位于左边,则此时各条边界曲线方向定义为区域D的**边界的正向**,记为∂D^+(见图9.18).

平面的开区域可分为两大类:一类是单连通区域,另一类是非单连通区域. 如果在开区域D内任取一闭路,而闭路所围成的内部区域总是整个包含在D内,则称D为**单连通区域**(见图9.19). 显然,单连通区域不能包含有“洞”(包括“点洞”在内).

图9.20所示区域都是非单连通区域(又称**复连通区域**).

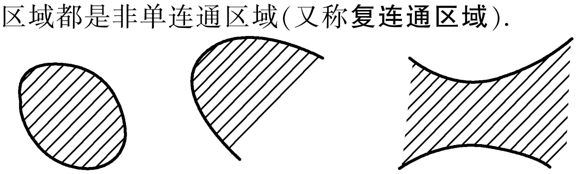


图9.19

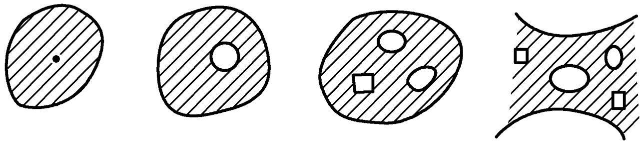


图9.20

常见的有界单连通区域D 由唯一的闭路C 围成,此时$\partial D^{+}=C^{+}$(见图9.17(a)).

9.5.2　格林公式

在一元微积分学中,微积分学基本定理,即牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

告诉我们:变化率的定积分等于变化的总量,即上述公式可写成

$$\int_a^b F'(t)\mathrm{d}t = F(b)-F(a).$$

从形式上看,这个公式表示函数$f(x)=F'(x)$在区间$[a,b]$上的定积分,可以通过它的原函数$F(x)$在区间的端点处的值来表达.

那么,对于二元函数来说,这个公式有没有相应的推广呢? 下面给出的格林公式就是上述微积分基本定理的一个推广,它是联系平面区域上的二重积分与区域边界曲线上的第二类曲线积分之间的一个关系式.

定理9.5.1　设D 是以分段光滑的曲线L 为边界的平面闭区域,函数$P(x,y)$和$Q(x,y)$在D 上具有一阶连续偏导数,则有公式

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y, \tag{9.5.1}$$

其中L 是D 的取正向的边界曲线.

公式(9.5.1)称为**格林**(Green)**公式**.

证　分两种情形讨论.

情形1　D 是单连通区域.

先假定区域D 既可看成x-型区域

$$D: y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\quad a\leqslant x\leqslant b;$$

又可看成y-型区域(见图9.21)

$$D: x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y),\quad c\leqslant y\leqslant d.$$

这时只要证明下面两式成立即可.

$$\oint_L P\mathrm{d}x=-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{9.5.2}$$

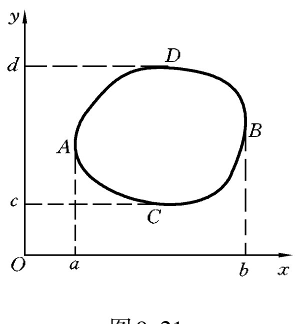


图9.21

$$\oint_L Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{9.5.3}$$

如图9.21所示,若L由曲线段ACB,BDA组成,其中ACB的方程为$y=y_1(x)$,BDA的方程为$y=y_2(x)$,则由第二类曲线积分的计算公式,有

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x = \int_{ACB} P\,\mathrm{d}x + \int_{BDA} P\,\mathrm{d}x = \int_a^b P(x,y_1(x))\mathrm{d}x + \int_b^a P(x,y_2(x))\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b P(x,y_1(x))\mathrm{d}x - \int_a^b P(x,y_2(x))\mathrm{d}x.$$

另一方面,由二重积分化为二次积分的公式有

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y = \int_a^b P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b [P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))]\mathrm{d}x.$$

比较重积分与曲线积分的结果,即得

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又因L由曲线$x=x_1(y)$与$x=x_2(y)$($c\leqslant y\leqslant d$)组成,同理可证

$$\oint_L Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

将所证得的(9.5.2)、(9.5.3)两式相加,即得

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如果D不是x-型区域,也不是y-型区域,那么我们可以用辅助曲线将D划分成若干个x-型区域或y-型区域. 例如,像图9.22中的区域D,可用直线段AB把D划分为两个区域D_1、D_2,而D_1、D_2是上述的特殊区域,因此公式(9.5.1)对D_1、D_2成立,有

$$\iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{ACBA} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{ACB} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + \int_{BA} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y,$$

$$\iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{BEAB} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{BEA} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + \int_{AB} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$$

注意到辅助线AB上的两个曲线积分方向相反,因此将上面两式相加时,这两个曲线积分正好相互抵消. 因此得

$$\iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{ACB} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + \int_{BEA} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y,$$

即
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$$

情形2 D是复连通区域.

假设D是如图9.23所示的复连通区域,其边界曲线由L_1与L_2组成,记$L=L_1+L_2$.按照前面所规定的闭曲线定向规则,L_1应取逆时针方向,而L_2应取顺时针方向.

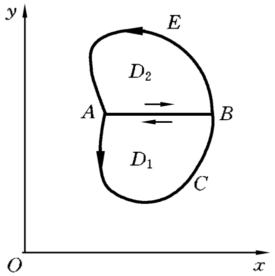


图9.22

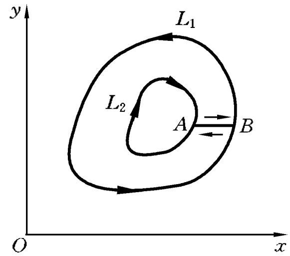


图9.23

这时作一辅助线AB,A点在L_2上,B点在L_1上,把AB看作边界,则区域D就成为一个单连通区域了,因此格林公式成立:

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{BA}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

所以对于复连通区域D,格林公式也成立.定理全部证毕. □

9.5.3　格林公式的应用

(1) 平面区域的面积表为曲线积分

在公式(9.5.1)中取$P=-y$,$Q=x$,即得

$$2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x,$$

上式左端是闭区域D的面积A的2倍,故有

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x. \tag{9.5.4}$$

例9.5.1　计算椭圆$L:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围的面积$A$.

解　椭圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

参数t由0变到2π时,L的方向为逆时针方向,由公式(9.5.4),得

$$A=\frac{1}{2}\oint_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(-b\sin t)(-a\sin t)+(a\cos t)(b\cos t)]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)\mathrm{d}t=\pi ab.$$ □

(2) 利用格林公式计算曲线积分

例 9.5.2 设 L 是任意一条分段光滑的闭曲线,证明

$$\oint_L (2xy+\cos x)\mathrm{d}x+(x^2+\sin y)\mathrm{d}y=0.$$

证 令 $P=2xy+\cos x$, $Q=x^2+\sin y$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2x=0,$$

因此,由公式(9.5.1)有

$$\oint_L (2xy+\cos x)\mathrm{d}x+(x^2+\sin y)\mathrm{d}y=\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0. \quad \square$$

例 9.5.3 设 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$,取逆时针方向,计算曲线积分

$$I=\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}.$$

解 令
$$P(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}.$$
则因函数 P、Q 在原点不连续而不能应用格林公式(9.5.1). 但我们可以利用曲线 L 的方程将被积函数化简为

$$\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{a^2}\oint_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y.$$

然后再令
$$P(x,y)=-y,\quad Q(x,y)=x,$$
在区域 D: $x^2+y^2\leqslant a^2$ 上应用格林公式(9.5.1)(或应用面积公式(9.5.4)),得

$$I=\frac{1}{a^2}\oint_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\frac{1}{a^2}\iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{a^2}\cdot 2\pi a^2=2\pi. \quad \square$$

例 9.5.4 计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中 L 是椭圆: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,取逆时针方向.

解 此题可利用椭圆的参数方程直接计算,但比较麻烦. 我们试用格林公式来计算. 令

$$P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},$$

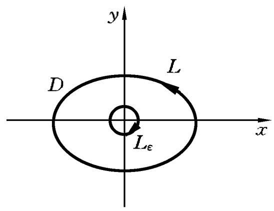


图 9.24

则 P、Q 在原点不连续,不满足格林公式的条件. 这时我们可以采取下面的办法来处理: 在椭圆 L 所围的区域内,作一个以原点为中心、以充分小的正数 ε 为半径的小圆周 L_ε: $x^2+y^2=\varepsilon^2$,使 L_ε 完全含于 L 所围区域的内部(见图 9.24). L_ε 取顺时针方向. 用 D 表示 L 与 L_ε 间的区域,则 P、Q 在 D 上连续可微,可以用格林公式,于是有

$$\int_{L}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^{2}+y^{2}}+\int_{L_{\varepsilon}}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^{2}+y^{2}}=\iint_{D}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^{2}+y^{2}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^{2}+y^{2}}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D}\left[\frac{y^{2}-x^{2}}{(x^{2}+y^{2})^{2}}-\frac{y^{2}-x^{2}}{(x^{2}+y^{2})^{2}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

因此 $$I=\oint_{L}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^{2}+y^{2}}=-\oint_{L_{\varepsilon}}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^{2}+y^{2}}=\oint_{L_{\varepsilon}^{-}}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^{2}+y^{2}}.$$

曲线L_{ε}^{-}为逆时针方向,由例9.5.3知,其积分值等于2π. 所以,最后得

$$I=\oint_{L}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^{2}+y^{2}}=2\pi.$$ □

由此例可见,我们可以利用格林公式将一个曲线积分化为另一个简单的曲线积分. 在上例中,只要闭路所围区域包含原点,方向为逆时针方向,积分值总是等于2π;若闭路所围区域不包含原点,则积分值必为零.

最后再举一个例子以结束本节.

例9.5.5　设函数u,v具有二阶连续偏导数,记$\Delta u=\dfrac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}+\dfrac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}$. 证明:

(1) $\displaystyle\iint_{D}v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$, 其中曲线$\partial D$围成有界区域$D$,$\partial D$关于$D$是正向的,$\dfrac{\partial u}{\partial n}$是函数$u$关于$\partial D$的外法向量$n$的方向导数;

(2) $\displaystyle\iint_{D}\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$;

(3) $\displaystyle\iint_{D}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$.

证　(1) 由方向导数的公式知,

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y),$$

所以 $$\int_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\int_{\partial D}v\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)\right]\mathrm{d}s.$$

用T表示边界曲线∂D的切向量,其方向与∂D的方向一致(见图9.25). 由于

$$\cos(n,x)\mathrm{d}s=\cos(T,y)\mathrm{d}s=\mathrm{d}y,$$
$$\cos(n,y)\mathrm{d}s=-\cos(T,x)\mathrm{d}s=-\mathrm{d}x,$$

所以 $$\int_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\int_{\partial D}\left(-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x+\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}y.$$

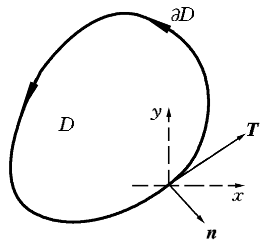


图9.25

由格林公式,有

$$\int_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\iint_{D}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 在(1)中令 $v=1$ 即得.

(3) 对 $\iint_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 和 $\iint_D u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 应用(1)的结果,然后相减即得. □

习 题 9.5

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 什么叫单连通区域? 它的边界曲线的正向、负向如何规定?

(2) 什么叫复连通区域? 其边界曲线的正向又是怎样规定的?

(3) 格林公式成立的条件是什么?

2. 试利用格林公式计算下列曲线积分:

(1) $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$,其中 $\boldsymbol{F}=2xy\boldsymbol{i}+(x^2+8y^3)\boldsymbol{j}$,$C$ 为圆周 $x^2+y^2=a^2$,取正向;

(2) $\oint_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$,其中 $\boldsymbol{F}=(x-y)\boldsymbol{i}+(y-x)\boldsymbol{j}$,$L$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,取负向;

(3) $\oint_L (yx^3+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}x+(xy^3+x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y$,其中 L 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,取正向;

(4) $\int_C x^2y\mathrm{d}x+xy^2\mathrm{d}y$,$L$:$|x|+|y|=1$,取正向.

3. 利用曲线积分,求下列曲线所围成的图形的面积:

(1) 星形线 $x=a\cos^3t,y=a\sin^3t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(2) 双纽线 $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

4. 计算曲线积分 $\int_L (x+y)^2\mathrm{d}x-(x^2+y^2\sin y)\mathrm{d}y$,其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 的那一段.

5. 求 $I=\int_{ABO}(x^2-\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\sin y+3x)\mathrm{d}y$,其中 ABO 是从点 $A(0,2)$ 沿右半圆周 $x=\sqrt{1-(y-1)^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧段.

(B)

1. 计算曲线积分 $I=\oint_C\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{4x^2+y^2}$,其中 C 是以点 $(1,0)$ 为圆心、以 R 为半径的圆周 $(R\neq 1)$,取逆时针方向.

2. 设 C 为不经过原点的简单封闭曲线,取逆时针方向,试计算曲线积分 $I=\oint_C\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$.

3. 试利用格林公式证明:$\iint_D\nabla\cdot(\nabla f)\mathrm{d}\sigma=\oint_C\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\right)$,其中 C 是平面闭区域 D 的正向边界曲线,f 在 D 上具有连续的偏导数.

答案与提示

(A)

2. (1) 0;　(2) 0;　(3) 0　;(4) 0.

3. (1) $\frac{3}{8}\pi a^2$;　(2) a^2.

4. $\frac{16}{15}$.

5. $\cos 2-1-\frac{3\pi}{2}$.

(B)

1. $R<1$ 时,$I=0$;$R>1$ 时,$I=\pi$.
2. 若 C 所围区域不包含原点,则 $I=0$;若 C 所围区域包含原点,则 $I=2\pi$.

9.6　保守场与势函数

让我们再次回到一元函数的微积分基本定理上来.我们知道,若在$[a,b]$上给定函数 $f(x)$,且存在一函数 $F(x)$,使得

$$F'(x)=f(x).$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数,这时有牛顿-莱布尼兹公式成立:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

这就告诉我们,如果知道原函数,则对求 $f(x)$ 的积分来说是非常方便的. 那么,在曲线积分的情形,是否也有类似的结果呢? 本节将就这一问题展开讨论.

9.6.1　保守场与势函数的概念

先考虑一个电学中的问题.设在空间直角坐标系的原点处,放置一电量为 q 的电荷,则在周围空间产生一静电场,静电场在每一点的电场强度,按定义即为该点单位正电荷所受到的力.据库仑定律可求出点电荷产生的静电场在每点的电场强度

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{r}{r^3},$$

其中 ε 为介电常数,$r=xi+yj+zk$,$r=|r|$.

电场强度 E 是一个向量场,容易验证,它是由数量场

$$u=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}\quad(\text{其中 } r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

产生的负梯度场,即

$$E=-\operatorname{grad}u=-\nabla u.$$

这个例子表明,有的向量场恰好是某个数量场的梯度场(或负梯度场),但并不是

任意给定一个向量场F,都存在一数量场u,使向量场恰好是数量场u的梯度场(或负梯度场). 因此,我们把向量场分为两类,一类向量场,都存在一个数量场,使向量场恰好是数量场的梯度场,这类向量场应该期望有较好的性质;另一类向量场是不存在一数量场,使它恰好是数量场的梯度场. 我们主要讨论前一类向量场.

定义 9.6.1(**势函数**) 设在空间某一区域中给定向量场$F(x,y,z)$,若在该区域上存在一数量场$u(x,y,z)$使得

$$F = \mathrm{grad}u(= \nabla u),$$

则称向量场F为**保守场**,称函数u为向量场F的**势函数**(或**位函数**).

这一定义与物理学中的保守场、势函数的定义略有差别,那里要求存在一函数u,使得

$$F = -\ \mathrm{grad}\, u,$$

则称F为保守场,u为势函数. 物理学中势函数的定义多了一个负号"$-$",主要是从物理意义考虑. 从数学角度来看,这个差别无关紧要.

由梯度的定义可以推知,若u是F的势函数,则对任意常数C,$u+C$也是F的势函数;反之,若u、v都是F的势函数,即

$$\mathrm{grad}u = F,\quad \mathrm{grad}v = F,$$

则

$$\mathrm{grad}(u-v)= 0,$$

从而$u-v$必为常数,即$u-v=C$,或

$$u = v + C.$$

所以,若差一常数项可以不计外,保守场F的势函数是唯一的.

9.6.2 保守场的性质

我们知道,第二类曲线积分不仅与曲线的起点和终点有关,而且也与所沿的路径有关. 对同一个起点和同一个终点,沿不同的路径所得到的第二类曲线积分的值一般是不相同的. 然而,保守场却具有一个非常好的性质,那就是保守场F的第二类曲线积分只与起点和终点有关,而与所沿的路径无关. 这个性质是有物理背景的:质点在保守场中移动时,力场所作的功与质点所走过的路径无关,而只与质点运动的起点及终点有关.

为了证明保守场的这个有趣的性质,我们先给出一个概念.

定义 9.6.2 设在平面区域D中给定向量场$F(x,y)$,A、B为D内任意给定的两点. 如果对于D内任意两条以A为起点、以B为终点的曲线L_1和L_2(见图9.26),总有

$$\int_{L_1} F \cdot \mathrm{d}s = \int_{L_2} F \cdot \mathrm{d}s,$$

则称**向量场F的曲线积分与路径无关**.

定理9.6.1　设D是平面区域(不要求是单连通的),在D上给定连续的向量场$F(x,y)=P(x,y)i+Q(x,y)j$,则F是保守场的充分必要条件是F的曲线积分与路径无关.

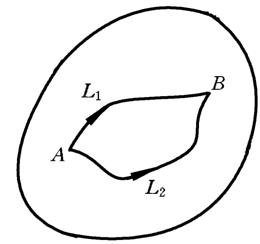


图9.26

证　必要性:设F是保守场,由保守场定义,存在一函数$u=u(x,y)$,使得

$$\mathrm{grad}u=F,$$

即
$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y).$$

在D内任取起点$A(x_0,y_0)$,终点$B(x_1,y_1)$,以及任意一条连接A、B的曲线L,我们要证明F沿L的积分只依赖于A、B,而与L无关.

设L的方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases} \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta),$$

参数$t=\alpha$对应于起点A,$t=\beta$对应于终点B,即$x_0=x(\alpha)$,$y_0=y(\alpha)$;$x_1=x(\beta)$,$y_1=y(\beta)$.由第二类曲线积分的计算公式,有

$$\begin{aligned}\int_L F\cdot \mathrm{d}s&=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_L\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\\&=\int_\alpha^\beta[u_x(x(t),y(t))x'(t)+u_y(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t\\&=\int_\alpha^\beta\frac{\mathrm{d}u(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=u(x(t),y(t))\Big|_\alpha^\beta\\&=u(x(\beta),y(\beta))-u(x(\alpha),y(\alpha))=u(x_1,y_1)-u(x_0,y_0).\end{aligned}$$

这表明F的曲线积分确实只与A、B两点有关,而与所沿的路径L无关.必要性得证.

充分性:假设向量场F的曲线积分与路径无关,要证明F是保守场,按定义,要找出一个函数$u=u(x,y)$,使得$\mathrm{grad}u=F$.

由于F的曲线积分与路径无关,我们可以在D内任意选定一个起点$A(x_0,y_0)$,而终点$B(x,y)$为D内任意一点,则曲线积分

$$\int_{AB}P(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi+Q(\xi,\eta)\mathrm{d}\eta$$

的值由$B(x,y)$点唯一地确定,因此这个曲线积分的值是B点的坐标x、y的函数,记作

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi+Q(\xi,\eta)\mathrm{d}\eta. \tag{9.6.1}$$

下面证明这个函数$u(x,y)$的梯度等于F,即要证明

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y).$$

依偏导数定义.有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x},$$

由(9.6.1)式,得

$$u(x+\Delta x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)}P(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi+Q(\xi,\eta)\mathrm{d}\eta.$$

因为这里的曲线积分与路径无关,故我们可以如图9.27所示那样,将积分路径取为$AB+BC$,其中C的坐标为$(x+\Delta x,y)$,且BC平行于x轴,于是有

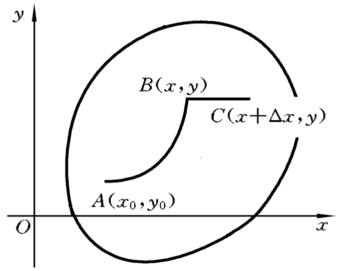


图9.27

$$u(x+\Delta x,y)-u(x,y)=\int_A^B P\mathrm{d}\xi+Q\mathrm{d}\eta+\int_B^C P\mathrm{d}\xi+Q\mathrm{d}\eta-\int_A^B P\mathrm{d}\xi+Q\mathrm{d}\eta$$
$$=\int_B^C P\mathrm{d}\xi+Q\mathrm{d}\eta.$$

直线段BC的参数方程为

$$\begin{cases}\xi=t,\\ \eta=y\end{cases}\quad(x\leqslant t\leqslant x+\Delta x).$$

据第二类曲线积分的计算公式,得

$$u(x+\Delta x,y)-u(x,y)=\int_x^{x+\Delta x}P(t,y)\mathrm{d}t.$$

应用积分中值定理,存在$x^*\in[x,x+\Delta x]$,使得

$$u(x+\Delta x,y)-u(x,y)=P(x^*,y)\cdot\Delta x,$$

于是有
$$\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}=P(x^*,y).$$

令$\Delta x\to 0$,则$x^*\to x$,由$P(x,y)$的连续性,得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}=P(x,y).$$

同理可证$\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$. 充分性证毕. □

由定理9.6.1的必要性的证明,并注意到$\mathbf{grad}\,u=\boldsymbol{F}$与$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$的等价性,有

$$\int_{AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{AB}\mathrm{d}u=u\Big|_A^B,$$

这个公式正是一元函数的牛顿-莱布尼兹公式(微积分基本定理)的推广. 利用这公式我们可以得到某些曲线积分的简便算法:如果积分的被积表达式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$是某个函数$u$的全微分,则曲线积分的值等于函数$u$在终点的值减去$u$在起点的值. 势函数就相当于一元函数中的原函数.

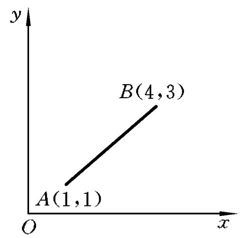


图9.28

例9.6.1 计算曲线积分$\int_{AB}x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$,其中$AB$为连接点$A(1.1)$和$B(4.3)$的直线段(见图9.28).

解
$$\int_{AB} x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = \int_{AB} \frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big|_A^B$$
$$= \frac{1}{2}(16+9) - \frac{1}{2}(1+1) = \frac{23}{2}.$$
□

9.6.3　保守场的判别法

对于给定向量场$F = P\,i + Q\,j$,如何判别它是否为保守场呢?下面给出判别的条件.

定理 9.6.2　设D是平面单连通区域,函数P和Q在D上连续且有连续偏导数,则下列命题等价:

(1) 对于D内任意一条闭曲线C,向量场$F = P\,i + Q\,j$沿C的曲线积分为零,即
$$\oint_C F\cdot\mathrm{d}s = \oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0;$$

(2) F的曲线积分与路径无关;

(3) F是保守场,即存在函数$u(x,y)$,使得
$$\mathrm{grad}\,u = F$$
或者,等价地,
$$\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y;$$

(4) 在D内处处有$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

证　先证(1)⇒(2). 在D内任意取两点A和B,任意作两条连接A与B的路径L_1和L_2(见图9.29),令C表示由L_1与L_2^-组成的闭路. 由条件(1),有
$$\int_{L_1+L_2^-} F\cdot\mathrm{d}s = 0,$$
即
$$\int_{L_1} F\cdot\mathrm{d}s + \int_{L_2^-} F\cdot\mathrm{d}s = 0.$$
也就是
$$\int_{L_1} F\cdot\mathrm{d}s = \int_{L_2} F\cdot\mathrm{d}s$$
因此,F的曲线积分与路径无关.

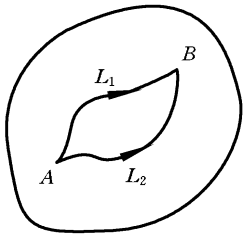


图9.29

(2)⇒(3). 由定理9.6.1的充分性所保证.

再证(3)⇒(4). 由条件(3)知,存在函数$u(x,y)$,使得
$$P = \frac{\partial u}{\partial x},\quad Q = \frac{\partial u}{\partial y},$$
因此有
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$
而P和Q在D内都有连续的偏导数,亦即两个混合偏导数$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$和$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$都在$D$内连续,从而二者相等,即在$D$内成立

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

最后证(4)⇒(1). 由(4),在D 内有$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. 设$C$ 为D 内任一闭路,而C 所围区域记为D_1,D_1 完全含于D 内. 由格林公式,有

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.$$

定理全部证毕. □

例 9.6.2 设$F(x,y)=y\cos x\,i+\sin x\,j$,试问$F$ 是否是保守场.

解 令$P=y\cos x$,$Q=\sin x$,则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\cos x=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

由定理 9.6.2 知,F 是保守场. □

例 9.6.3 设有一变力$F=(x+y^2)\,i+(2xy-8)\,j$,这变力确定了一个力场. 证明:当质点在此力场内移动时,场力所作的功与路径无关.

证 设$P=x+y^2$,$Q=2xy-8$,则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

由定理 9.6.2 知,变力F 所作的功,即曲线积分

$$\int_L F\cdot\mathrm{d}s=\int_L(x+y^2)\mathrm{d}x+(2xy-8)\mathrm{d}y$$

与路径无关,而只与运动的起点及终点有关. □

由以上两例可见,只要所讨论的区域是单连通的,那么判别平面保守场是很容易的,只要验证两个偏导数是否相等就可以了.

9.6.4 全微分方程及势函数的求法

如果一阶微分方程写成

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{9.6.2}$$

形式后,其左端恰好是某一个函数$u=u(x,y)$的全微分:

$$\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

则称方程(9.6.2)为**全微分方程**,其中

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y).$$

而方程(9.6.2)就是

$$\mathrm{d}u(x,y)=0. \tag{9.6.3}$$

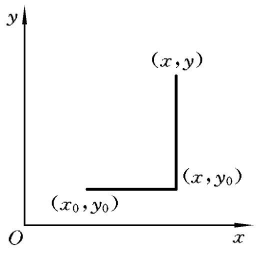
如果函数$y(x)$是方程(9.6.2)的解,则有

$$\mathrm{d}u(x,y(x))\equiv 0.$$

因此有
$$u(x,y(x)) = C \quad (C \text{ 是常数}). \tag{9.6.4}$$
反之,如果有某个函数$y(x)$使(9.6.4)式成为恒等式,那么,微分所得之恒等式,就得到$\mathrm{d}u(x,y(x))=0$. 所以,
$$u(x,y) = C$$
是原方程(9.6.2)的隐式通解.

由上一段的定理9.6.2知道,当函数$P(x,y)$和$Q(x,y)$在平面单连通区域D内有连续的偏导数时,方程(9.6.2)成为全微分方程的充分必要条件是
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{9.6.5}$$
在D内处处成立. 或者等价地说,向量场$F = P\,i + Q\,j$存在势函数$u(x,y)$,满足$\mathrm{grad}\,u = F$,即$\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$.

那么,怎样求出这个势函数呢?或者等价地说,怎样解全微分方程(9.6.2)呢?我们回忆前面定理9.6.1的充分性的证明,在那里我们证明了,对于保守场$F = P\,i + Q\,j$,其势函数可取为
$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y \tag{9.6.6}$$
(为方便计,我们仍用x、y表示积分变量). 上式右端是一个以(x_0,y_0)为起点、(x,y)为终点的曲线积分. 由于积分与路径无关,所以我们可以取一条简捷的路径(见图9.30(a)或(b))而得到$u(x,y)$的表达式. 若沿图9.30(a)中的路径,则由第二类曲线积分的计算公式得
$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y; \tag{9.6.7}$$



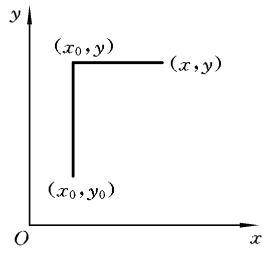


图9.30

若沿图9.30(b)中的路径,则得
$$u(x,y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y + \int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x. \tag{9.6.8}$$

例9.6.4　求解微分方程

$$(x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y=0.$$

解 令$P=x+y+1, Q=x-y^2+3$,则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

因此所给方程是一个全微分方程,取(x_0,y_0)为坐标原点,由公式(9.6.8),得

$$u(x,y)=\int_0^y(-y^2+3)\mathrm{d}y+\int_0^x(x+y+1)\mathrm{d}x=-\frac{y^3}{3}+3y+\frac{x^2}{2}+xy+x,$$

因此,所求通解为 $$\frac{x^2}{2}+xy+x-\frac{y^3}{3}+3y=C.$$ □

还有一种求势函数的方法——待定函数法.假设在单连通区域D上给定向量场$F=P\,i+Q\,j$,满足条件

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

则由定理9.6.2知,F是保守场,因此存在势函数$u(x,y)$,使得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q.$$

下面我们固定y,而对等式$\frac{\partial u}{\partial x}=P$两端关于$x$求不定积分,得

$$u(x,y)=\int P(x,y)\mathrm{d}x+\varphi(y). \tag{9.6.9}$$

由于计算积分$\int P(x,y)\mathrm{d}x$时,y看作常数,所以积分常数与y有关,记为$\varphi(y)$.为了确定函数$\varphi(y)$,将(9.6.9)式对y求导得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)\mathrm{d}x\right]+\varphi'(y).$$

由$\frac{\partial u}{\partial y}=Q$,可得

$$Q=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)\mathrm{d}x\right]+\varphi'(y). \tag{9.6.10}$$

由(9.6.10)式确定出$\varphi(y)$,代回(9.6.9)式即得到所要求的势函数$u(x,y)$. □

例9.6.5 求势函数$u(x,y)$,使得

$$\mathrm{d}u=(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y.$$

解 令$P=x+2y, Q=2x+y$,则由$\frac{\partial u}{\partial x}=P=x+2y$,得

$$u(x,y)=\frac{x^2}{2}+2xy+\varphi(y),$$

上式两端对y求导,得 $$\frac{\partial u}{\partial y}=2x+\varphi'(y).$$

而$\frac{\partial u}{\partial v}=Q=2x+y$,故有 $$2x+y=2x+\varphi'(y),$$

即
$$\varphi'(y)=y.$$
上式两端对 y 积分，得
$$\varphi(y)=\frac{y^2}{2}+C \quad (C\text{ 为任意常数}).$$
最后得势函数
$$u(x,y)=\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}+C.$$
□

有时，方程
$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{9.6.11}$$
的左端不是全微分，但可以选配一个函数 $\mu(x,y)$，使方程(9.6.11)乘以 $\mu(x,y)$ 后，成为全微分方程：
$$\mathrm{d}u=\mu P\mathrm{d}x+\mu Q\mathrm{d}y.$$
这样的函数称为**积分因子**. 一般情况下，积分因子不容易求出来的. 但在某些简单的情形下，可用视察法得到.

例 9.6.6 设有微分方程
$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(x^2+y^2)x^2\mathrm{d}x=0. \tag{9.6.12}$$
乘以因子 $\mu=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 之后，左端便化为全微分. 即有
$$\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+x^2\mathrm{d}x=0.$$
积分之，得
$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\frac{x^3}{3}=\ln C_1,$$
将上式乘以 2，整理得方程(9.6.12)的通解为
$$(x^2+y^2)\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x^3}=C.$$
□

习 题 9.6

(A)

1. 回答下列问题：
   (1) 什么叫保守场？什么叫势函数？
   (2) 保守场的重要性质是什么？
   (3) 如何判别一个向量场是否是保守场？
   (4) 什么叫全微分方程？
   (5) 怎样求势函数？
2. 判别下列向量场是不是保守场，或对什么区域来说是保守场：
   (1) $\boldsymbol{F}=\varphi(x)\boldsymbol{i}+\psi(y)\boldsymbol{j}$，其中 φ 与 ψ 是可微函数；
   (2) $\boldsymbol{F}=\dfrac{1}{r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$；
   (3) $\boldsymbol{F}=f(x+y)(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$，其中 $f(u)$ 连续；
   (4) $\boldsymbol{F}=\dfrac{1}{x^2+y^2}(y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j})$.

3. 求势函数 $u(x,y)$,使得

(1) $du=2xydx+x^2dy$; (2) $du=(3x^2-3y^2+4)dx-6xydy$;

(3) $du=(2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy$;

(4) $du=(e^x\sin y+2xy^2)dx+(e^x\cos y+2x^2y)dy$.

4. 验证被积函数为全微分,并计算下列曲线积分:

(1) $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy+ydx$; (2) $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)$;

(3) $\int_{(2,1)}^{(1,2)}\frac{ydx-xdy}{x^2}$,沿不和 y 轴相交的路径;

(4) $\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,沿不通过坐标原点的路径.

5. 判别下列方程中哪些是全微分方程,并求全微分方程的通解:

(1) $(x^2-y)dx-xdy=0$; (2) $(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$;

(3) $(x^2+y^2)dx+xydy=0$; (4) $(1+e^{2y})dx+2xe^{2y}dy=0$.

6. 设有平面力场 $F(x,y)=(2xy^3-y^2\cos x)i+(1-2y\sin x+3x^2y^2)j$,求一质点沿曲线 $L:2x=\pi y^2$ 从点 $O(0,0)$ 运动到点 $A(\frac{\pi}{2},1)$ 时,变力 F 所作的功.

(B)

1. 设 L 是从点 $A(-a,0)$ 经上半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(y\geqslant 0)$ 到点 $B(a,0)$ 的弧段,计算曲线积分

$$I=\int_L \frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续导数,L 是从点 $A(3,\frac{2}{3})$ 到点 $B(1,2)$ 的直线段,计算曲线积分

$$I=\int_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy.$$

3. 设 $F(x,y)=xy^2i+yf(x)j$ 为保守场,其中 $f(x)$ 具有连续导数,且 $f(0)=0$. 计算曲线积分 I 的值:

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} F\cdot ds$$

4. 证明:若 $f(u)$ 为连续函数,C 为分段光滑的简单闭曲线,则 $\oint_C f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=0$.

答案与提示

(A)

2. (1),(2),(3),(4)均为保守场.

3. (1) $u(x,y)=x^2y+C$; (2) $u(x,y)=x^3-3xy^2+4x+C$;

(3) $u(x,y)=x^2\cos y+y^2\sin x+C$; (4) $u(x,y)=e^x\sin y+x^2y^2+C$.

4. (1) 8; (2) 0; (3) $-\frac{3}{2}$; (4) 9.

5. (1) 是全微分方程,通解:$xy-\frac{x^3}{3}=C$; (2) 是全微分方程,通解:$y\cos x+x\sin y=C$;

(3) 不是全微分方程; (4) 是全微分方程,通解:$x(1+e^{2y})=C$.

6. $\frac{\pi^2}{4}$.

(B)

1. $-\pi$.
2. -4,
3. $\dfrac{1}{2}$.
4. 证明被积表达式是某个函数的全微分.

9.7　散度和高斯公式

9.7.1　向量场的散度

我们考察图9.31和图9.32所示的水流的速度场. 图9.31表明水流从原点喷出,即原点是一个**源**. 图9.32则表明水流从原点注入,即原点是一个洞,如水流入下水道的情形. 这时我们说原点是一个**汇**.

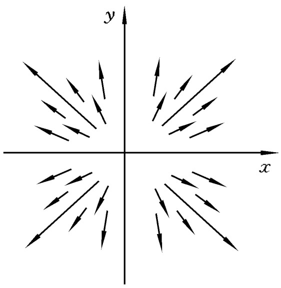


图9.31

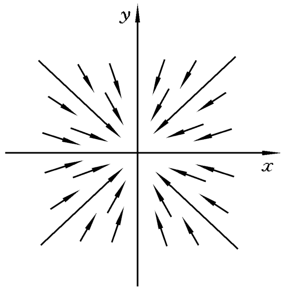


图9.32

设Ω是$\mathbb{R}^3$中的一个开区域,其边界曲面为S. 若向量场$F(x,y,z)$表示定义在Ω上的一个稳定流速场,则F沿闭曲面S外侧的曲面积分$\oiint\limits_S F\cdot \mathrm{d}S$可表示流体流出区域$\Omega$的静速率(即单位时间内通过曲面$S$的流量). 如果流体在$\Omega$内部没有源或汇,那么通过$S$的静流量为零. 如果在$\Omega$内有源或汇,我们来研究在这样的点处,流体产生或消失的速率.

设$M_0\in\Omega$,任取一包含点M_0的区域V,Σ表示V的边界曲面外侧,$V\subset\Omega$,且V也用来表示其体积. 令e_n表示Σ的单位外法向量. 如果极限

$$\lim_{V\to M_0}\frac{\oiint\limits_{\Sigma} F\cdot e_n\mathrm{d}S}{V}$$

存在,且它与V的选取无关,则称此极限为向量场F在M_0点的**散度**,记作

$$\operatorname{div} F(M_0) = \lim_{V \to M_0} \frac{\oiint\limits_{\Sigma} F \cdot e_n \mathrm{d}S}{V}. \tag{9.7.1}$$

若F 表示流速,则散度表示在某一点处,单位时间内通过单位体积流体的流量.若向量场表示流体流入某点,则散度为负;若表示流出某点,则散度为正.使散度$\operatorname{div} F > 0$的点称为**源**,使$\operatorname{div} F < 0$的点称为**汇**.若散度$\operatorname{div} F(M_0) = 0$,则说在$M_0$点**无源**,而当$\operatorname{div} F \equiv 0$时,称向量场$F$ 为**无源场**.

9.7.2 散度的计算

设有向量场$F = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k$,其中$P$、$Q$、$R$ 有连续的偏导数,则散度在直角坐标系中的计算公式为

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{9.7.2}$$

下面我们来推导这个公式.为了求F 在点$M(x,y,z)$处的散度,我们取一个以M为一顶点,边长为$\mathrm{d}x$,$\mathrm{d}y$,$\mathrm{d}z$ 的微元(见图9.33).这个长方体微元的边界面平行于坐标面,边界面Σ 由六个平面组成,我们称之为上、下、左、右、前、后六个面.

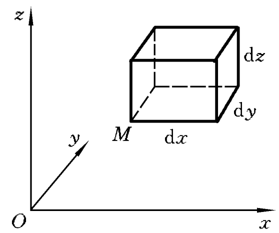


图9.33

由于左面的外法向为$-i$,所以流出左面的流量为

$$F \cdot (-i)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

由于右面的外法向为i,所以流出右面的流量为

$$F \cdot i\mathrm{d}y\mathrm{d}z = P(x+\mathrm{d}x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

由局部线性化,有

$$P(x+\mathrm{d}x,y,z) \approx P(x,y,z) + \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x.$$

因此,通过左、右两面的总流量为

$$\begin{aligned} &-P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + P(x+\mathrm{d}x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &\approx -P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

类似地,通过前、后两面,以及通过上、下两面的总流量分别可近似地表示为

$$\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad 和 \quad \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

从而通过整个边界曲面Σ 的总流量可近似地表示为

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

因为长方体微元的体积为$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,所以

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = \lim_{体积 \to 0} \frac{通过\ \Sigma\ 的流量}{\Sigma\ 所围区域的体积} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

公式(9.7.2)获证.

利用算符向量

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k,$$

散度可记为

$$\operatorname{div}F=\nabla\cdot F=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

例 9.7.1　求向量场 $F(x,y,z)=xy^2i+ye^zj+x\ln(1+z^2)k$ 在点 $P(1,1,0)$ 的散度.

解　$\operatorname{div}F=\frac{\partial(xy^2)}{\partial x}+\frac{\partial(ye^z)}{\partial y}+\frac{\partial[x\ln(1+z^2)]}{\partial z}=y^2+e^z+\frac{2xz}{1+z^2}$,

所以

$$\operatorname{div}F(P)=2.$$

□

9.7.3　高斯公式

高斯(Gauss)公式表述的是流量与散度之间的关系.我们知道,散度刻画的是向量场的局部性质,而流量刻画的是向量场的整体性质.散度与流量之间,正如微分与积分之间一样存在着密切的关系.

设空间任意点 (x,y,z) 处的流体速度为

$$v=P(x,y,z)i+Q(x,y,z)j+R(x,y,z)k,$$

流体是不可压缩的,即密度 μ 为常数,不妨设 $\mu=1$.有一光滑闭曲面 Σ 围成区域 V,取单位外法向量 $e_n=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$,则单位时间内通过 Σ 流出的流体质量即流量为

$$\Phi=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}v\cdot e_n\,\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

另一方面,在 V 内任取一微元 $\mathrm{d}V$,它包含点 (x,y,z),从 $\mathrm{d}V$ 流出的流量为

$$\mathrm{d}\Phi=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V,$$

因此整个区域 V 流出的流量为

$$\Phi=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

根据质量守恒定律,有

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S.$$

这个公式具有一般意义,称之为**高斯公式**.

下面给出这个公式的数学上的证明.

定理 9.7.1(**散度定理**)　设 V 是 $\mathbb{R}^3$ 内的一个有界闭区域.其边界 Σ 由光滑曲面

或分片光滑曲面组成,方向取外侧. 又设函数P、Q、R 在V 上有一阶连续偏导数,则下列高斯公式成立:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S, \quad (9.7.3)$$

其中$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$为Σ上单位外法向量e_n的方向余弦. 上述公式还可写成

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad (9.7.4)$$

证 我们只对特殊区域证明. 设区域V 既可看成由上、下两个曲面围成,又可看成由左、右两个曲面围成,还可看成由前、后两个曲面围成,即

$$\begin{aligned}V &= \{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}\}\\ &= \{(x,y,z)\mid y_1(z,x)\leqslant y\leqslant y_2(z,x),(z,x)\in D_{zx}\}\\ &= \{(x,y,z)\mid x_1(y,z)\leqslant x\leqslant x_2(y,z),(y,z)\in D_{yz}\},\end{aligned}$$

其中D_{xy}、D_{zx}、D_{yz}分别是xOy 平面、zOx 平面、yOz 平面上的区域. 这时,平行于坐标轴的直线与边界Σ 的交点至多为两个(见图9.34).

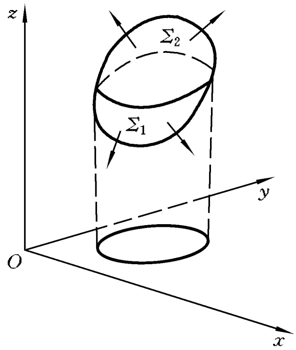


图9.34

将Σ 分成上半曲面Σ_2 和下半曲面Σ_1,则

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}[R(x,y,z_2(x,y))-R(x,y,z_1(x,y))]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由第二类曲面积分的计算公式,并注意到在Σ_2 的上侧法向量为

$$n=\left\{-\frac{\partial z_2}{\partial x},-\frac{\partial z_2}{\partial y},1\right\},$$

在Σ_1 的下侧法向量为
$$n=\left\{\frac{\partial z_1}{\partial x},\frac{\partial z_1}{\partial y},-1\right\},$$

可得
$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma}R(x,y,z)\cos\gamma\mathrm{d}S &= \iint_{\Sigma_1}R(x,y,z)\cos\gamma\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}R(x,y,z)\cos\gamma\mathrm{d}S\\ &= -\iint_{D_{xy}}R(x,y,z_1(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_{xy}}R(x,y,z_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

比较三重积分和曲面积分的计算结果,即得

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}R\cos\gamma\mathrm{d}S.$$

同理可证 $\displaystyle\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}P\cos\alpha\mathrm{d}S$, $\displaystyle\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}Q\cos\beta\mathrm{d}S$.

三式相加即得高斯公式.

如果平行于坐标轴的直线与边界曲面Σ 的交点不止两个,或区域V 内有“洞”,可以仿照格林公式的证明那样处理. □

若令$\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{e}_n$表示区域$V$的边界曲面$\Sigma$的单位外法向量，则高斯公式有如下的**向量形式**：

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}v=\oiint\limits_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_n\,\mathrm{d}S. \tag{9.7.5}$$

高斯公式将区域V上的三重积分与V的边界Σ上的曲面积分联系起来，证明的实质是用到微积分基本定理：

$$\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z=R\Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)},$$

然后再在等号两边对区域D_{xy}取重积分. 所以高斯公式可看作是微积分基本定理的推广.

例 9.7.2　利用高斯公式计算曲面积分$I=\oiint\limits_\Sigma x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$：$x^2+y^2+z^2=a^2$，取外侧.

解　由高斯公式，得

$$I=\oiint\limits_\Sigma x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho=\frac{3}{5}a^5\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{12}{5}\pi a^5.\qquad\square$$

例 9.7.3　设函数u、v是空间有界闭区域Ω上的函数，具有二阶连续偏导数，Ω的边界记为Σ. 则有**格林第一公式**

$$\iint\limits_\Sigma v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint\limits_\Omega \nabla v\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_\Omega v\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中$\boldsymbol{e}_n$是Σ的单位外法向量.

证　由方向导数公式，有

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\nabla u\cdot\boldsymbol{e}_n\quad(\boldsymbol{e}_n\text{ 为单位外法向量}),$$

所以由高斯公式得

$$\iint\limits_\Sigma v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iint\limits_\Sigma v\nabla u\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S=\iiint\limits_\Omega \nabla\cdot(v\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

由∇的定义，容易算得

$$\nabla\cdot(v\nabla u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}+v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$=\nabla v\cdot\nabla u+v\Delta u,$$

因此得

$$\iint\limits_\Sigma v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint\limits_\Omega \nabla v\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_\Omega v\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

这个公式是定积分分部积分公式的推广. 在实际问题中非常有用.　$\square$

习　题　9.7

(A)

1. 回答下列问题:
   (1) 向量场的散度怎样定义?
   (2) 在直角坐标系下,散度的计算公式是怎样的?
   (3) 高斯公式成立有些什么条件?
2. 证明:
   (1) $\operatorname{div}(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G})=\operatorname{div}\boldsymbol{F}+\operatorname{div}\boldsymbol{G}$;　　(2) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{C})=\boldsymbol{C}\cdot\operatorname{grad}u$ ($\boldsymbol{C}$ 为常向量).
3. 计算:
   (1) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}u)$;　　(2) $\operatorname{div}\boldsymbol{r}$,其中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.
4. 利用高斯公式计算下列曲面积分:
   (1) $\oiint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 是界于平面 $z=0$ 与 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2\leqslant 9$ 的整个表面的外侧.
   (2) $\oiint\limits_S (x-y^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z^2+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧.
   (3) $\oiint\limits_S yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 是空间区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid |x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1,|z|\leqslant 1\}$ 的边界面的外侧.
   (4) $\oiint\limits_S \dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.
5. 求向量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k}$ 的流量:
   (1) 通过圆锥形 $x^2+y^2\leqslant z^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的侧表面;
   (2) 通过此圆锥形的底.
6. 求向量 $\boldsymbol{A}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ 的流量:
   (1) 通过圆柱 $x^2+y^2\leqslant a^2,0\leqslant z\leqslant h$ 的全表面;
   (2) 通过此圆柱的侧表面.

(B)

1. 计算曲面积分 $\iint\limits_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$,其中 S 为圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=h(h>0)$ 之间的部分的下侧,$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是 S 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.
2. 求向径 $\boldsymbol{r}$ 穿过曲面 S:$z=1-\sqrt{x^2+y^2}(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的流量.

答案与提示

(A)

3. (1) $\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v+u\Delta v$;　(2) 3.

4. (1) 81π;　(2) $4\pi R^3$;　(3) 0;　(4) $4\pi a^2$.

5. (1) 0;　(2) πh^3.

6. (1) 0;　(2) 0.

(B)

1. $-\dfrac{\pi h^4}{2}$.

2. π.

9.8　旋度与斯托克斯公式

9.8.1　向量场的旋度

上节所引进的散度概念,可以刻划流体在某点是注入还是喷出. 本节将引进旋度的概念用以描述向量场中的旋转现象.

设给定流速场$\boldsymbol{F}(x,y,z),(x,y,z)\in\Omega$,而$\Omega$是$\mathbb{R}^3$中的一个有界开区域. 设$L$为$\Omega$内一条有向的分段光滑的封闭曲线. 在$L$上任一点处的流速$\boldsymbol{F}$,可以分解为切向分速$\boldsymbol{F}_t$及法向分速$\boldsymbol{F}_n$,考虑流体质点是否有沿$L$运动的倾向,只需考察切向分速$\boldsymbol{F}_t$(见图9.35). 令$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$表示方向与$\boldsymbol{F}_t$的方向相同、大小等于弧长$\mathrm{d}l$的一个向量. 如果$\boldsymbol{F}_t$能够使

$$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=|\boldsymbol{F}|\cos(\boldsymbol{F},\mathrm{d}\boldsymbol{l})\mathrm{d}l>0$$

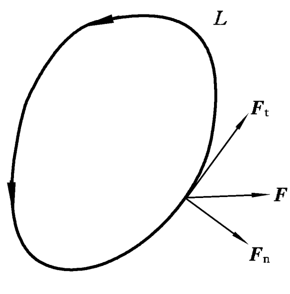


图9.35

则表明流体质点有沿曲线正向运动的倾向;若上述量小于零,则表明流体质点有沿曲线负向运动的倾向,由此我们引进下面的概念.

定义9.8.1　设$\boldsymbol{F}(x,y,z)$是有界开区域Ω内的一个向量场,L是Ω内一条分段光滑的有向闭曲线. 称曲线积分

$$\Gamma=\oint_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

为向量场$\boldsymbol{F}$按所取正方向沿曲线L的**环量**.

设M为Ω内一点,在M点处取定一个方向$\boldsymbol{n}$,并过M点作一微小曲面ΔS,它以$\boldsymbol{n}$为其在M点的法向量. 对于这个曲面,亦用ΔS表示其面积. ΔS的边界曲线ΔL的正向与$\boldsymbol{n}$构成右手系(见图9.36).

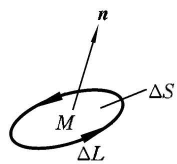


图9.36

定义9.8.2　M、ΔS、ΔL如上所述. 如果向量场$\boldsymbol{F}$沿ΔL的环量与面积ΔS之比

$$\frac{\oint_{\Delta L}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}$$

当ΔS缩为M点时极限存在,它与ΔS的选取无关,则称此极限为向量

场F在M点绕n方向的**方向旋量**(或**环量面密度**),记作

$$h(M)=\lim_{\Delta S\to M}\frac{\oint_{\Delta L}F\cdot \mathrm{d}l}{\Delta S}.$$

我们看到,方向旋量是一个与方向有关的概念.正如在数量场中的方向导数与方向有关一样.在数量场中,我们引进了梯度向量,在给定点处,梯度的方向给出了最大方向导数的方向,其模正是最大方向导数的数值.现在我们希望也能找到这样一种向量,它与方向旋量的关系,正如梯度与方向导数之间的关系一样.由此再引进下列概念.

定义9.8.3　向量场F在M点的**旋度**是一个向量,它的方向是使方向旋量达到最大的那个方向,它的大小等于绕该方向的方向旋量.

向量场F在M点的旋度记作$\mathrm{rot}F(M)$.

由旋度的定义可知,旋度最能刻划向量场在M点附近的旋转特性.关于旋度的计算公式,我们将在稍后给出.

9.8.2　斯托克斯公式

在上一节给出的高斯公式,揭示了曲面积分与三重积分的关系,现在我们来研究曲面积分与曲线积分之间的关系.

定理9.8.1(**斯托克斯定理**)　设函数$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$和$R(x,y,z)$在包含光滑的有向曲面S的区域上具有连续偏导数,S的边界曲线为L,L的方向与S的法线方向构成右手系,则有**斯托克斯公式**(Stokes)成立:

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S. \tag{9.8.1}$$

上述公式又可写成

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{9.8.2}$$

证　我们对特殊曲面S给出证明.设曲面S既可以用$z=z(x,y)$表示,又可以用$x=x(y,z)$表示,还可以用$y=y(x,z)$表示.要证(9.8.1)式成立,只要证下列三个公式成立:

$$\oint_L P\mathrm{d}x=\iint_S\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\mathrm{d}S-\iint_S\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\mathrm{d}S,$$

$$\oint_L Q\,\mathrm{d}y = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma \mathrm{d}S - \iint_S \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha \mathrm{d}S,$$

$$\oint_L R\,\mathrm{d}z = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha \mathrm{d}S - \iint_S \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta \mathrm{d}S.$$

我们以第三个公式为例加以证明. 设曲面S 的方程为$z = z(x,y)$,取上侧,S 在xOy 平面上的投影区域为D_{xy},曲线L 在xOy 平面上的投影曲线为C,其方向如图9. 37 所示. 又设曲线C 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

当t自α增至β时,对应曲线C 的正向,则L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(x(t),y(t)), \end{cases}$$

并且当t自α增至β时,对应L 的正向.

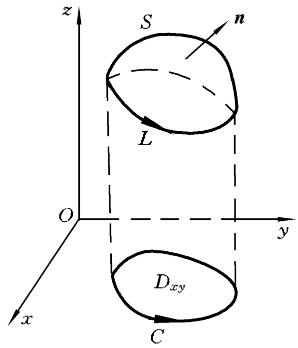


图9. 37

由第二类曲线积分的计算公式,有

$$\oint_L R\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta R(x(t),y(t),z(x(t),y(t)))\left[\frac{\partial z}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y}y'(t)\right]\mathrm{d}t.$$

上式右端的定积分也可看作曲线C 上的曲线积分计算公式,因而得

$$\oint_L R\,\mathrm{d}z = \oint_C R(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + R(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

再应用格林公式,得

$$\oint_L R\,\mathrm{d}z = \iint_{D_{xy}}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + R\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} - R\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}}\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_{xy}}\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

另一方面,曲面S 的法向量为

$$n = \left\{-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right\},$$

根据第二类曲面积分的计算公式,有

$$\iint_S \frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha \mathrm{d}S - \iint_S \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta \mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}}\frac{\partial R}{\partial y}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_{xy}}\frac{\partial R}{\partial x}\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}}\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_{xy}}\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

比较曲线积分与曲面积分计算的结果,即得

$$\oint_L R\mathrm{d}z = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha \mathrm{d}S - \iint_S \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta \mathrm{d}S.$$

同理可证其余两个公式成立,所以斯托克斯公式成立. □

为了便于记忆,我们利用行列式符号将斯托克斯公式写成如下形式:

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S = \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

可以利用斯托克斯公式来计算曲线积分.

例 9.8.1 利用斯托克斯公式计算曲线积分 $\oint_L y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$,其中 L 为圆周 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$ 若从 x 轴的正向看去,这圆周取逆时针方向.

解 依题意,平面 $x + y + z = 0$ 的法线方向是向上的,其法线的方向余弦为

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

在公式(9.8.1)中取 $P = y, Q = z, R = x$,则有

$$\oint_L y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = -\iint_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

其中 S 是 L 所围的圆盘,它在平面 $x + y + z = 0$ 上,因此 S 的面积是 πa^2,于是得

$$\begin{aligned} \oint_L y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z &= -\pi a^2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \\ &= -\pi a^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{3}\pi a^2. \end{aligned}$$ □

9.8.3 旋度的计算

为了推导旋度的计算公式,我们首先给出关于曲面积分的一个性质,它类似于一元函数的积分中值定理:

设函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 S 上连续,则在 S 上至少存在一点 M^*,使得

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = f(M^*) \times (S\text{ 的面积}).$$

设在空间有界开区域 Ω 内给定一个向量场

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

在 Ω 中任取 M 点,并取定方向 $\boldsymbol{n}$,再过 M 点作一微小曲面 ΔS,它以 $\boldsymbol{n}$ 为其法向量,ΔS 的边界为 ΔL,ΔL 的正方向与 $\boldsymbol{n}$ 构成右手系(见图 9.36). 由斯托克斯公式知,$\boldsymbol{F}$ 沿 ΔL 的环量为

$$\Delta\Gamma = \oint_{\Delta L} F \cdot \mathrm{d}l = \oint_{\Delta L} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{\Delta S} [(R_y - Q_z)\cos(n,x) + (P_z - R_x)\cos(n,y) + (Q_x - P_y)\cos(n,z)]\mathrm{d}S.$$

由上述曲面积分的性质知,在 ΔS 上存在一点 M^*,使得

$$\Delta\Gamma = [(R_y - Q_z)\cos(n,x) + (P_z - R_x)\cos(n,y) + (Q_x - P_y)\cos(n,z)]\Big|_{M^*}\Delta S.$$

显然,当 ΔS 缩为 M 点时,$M^*\to M$,因此 F 在 M 点绕 n 方向的方向旋量为

$$h(M) = \lim_{\Delta S\to M}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S} = (R_y - Q_z)\cos\alpha + (P_z - R_x)\cos\beta + (Q_x - P_y)\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是在 M 点 n 的方向余弦. 于是得到了方向旋量在直角坐标系下的计算公式:

$$h(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma. \quad (9.8.3)$$

取向量

$$A = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)k,$$

则(9.8.3)式可以写成

$$h(M) = A \cdot e_n = |A|\cos(A, e_n) \quad (9.8.4)$$

(这里 e_n 为单位法向量). 由(9.8.4)式可知,在给定点处,A 在任一方向 e_n 上的投影,就给出该方向上的方向旋量,因而 A 的方向为方向旋量最大的方向,其模即为最大方向旋量的数值. 这正是定义9.8.3中所给出的**旋度**向量. 因此,我们便得到了在直角坐标系下,向量场 F 在 M 点的旋度的计算公式:

$$\mathrm{rot}F(M) = A = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)k. \quad (9.8.5)$$

或

$$\mathrm{rot}F(M) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (9.8.6)$$

由此还可以得到斯托克斯公式的向量形式:

$$\oint_L F \cdot \mathrm{d}l = \iint_S \mathrm{rot}F \cdot e_n\mathrm{d}S \quad (9.8.7)$$

若 $\mathrm{rot}F \equiv 0$,则称向量场 F 为**无旋场**.

例9.8.2　由点电荷 q 在真空中产生的静电场,已知电场强度

$$E = \frac{q}{r^3}(xi + yj + zk), \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}.$$

求 $\mathrm{rot}E$.

解　$\mathrm{rot}E = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{qx}{r^3} & \dfrac{qy}{r^3} & \dfrac{qz}{r^3} \end{vmatrix} = \left[\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{qz}{r^3}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{qy}{r^3}\right)\right]i + \left[\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{qx}{r^3}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{qz}{r^3}\right)\right]j$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{qy}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{qx}{r^3}\right)\right]k,$$

因为
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{qz}{r^3}\right) = -\frac{3qyz}{r^5},\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{qy}{r^3}\right) = -\frac{3qyz}{r^5},$$

所以 i 前面的系数是0. 同理,j 和 k 前面的系数也都是0,因此
$$\mathrm{rot}E = 0.$$
□

习　题　9.8

(A)

1. 回答下列问题:
   (1) 什么叫方向旋量?
   (2) 向量场的旋度是怎样定义的?
   (3) 斯托克斯公式成立需要什么条件?
2. 利用斯托克斯公式计算下列曲线积分:
   (1) $\oint_L z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$,其中 L 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界,它的正向与这个三角形上侧的法向量之间符合右手规则;
   (2) $\oint_L (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$,$L$ 为柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{b}=1(a>0,b>0)$的交线,即 L 是一椭圆边界,从 x 轴正向看去,椭圆按逆时针方向.
3. 求下列向量场的旋度:
   (1) $F=2xyi+\mathrm{e}^z\sin y j+(x^2+y^2+z^2)k$;
   (2) $F=\mathrm{grad}u$,其中 $u=u(x,y,z)$是具有二阶连续偏导数的函数.

(B)

1. 利用斯托克斯公式计算下列曲线积分:
   (1) $\oint_L yz\mathrm{d}x + 3zx\mathrm{d}y - xy\mathrm{d}z$, L 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=4y, \\ 3y-z+1=0, \end{cases}$ 从 z 轴正向看去,L 是沿逆时针方向.
   (2) $\oint_L y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$, L 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+z=R$ 的交线,方向由点$(R,0,0)$出发,先经过 $x>0,y>0$ 部分,再经 $x>0,y<0$ 部分回到出发点.
2. 证明 $\mathrm{rot}(F+G)=\mathrm{rot}F+\mathrm{rot}G$.

答案与提示

(A)

2. (1) $\dfrac{3}{2}$; (2) $-2\pi a(a+b)$.

3. (1) $(2y - e^z \sin y)\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} - 2x\boldsymbol{k}$;　(2) 0.

(B)

1. (1) 8π;　(2) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi R^2$.

9.9 梯度算子

在第7章9.5.2中,我们曾引进了**梯度算子**

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}, \tag{9.9.1}$$

它既是一个微分运算符号,又要被当作一个向量来对待.通常又称 ∇ 为**哈米尔顿**(Hamilton)**算子**,它在物理中有着广泛的应用.本节将简要地介绍梯度算子的运算规则及某些应用.

9.9.1 梯度算子的运算规则

首先指出,算子 ∇ 是一个具有向量性质及微分性质这双重性质的算子,在运算中要加以注意.

梯度算子的运算规则有以下三条:

(1) $\nabla u = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$.

(2) $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k}) = \dfrac{\partial A_1}{\partial x} + \dfrac{\partial A_2}{\partial y} + \dfrac{\partial A_3}{\partial z}$.

(3) $\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \left(\dfrac{\partial A_3}{\partial y} - \dfrac{\partial A_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\dfrac{\partial A_1}{\partial z} - \dfrac{\partial A_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\dfrac{\partial A_2}{\partial x} - \dfrac{\partial A_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$.

由以上规则很容易推知,场论中的梯度、散度、旋度可用算子 ∇ 表示如下:

$$\mathrm{grad}\,u = \nabla u, \qquad \mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}, \qquad \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}.$$

9.9.2 几个基本公式

现在我们给出梯度算子运算的几个基本公式,从这些基本公式出发,不难推得物理场中的一些常用恒等式.

(1) 梯度算子的线性性质:对任意的数量场 u、v 及向量场 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$,有

$$\nabla(u + v) = \nabla u + \nabla v, \tag{9.9.2}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \nabla \cdot \boldsymbol{B}, \tag{9.9.3}$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \times \boldsymbol{B}, \tag{9.9.4}$$

(2) 对于常量 C 和常向量 $\boldsymbol{C}$,有

$$\nabla C=0,\quad \nabla\cdot C=0,\quad \nabla\times C=0. \tag{9.9.5}$$

(3) 当算子 ∇ 作用于两个函数之积时,算子 ∇ 应该先作用于第一个因子,而把第二个因子看成不变(因而它可以提到符号 ∇ 之前);然后再作用于第二个因子,而把第一个因子看成不变,再把这两个结果加起来. 即:

$$\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v, \tag{9.9.6}$$

$$\nabla\cdot(uA)=\nabla u\cdot A+u\nabla\cdot A, \tag{9.9.7}$$

$$\nabla\times(uA)=\nabla u\times A+u\nabla\times A. \tag{9.9.8}$$

我们注意到,当算子 ∇ 作用在一个数量场或向量场时,其方式仅有如下三种:

$$\nabla u,\quad \nabla\cdot A,\quad \nabla\times A.$$

即在"∇"后面必为数量场,在"$\nabla\cdot$"及"$\nabla\times$"后面必为向量场. 其他如 ∇A, $\nabla\cdot u$, $\nabla\times u$ 等均无意义.

下面再列几个常用公式,其中 $r=xi+yj+zk$, $r=|r|$.

$$\nabla r=\frac{1}{r}r,\quad \nabla\cdot r=3,\quad \nabla\times r=0,\quad \nabla f(u)=f'(u)\nabla u,$$

$$\nabla f(r)=\frac{f'(r)}{r}r,\quad \nabla\times[f(r)r]=0,\quad \nabla\times\left[\frac{1}{r^3}r\right]=0.$$

9.9.3 例子

为了说明算子 ∇ 的一些计算方法,我们举几个例子.

例 9.9.1 证明 $\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v$.

证

$$\begin{aligned}\nabla(uv)&=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)(uv)=\frac{\partial(uv)}{\partial x}i+\frac{\partial(uv)}{\partial y}j+\frac{\partial(uv)}{\partial z}k\\&=\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\right)i+\left(u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)j+\left(u\frac{\partial v}{\partial z}+v\frac{\partial u}{\partial z}\right)k\\&=v\left(\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}i+\frac{\partial v}{\partial y}j+\frac{\partial v}{\partial z}k\right)\\&=v\nabla u+u\nabla v.\end{aligned}$$

□

例 9.9.2 证明 $\nabla\cdot(uA)=\nabla u\cdot A+u\nabla\cdot A$.

证 设 $A=A_1i+A_2j+A_3k$,则

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(uA)&=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)\cdot(uA_1i+uA_2j+uA_3k)\\&=\frac{\partial(uA_1)}{\partial x}+\frac{\partial(uA_2)}{\partial y}+\frac{\partial(uA_3)}{\partial z}\\&=A_1\frac{\partial u}{\partial x}+A_2\frac{\partial u}{\partial y}+A_3\frac{\partial u}{\partial z}+u\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)\\&=\nabla u\cdot A+u\nabla\cdot A.\end{aligned}$$

□

从例 9.9.1 及例 9.9.2 的证明中可以看到,对于微分算子 $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$,我们运用了

乘积的微分法则,即当它们作用于两个函数的乘积时,每次只对其中一个因子运算,而把另一个因子看作常数. 由此推知,由$\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}$等微分算子构成的$\nabla$算子,自然也服从乘积的微分法则. 于是,例9.9.1和例9.9.2可以用下面的简化方法予以证明.

为方便起见,我们把运算中暂时看作常数的量赋于下标c,待运算结束后再除去.

$$\nabla(uv) = v_c\nabla u + u_c\nabla v = v\nabla u + u\nabla v.$$

$$\nabla\cdot(uA) = \nabla\cdot(u_cA) + \nabla\cdot(uA_c) = u_c\nabla\cdot A + \nabla u\cdot A_c = u\nabla\cdot A + \nabla u\cdot A.$$

在这里,我们使用了公式

$$\nabla\cdot(CA) = C\nabla\cdot A \qquad (C\text{ 为常数}) \tag{9.9.9}$$

$$\nabla\cdot(uC) = \nabla u\cdot C \qquad (C\text{ 为常向量}) \tag{9.9.10}$$

其证明留作习题.

例9.9.3　证明　$\nabla\cdot(A\times B) = B\cdot(\nabla\times A) - A\cdot(\nabla\times B)$.

证　根据∇算子的微分性质,按乘积的微分法则,有

$$\nabla\cdot(A\times B) = \nabla\cdot(A_c\times B) + \nabla\cdot(A\times B_c). \tag{9.9.11}$$

再根据∇算子的向量性质,把上式右端两项都看作三个向量的混合积,然后根据三个向量在其混合积中位置的轮换性:

$$a\cdot(b\times c) = c\cdot(a\times b) = b\cdot(c\times a),$$

将(9.9.11)式右端两项中的常向量都轮换到∇的前面,同时使得变向量都留在∇的后面,于是可得

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(A\times B) &= \nabla\cdot(A_c\times B) + \nabla\cdot(A\times B_c) = \nabla\cdot(A\times B_c) - \nabla\cdot(B\times A_c)\\ &= B_c\cdot(\nabla\times A) - A_c\cdot(\nabla\times B) = B\cdot(\nabla\times A) - A\cdot(\nabla\times B).\ \square\end{aligned}$$

习　题　9.9

1. 证明公式(9.9.9)及(9.9.10).
2. 证明$\nabla\cdot\nabla u = \Delta u$,其中$u$是数量场,$\Delta$为**拉普拉斯算子**(有时也记$\Delta = \nabla^2$).
3. 由直接计算验证,f的梯度的旋度是0,即$\nabla\times(\nabla f) = 0$.
4. 由直接计算验证,向量场$A = A_1 i + A_2 j + A_3 k$的旋度的散度为0,即$\nabla\cdot(\nabla\times A) = 0$.
5. 设$F = Pi + Qj + Rk$,$G = Li + Mj + Nk$,证明$\operatorname{div}(F\times G) = G\cdot\operatorname{rot}F - F\cdot\operatorname{rot}G$.

* 9.10　向量的外积与外微分形式

本节将介绍有关**向量的外积**和**外微分形式**两个概念,主要介绍其基本思想,以及怎样运用这些概念将所学过的各类积分、场论基本公式统一起来. 在这里我们只作简要的介绍,而不过分注重逻辑上的严格性. 通过所介绍的这些思想,读者能用统一的观点把所学过的各种积分予以总结. 从而更好地理解和掌握它们.

9.10.1　向量的外积

我们知道,一个向量a表示一有向线段,向量基i、j、k也可以说是有向线段基.任何一个空间向量a,总可以通过有向线段基表示为

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k,$$

而向量a的长度为

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

那么,对于有向面积,是否也存在着彼此正交的单位基呢? 由向量的叉积(见第6章6.2.3)可知,由向量a与b所决定的有向平行四边形面积可以用叉积$a\times b$表示.若

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k,\quad b = b_1 i + b_2 j + b_3 k,$$

则

$$a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} j\times k + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} k\times i + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} i\times j.$$

这样就把空间中的有向面积,通过两两正交的有向面积基$i\times j$、$j\times k$、$k\times i$表示出来了.

这种用向量运算来表示有向面积的方法无法推广到高维空间中去,为此,我们引进向量的一种新运算——向量的外积.

用符号$\wedge$表示外积运算,它是三维空间中向量的叉积运算的推广,记作

$$a\wedge b.$$

我们定义$\wedge$满足下列运算法则:

(1) $\lambda(a\wedge b) = \lambda a\wedge b$ (λ为实数);

(2) $a\wedge b + a\wedge c = a\wedge(b + c)$;

(3) $a\wedge b = -b\wedge a$(反交换律),由此推出$a\wedge a = 0$.

此外还要求外积运算满足**结合律**:

(4) $a\wedge(b\wedge c) = (a\wedge b)\wedge c = a\wedge b\wedge c$.

这条规则保证$a\wedge b\wedge c$有唯一确定的意义.由(4)不难推得

$$a\wedge a\wedge c = (a\wedge a)\wedge c = 0\wedge c = 0,$$

$$b\wedge a\wedge c = (b\wedge a)\wedge c = -(a\wedge b)\wedge c = -a\wedge b\wedge c.$$

例 9.10.1　设e_1、e_2、e_3是$\mathbf{R}^3$中的一组两两正交的单位向量,称之为$\mathbf{R}^3$中的一组**正交基**.又设两个向量

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,\quad b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3.$$

则由外积运算的法则,有

$$a\wedge b = (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3)\wedge(b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3)$$

$$= a_1b_2e_1 \wedge e_2 + a_1b_3e_1 \wedge e_3 + a_2b_1e_2 \wedge e_1$$
$$+ a_2b_3e_2 \wedge e_3 + a_3b_1e_3 \wedge e_1 + a_3b_2e_3 \wedge e_2$$
$$= (a_1b_2 - a_2b_1)e_1 \wedge e_2 + (a_2b_3 - a_3b_2)e_2 \wedge e_3 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_3 \wedge e_1.$$

由面积基的正交性可推知,由向量 a、b 所确定的面积 $|a \wedge b|$为

$$|a \wedge b| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2}.$$

显然,这里的结果与前面用向量叉积运算的结果是一样的.

在上例中若再加上一个向量 $c = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$,则可以算得

$$a \wedge b \wedge c = (a \wedge b) \wedge c$$
$$= c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 + c_2\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} e_3 \wedge e_1 \wedge e_2$$
$$= \left(c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + c_2\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \right) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3.$$

称 $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ 为**有向体积基**. 由向量 a、b、c 所确定的平行六面体的体积为

$$|a \wedge b \wedge c| = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\|,$$

上面的记号表示对行列式取绝对值.

由此可见,向量外积运算是一种很简单的运算. 注意,向量的叉积运算结果仍然是 一个向量,而向量的外积运算结果是一个新的量,在三维空间中,$a \wedge b$表示由 a、b 决定的有向面积,而$a \wedge b \wedge c$ 则表示由 a、b、c 决定的有向体积. 因此,利用向量的外积运算,我们可以解决任何维空间中求面积、体积等问题.

9.10.2 外微分形式及外微分

现在我们利用向量的外积概念引进外微分形式及外微分运算. 为简单起见,只在 $\mathbb{R}^3$ 中讨论.

设函数 $f(x,y,z)$,$P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$,$R(x,y,z)$在空间区域 Ω 上连续,且有一阶连续偏导数. 分别称

$\omega_0 = f$ 是 0 **阶外微分形式**,或 0-**形式**;

$\omega_1 = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 是 1 **阶外微分形式**,或 1-**形式**;

$\omega_2 = P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 是 2 **阶外微分形式**,或 2-**形式**;

$\omega_3 = f\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ 是 3 **阶外微分形式**,或 3-**形式**.

其中 $\mathrm{d}x$,$\mathrm{d}y$,$\mathrm{d}z$ 分别是 x 轴,y 轴,z 轴上的有向线段微元;$\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$,$\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$,$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 分别是 yOz 平面,zOx 平面,xOy 平面上的有向面积微元;而 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ 则是空间有向体积微元.

对以上各阶外微分形式,我们定义**外微分运算** d 如下:

$$\mathrm{d}\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

显然 $\mathrm{d}\omega_0$ 是 1 阶外微分形式,且 $\mathrm{d}\omega_0$ 就是 f 的全微分 $\mathrm{d}f$. 下面定义

$$\mathrm{d}\omega_1 = \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}z.$$

根据向量的外积运算及 0-形式的外微分定义,得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega_1 &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}y \\
&\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= \begin{vmatrix} \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z & \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x & \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{d}\omega_1$ 是 2 阶外微分形式.

再定义

$$\mathrm{d}\omega_2 = \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

则得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega_2 &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\
&\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

因此,$\mathrm{d}\omega_2$ 是 3 阶外微分形式.

最后定义

$$\mathrm{d}\omega_3 = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = 0,$$

因此,$\mathrm{d}\omega_3$ 是零.

现在我们来考察一下外微分形式的外微分的物理意义. 先看 0 阶外微分形式 $\omega_0 = f$. 其外微分为

$$d\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

而函数 f 的梯度是

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

因此,物理量梯度与0阶外微分形式的外微分相当.

再看1阶外微分形式 $\omega_1 = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$,其外微分为

$$d\omega_1 = \begin{vmatrix} dy \wedge dz & dz \wedge dx & dx \wedge dy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

而向量场 $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ 的旋度是

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

因此,物理量旋度与1阶外微分形式的外微分相当.

对于2阶外微分形式 $\omega_2 = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy$,其外微分为

$$d\omega_2 = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx \wedge dy \wedge dz,$$

而向量场 $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ 的散度是

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

因此,物理量散度与2阶外微分形式的外微分相当.

由于 $\mathbb{R}^3$ 中3阶外微分形式的外微分为零,所以物理中也没有与之对应的量.

9.10.3　场论基本公式的统一形式

首先回忆一元函数的**微积分基本定理**:设函数 f 在 $D = [a,b]$ 上连续,F 是 f 的一个原函数,即 $F' = f$,则有牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

我们把上述公式写成

$$\int_D dF = F(b) - F(a).$$

由于右端仅与边界点 a、b 有关,记 $\partial D = \{a,b\}$,则上式又可写成

$$\int_D dF = \int_{\partial D} F. \tag{9.10.1}$$

再来看格林公式. 设 $\mathbb{R}^2$ 中的坐标是 x、y,设有 1 阶外微分形式

$$\omega = P\,dx + Q\,dy,$$

其中 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在某个平面区域内有一阶连续偏导数,则外微分

$$d\omega = dP\wedge dx + dQ\wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\wedge dy$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x}dx\wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}dx\wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\wedge dy$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

于是格林公式 $$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \int_{\partial D}P\,dx + Q\,dy$$

可以写成 $$\int_D d\omega = \int_{\partial D}\omega. \tag{9.10.2}$$

对于 $\mathbb{R}^3$ 中的 2 阶外微分形式

$$\omega = P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy.$$

根据前面的运算,有

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz.$$

因此,高斯公式

$$\iiint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \iint_{\partial D}P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

便可写成 $$\int_D d\omega = \int_{\partial D}\omega. \tag{9.10.3}$$

最后,由于 $\mathbb{R}^3$ 中的 1 阶外微分形式

$$\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

的外微分为

$$d\omega = \begin{vmatrix} dy\wedge dz & dz\wedge dx & dx\wedge dy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

因此,斯托克斯公式

$$\iint_D\begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \int_{\partial D}P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

也可写为形式

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D}\omega. \tag{9.10.4}$$

尽管在公式(9.10.1)~(9.10.4)中,D、∂D、ω 及 $\mathrm{d}\omega$ 的具体含义各不相同,但它们的形式非常一致.我们可以把它们统一成一句话:k 阶外微分形式 ω 在 k 维区域上的积分,等于 $k+1$ 阶外微分形式 $\mathrm{d}\omega$ 在 k 维区域所围的 $k+1$ 维区域上的积分.

我们将统一形式的公式

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D} \omega$$

也称作斯托克斯公式.

特别应该指出的是,斯托克斯公式揭露了高维空间中微分与积分是如何成为一对矛盾的.这对矛盾的一方是外微分形式 $\mathrm{d}\omega$,另一方则为线、面、体积分;外微分运算与积分起了相互抵消的作用.因此,在高维空间中,斯托克斯公式就是相应的微积分基本定理.

习　题　9.10

1. 回答下列问题:
   (1) 向量的外积是怎样定义的?
   (2) 三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中外微分形式有哪几种?
2. 计算下列外积:
   (1) $(y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)\wedge(y^2\mathrm{d}x-3y\mathrm{d}y+3z\mathrm{d}z)$;　(2) $(7\mathrm{d}x+8\mathrm{d}y)\wedge(6\mathrm{d}x+7\mathrm{d}y)$;
   (3) $(5\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+7\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z)\wedge(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z)$.
3. 计算下列外微分:
   (1) $\mathrm{d}(\sin y\mathrm{d}x-\cos x\mathrm{d}y)$;　(2) $\mathrm{d}(x^2y\mathrm{d}x+y^2x\mathrm{d}y)$;　(3) $\mathrm{d}(2y\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-xz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z)$.

答案与提示

2. (1) $-y^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+6yz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+zy^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z$;　(2) $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$;　(3) $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$.
3. (1) $(\sin x-\cos y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$;　(2) $(y^2-x^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$;　(3) 0.

总 习 题 (9)

1. 填空题:
   (1) 设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$,则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$ ________;
   (2) 设 L 是由点 $O(0,0)$ 经过点 $A(1,0)$ 到点 $B(0,1)$ 的折线,则曲线积分 $\int_L (x+y)\mathrm{d}s=$ ________;
   (3) 设 L 是由原点 O 沿抛物线 $y=x^2$ 到点 $A(1,1)$,再由点 A 沿直线 $y=x$ 到原点的封闭曲线,则曲线积分 $\oint_L \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x=$ ________;

(4) 设 L 是由点 $A(2,-2)$ 到点 $B(-2,2)$ 的直线段,则$\int_L \cos y\mathrm{d}x - \sin x\mathrm{d}y =$ ________;

(5) 设 L 为摆线 $x = a(t-\sin t), y = a(1-\cos t)(0 \leqslant t \leqslant 2\pi), a > 0$. 则$\int_L y\mathrm{d}s =$ ______.

2. 计算曲线积分$\int_L xy\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y$,其中 L 是连接自点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的曲线段:

(1) $L: y = x$; (2) $L: y = x^2$; (3) $L: y = \sqrt{x}$; (4) L 为折线OBA,点$B = (1,0)$.

3. 求心形线 $r = a(1-\cos\varphi)$的质心(密度$\rho = 1$).

4. 在$A(1,0)$和$B(0,1)$处各有一单位质量的质点,OCD是以A 点为中心,通过原点的上半圆弧. 试求一质量为m 的质点P 沿OCD由O 点运动到D 点时,A、B 处的质点对质点P 的引力所作的功.

5. 在一质点沿螺旋线$C: x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$(常数$a > 0, b > 0$)从点$A(a,0,0)$移动到点$B(a,0,2b\pi)$的过程中,有一变力$F$ 作用着,F 的方向始终指向原点而大小和作用点与原点间的距离成正比,比例系数为$k > 0$. 求力F 对质点所作的功.

6. 在变力$F = yz\boldsymbol{i} + zx\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ 的作用下,质点由原点沿直线运动到椭球面$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上第一卦限的点$M(\xi,\eta,\zeta)$. 问当ξ,η,ζ 取何值时,力F 所作的功W 最大? 并求出W 的最大值.

7. 设 Σ 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax (a > 0)$,计算曲面积分 $I = \oiint_\Sigma (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}S$.

8. 设 Σ 为平面 $y + z = 5$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 25$ 所截得的部分,求 $I = \iint_\Sigma (x + y + z)\mathrm{d}S$.

9. 计算 $I = \iint_\Sigma |xyz|\mathrm{d}S$,其中 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 1$ 截下的部分.

10. 计算 $I = \iint_\Sigma \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2 + z^2}$,其中 Σ 是由曲面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及两平面 $z = R, z = -R(R > 0)$ 所围成立体表面的外侧.

11. 填空题:

(1) 向量场$A = x^2yz\boldsymbol{i} + xy^2z\boldsymbol{j} + xyz^2\boldsymbol{k}$ 在点$M(1,3,2)$处的散度$\mathrm{div}A|_M =$ ________.

(2) 向量场$A = (2z-3y)\boldsymbol{i} + (3x-z)\boldsymbol{j} + (y-2x)\boldsymbol{k}$ 的旋度$\mathrm{rot}A =$ ______.

(3) 设数量场$u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,则$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, u) =$ ________.

(4) 设S 是圆锥面$z = \sqrt{x^2 + y^2}$与平面$z = 2$ 所围成的封闭曲面的外侧,则向量场$F = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 通过曲面S 的流量$\Phi =$ ________.

12. 下面的论断是否正确? 正确的要说明理由,错误的则给出反例.

(1)$\int_C F \cdot \mathrm{d}s$ 是一个向量;

(2) 若A, B 是曲线C 的起点和终点,则有$\int_C F \cdot \mathrm{d}s = F(B) - F(A)$;

(3) 若向量场F 在单位圆周$x^2 + y^2 = 1$ 上的曲线积分等于0,则F 必为一个梯度场;

(4) 分片光滑的封闭曲面S 所包围的体积必等于$V = \frac{1}{3}\oiint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\mathrm{d}S$,其中$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为曲面S 的外法线的方向余弦.

13. 利用格林公式计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x$, $L: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$,逆时针方向;

(2) $\oint_L (\mathrm{e}^y\sin x\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{-x}\sin y\mathrm{d}y)$, L 是区域 $D: a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d$ 的边界,取逆时针方向.

14. 设函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 及 $R(x,y)$ 在平面开区域 D 上有一阶连续偏导数, C 是 D 的边界曲线,分段光滑. 求证:

$$\iint_D \left(P\frac{\partial R}{\partial x} + Q\frac{\partial R}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_C PR\mathrm{d}y - QR\mathrm{d}x - \iint_D R\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

15. 已知 $\varphi(\pi)=1$,试确定 $\varphi(x)$,使曲线积分 $I=\int_A^B [\sin x-\varphi(x)]\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关,并求当 A、B 两点分别为 $(1,0)$、(π,π) 时积分 I 的值.

16. 给定 $\mathrm{d}u=\dfrac{(x+2y)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$,试验证势函数 u 的存在性,并求出 u.

17. 设 C 为光滑的闭曲线, a 为任一固定的单位向量. 求证: $\oint_C \cos(a,n)\mathrm{d}s=0$,其中 n 为曲线 C 的外法向量.

18. 证明:若 Σ 为封闭的简单曲面, n 为 Σ 的外法向量, τ 为任何固定的方向,则有

$$\oiint_\Sigma \cos(n,\tau)\mathrm{d}S = 0.$$

19. 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=0$ 及 $z=1$ 所截部分的外侧,计算曲面积分

$$I = \iint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^2-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

20. 计算曲面积分 $\iint_S (8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - 4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 是由曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{y-1}, \\ x=0 \end{cases}$ $(1\leqslant y\leqslant 3)$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面,其法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\dfrac{\pi}{2}$.

21. 设有界闭区域 Ω 由光滑曲面 S 所围成,函数 $u(x,y,z)$ 在 Ω 及 S 上有二阶连续偏导数, n 为 S 的外法向量. 证明以下公式成立:

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = \iiint_\Omega \Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

22. 设 Σ 是空间有界闭区域 Ω 的整个边界曲面,函数 $u(x,y,z)$ 和 $v(x,y,z)$ 是定义在 Ω 上的具有二阶连续偏导数的函数, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$、$\dfrac{\partial v}{\partial n}$ 分别表示 u、v 沿 Σ 的外法线方向的方向导数. 证明下面的**格林第二公式**:

$$\iiint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_\Sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S.$$

23. 计算曲线积分 $I=\oint_C (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$,其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x-y+z=2, \end{cases}$ 从 z 轴正向往 z 轴负向看 C 的方向是顺时针的.

24. 计算 $I = \oiint_\Sigma yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z + xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,其中 Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=R^2 (x\geqslant 0, y\geqslant 0)$,平面 $x+2y=R$, $z=H$, $z=0$ 和 $x=0$ 所构成的闭曲面的外侧.

答案与提示

1. (1) π;　(2) $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$;　(3) $\frac{\pi}{4}-1$;　(4) $-2\sin 2$;　(5) $\frac{32}{3}a^2$.

2. (1) $\frac{1}{3}$;　(2) $\frac{1}{12}$;　(3) $\frac{17}{30}$;　(4) $-\frac{1}{2}$.

3. $\left(-\frac{4a}{5},0\right)$.

4. $km\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-1\right)$,$k$ 为引力常数.

5. $-2k\pi^2 b^2$.

6. 当$\xi=\frac{a}{\sqrt{3}}$,$\eta=\frac{b}{\sqrt{3}}$,$\zeta=\frac{c}{\sqrt{3}}$时,所作的功最大,其最大值为$\frac{\sqrt{3}}{9}abc$.

7. $8\pi a^4$.

8. $125\sqrt{2}\pi$.

9. $\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$.

10. $\frac{1}{2}\pi^2 R$.

11. (1) 36;　(2) $2i+4j+6k$;　(3) $\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$;　(4) 8π.

12. (1) 错;　(2) 错;　(3) 错;　(4) 对.

13. (1) $\frac{1}{4}ab\pi(a^2+b^2)$;　(2) $(e^c-e^d)(\cos a-\cos b)+(e^{-b}-e^{-a})(\cos c-\cos d)$.

14. 利用格林公式.

15. $\varphi(x)=\frac{1}{x}(\pi-1-\cos x)$,$I=\pi$.

16. $u(x,y)=\ln|x+y|+\frac{x}{x+y}+C$.

17. 注意到$\cos(a,n)\mathrm{d}s=\cos(a,x)\mathrm{d}y-\sin(a,x)\mathrm{d}x$,并利用格林公式.

18. 利用高斯公式.

19. $\frac{3\pi}{2}$.

20. 34π.

23. -2π.

24. $\frac{13}{24}HR^3+\frac{\pi-1}{8}H^2R^2$.

第 10 章　无 穷 级 数

无穷级数是表示函数及进行数值计算的一个重要工具,在理论上及实际问题中都有广泛的应用. 本章的主要内容是数项级数、幂级数和傅立叶级数.

首先介绍数项级数的一些基本概念,如级数的收敛与发散,收敛级数的基本性质,以及各种数项级数收敛与发散的判别法,为后面进一步研究函数项级数,特别是幂级数、傅立叶级数作准备. 接着将讨论函数项级数,它的一般项不是常数,而是一个函数. 我们主要讨论两类函数项级数——幂级数和傅立叶级数. 这是在许多实际问题及理论中经常遇到的级数. 本章将研究这两类级数的收敛性质及应用.

10.1　数项级数的收敛与发散

10.1.1　基本概念

给定数列$\{a_n\}$,要想研究它们的“无穷和”

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots,$$

这不是一件很简单的事情,因为无穷多个数的和至今还根本没有定义过. 我们所能定义的是“部分和”:

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

例如,我们所熟知的等比数列的前n项和:

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}\quad(x\neq 1).$$

当$|x|<1$时,$x^n\to 0(n\to\infty)$,因此,数列

$$S_n=\frac{1-x^n}{1-x}$$

在$n\to\infty$时,极限为$\frac{1}{1-x}$. 把这种关系写成具有启发意义的**无穷和**的形式:

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x},\quad |x|<1.$$

任何一种无穷和的意义都可以同样规定. 下面给出正式的定义.

定义 10.1.1　无穷多个数之和

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots\tag{10.1.1}$$

称为**无穷级数**或**数项级数**,简记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 其中$a_n$称为级数(10.1.1)的**一般项**. 对于

级数(10.1.1),作和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (n = 1,2,\cdots),$$

称之为**部分和**.

(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$(有限值),则称数项级数(10.1.1)**收敛**,且其和为S,记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S,$$

称

$$r_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

为级数(10.1.1)的**余项**;

(2) 若$\{S_n\}$的极限$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$不存在或极限为$+\infty$或$-\infty$,则称级数(10.1.1)**发散**,特别在后两种情形,称级数(10.1.1)发散到$+\infty$或$-\infty$,记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \quad 或 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty.$$

例 10.1.1 几何级数(或等比级数)

$$a + aq + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad (a \neq 0). \tag{10.1.2}$$

它的前n项部分和为

$$S_n(q) = a\frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

当$|q| < 1$时,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(q) = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q},$$

因此级数(10.1.2)的和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}.$$

也就是说,当$|q| < 1$时,几何级数(10.1.2)收敛于$\dfrac{a}{1-q}$.

当$|q| > 1$时,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(q) = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \infty.$$

当$q = 1$时,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(q) = \lim_{n\to\infty} (\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n个})$$

$$= \lim_{n\to\infty} na = \begin{cases} +\infty & (a > 0), \\ -\infty & (a < 0). \end{cases}$$

当$q = -1$时,

$$S_n(q) = \begin{cases} a & (n 为奇数), \\ 0 & (n 为偶数). \end{cases}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(-1)$不存在.

综上所述,当$|q| \geqslant 1$时,几何级数(10.1.2)发散. □

例 10.1.2 证明级数

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \cdots \tag{10.1.3}$$

收敛,并求其和.

证　级数(10.1.3)的部分和为

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

故
$$\lim_{n\to\infty}S_n=1,$$
即级数(10.1.3)收敛,其和为1. □

例10.1.3　证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散.

证　部分和
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k]$$
$$=\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)\to\infty\quad(n\to\infty),$$
因此该级数发散. □

我们看到,若给定一个数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,就可以得到一个部分和序列$\{S_n\}$:
$$S_1=a_1,\quad S_2=a_1+a_2,\quad\cdots,\quad S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\quad\cdots$$
另一方面,若给定一个数列$\{S_n\}$,构造
$$a_1=S_1,\quad a_2=S_2-S_1,\quad\cdots,\quad a_n=S_n-S_{n-1}\quad(n=2,3,\cdots),$$
则以a_n为一般项的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和序列正是上面预先给定的数列$\{S_n\}$.因此,有关数列极限的一些结果都可以搬到对应的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 上来.反之亦然.下面根据数列极限的柯西准则(见第2章2.2节定理2.2.4),给出判别数项级数是否收敛的柯西准则.

定理10.1.1(柯西准则)　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是:$\forall\varepsilon>0$,$\exists N$,$\forall m,n>N$,$m>n$,有
$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m|<\varepsilon.\tag{10.1.4}$$

证　必要性.设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则其部分和序列$\{S_n\}$有极限.根据数列极限存在的柯西准则,$\forall\varepsilon>0$,$\exists N$,$\forall m,n>N$,有
$$|S_m-S_n|<\varepsilon.\tag{10.1.5}$$
不妨设$m>n$,则有
$$|(a_1+a_2+\cdots+a_m)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)|<\varepsilon,$$
由此得到(10.1.4)式.

充分性. 设条件(10.1.4)成立,则(10.1.5)式成立,根据数列极限存在的柯西准则知,极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛. □

例 10.1.4 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛.

证 对于任意的自然数$m>n$,有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}\right|\\&\leqslant\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(m-1)m}\\&\leqslant\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

因此,$\forall\varepsilon>0$,取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当$m,n>N$时,就有

$$\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}\right|<\varepsilon.$$

由柯西准则知,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛. □

另外,由第2章2.5节例2.5.4知,**调和级数**

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

是发散的.

10.1.2 收敛级数的基本性质

性质1 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛,且其和分别为$s$和$\sigma$,则对于任意的常数$k_1$和$k_2$,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k_1a_n+k_2b_n)$也收敛,且其和为$k_1s+k_2\sigma$.

证明是容易的,请读者自己完成.

性质2(级数收敛的必要条件) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

证 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=S$,即$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\to S\,(n\to\infty)$,于是

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=0.$$ □

性质3　改变(或略去)级数的有限多项,不会影响它的收敛与发散的性质(即改变前后的两级数同为收敛或同为发散).

证　设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 现任意改变其前 l 项(l 为任意固定的正整数),得到级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_l + a_{l+1} + \cdots + a_n + \cdots, \tag{10.1.6}$$

这个级数的前 n 项部分和为

$$\sigma_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_l + a_{l+1} + \cdots + a_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_l + S_n - S_l,$$

其中 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$,设 $S_n \to S\ (n \to \infty)$, 则可得

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_l + S - S_l,$$

这表明级数(10.1.6)也收敛. 反之,若级数(10.1.6)收敛,则推知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 亦收敛.　□

性质4　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛到 S,则将其项任意地结合后(不改变其次序)得到的级数

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{i_1}) + (a_{i_1+1} + \cdots + a_{i_2}) + \cdots$$
$$+ (a_{i_n+1} + \cdots + a_{i_{n+1}}) + \cdots \tag{10.1.7}$$

仍收敛且其和仍为 S.

证　设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, 已知 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. 设级数(10.1.7)的部分和为 P_n. 则有

$$P_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{i_1} = S_{i_1},$$
$$P_2 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{i_1}) + (a_{i_1+1} + \cdots + a_{i_2}) = S_{i_2},$$
$$\vdots$$
$$P_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{i_1}) + (a_{i_1+1} + \cdots + a_{i_2})$$
$$+ \cdots + (a_{i_{n-1}+1} + \cdots + a_{i_n}) = S_{i_n}.$$

由此可见,数列 $\{P_n\}$ 实际上就是数列 $\{S_n\}$ 的一个子列,因此

$$\lim_{n\to\infty} P_n = S.$$
□

注意,这个命题的逆命题不成立. 例如级数

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$$

收敛于零,但去掉括号后的级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

却是发散的.

根据性质4可得如下的推论:

推论 10.1.1 如果加括号之后的级数发散,则原级数也发散.

习 题 10.1

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 数项级数的部分和是什么?

(2) 数项级数的收敛与发散怎样定义?

(3) 若级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 则其部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k (n=1,2,\cdots)$ 是一个数列,反过来,你能用 S_n 把原级数表示出来吗?

(4) 一般项 $a_n \to 0 (n \to \infty)$ 是不是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分条件? 若不是,你能举一个例子说明吗?

2. 求下列级数的和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

3. 证明级数 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$ 收敛,并求其和.

4. 证明:若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,但 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ 发散.

5. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散,试问 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ 一定发散吗? 如果这里的 a_n、$b_n (n=1,2,\cdots)$ 都是非负数,则能得出什么结论?

(B)

1. 求下列级数的和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{2n^2}$.

2. 利用柯西准则判别下列级数的收敛性:

(1) $\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin nx}{2^n}+\cdots$; (2) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$.

答案与提示

(A)

2. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $\frac{1}{3}$.

3. $\frac{3}{2}$.

(B)

1. (1) $\frac{1}{4}$; (2) $\frac{\pi}{4}$.

2. (1) 收敛; (2) 发散.

10.2 正项级数

对于给定的一个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，要想求出它的部分和$S_n$的表达式，一般来说是不容易的，有时甚至就求不出来. 因此，根据收敛的定义来判断一个级数是否收敛，除在少数场合外，往往是很困难的. 需要有些简单易行的判定收敛或发散的方法. 本节先讨论一类较简单然而也是很有用的一类级数，即正项级数. 给定一个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，若 $a_n \geqslant 0(n=1,2,\cdots)$，则称这样的级数为**正项级数**.

10.2.1 有界性准则

设给定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，且 $a_n \geqslant 0(n=1,2,\cdots)$，则这个级数的部分和序列 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k, n=1,2,\cdots$，显然是单调增加的. 根据单调有界收敛定理(第2章2.5节定理2.5.1)，有

$$\{S_n\}\text{ 收敛}\Leftrightarrow\{S_n\}\text{ 有上界}.$$

由此便可得到判别正项级数是否收敛的一个如下准则.

定理 10.2.1(**有界性准则**) 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是它的部分和序列$\{S_n\}$有上界.

显然，若$\{S_n\}$无上界，则有$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=+\infty$，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=+\infty$.

例 10.2.1 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+n+1}$ 收敛.

证 显然，我们有
$$\frac{1}{n^2+n+1}\leqslant\frac{1}{n^2+n}\leqslant\frac{1}{n^2},$$
因此
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$
由例10.1.4知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，由定理10.2.1推出 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$ 有界，从而 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2+k+1}$ 也有界. 再利用定理10.2.1即知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n+1}$ 收敛. □

要想确定一个正项级数的部分和序列是否有界，也并不是一件简单可行的事. 因此，上述准则的本身也许并不实用. 然而. 这个准则却是本节要介绍的几个判别法的理论基础.

10.2.2 比较判别法

定理 10.2.2(**比较判别法**) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数,且对每个 n,有 $a_n \leqslant b_n$,则

(1) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

(2) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时,$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

证 设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$,$P_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$,则由假设知,对每一个 n 有

$$0 \leqslant S_n \leqslant P_n,$$

当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时,$\{P_n\}$是有界数列,从而$\{S_n\}$是有界的.根据有界性准则,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.结论(1)得证.

再证结论(2).用反证法.假设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.则由结论(1)知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛,这就产生了矛盾.所以结论(2)成立. □

利用定理10.2.2,我们可以分析那些看起来似乎很复杂,而其复杂性大部分又是无关紧要的级数.

例 10.2.2 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\sin^3(n+1)}{2^n+n}$ 的收敛性.

解 因为
$$0 < \frac{3+\sin^3(n+1)}{2^n+n} < \frac{4}{2^n},$$
而级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$
是收敛的几何级数,因此原级数收敛. □

例 10.2.3 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 的收敛性.

解 因为
$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1} \geqslant \frac{1}{2n},$$
而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散,因此原级数发散. □

从上面的例子可以看到,比较判别法的使用就是将所考虑的级数与一个已知敛散性的级数作比较.在例 10.2.2 中我们用到几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 的收敛性,在例 10.2.3

中则用到了调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的发散性.下面我们将推广一下,考虑以一般的几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ 及 p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 为标准级数并进行比较,就可以导出一些很方便的判别级数敛散性的方法.对于几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$,我们已经知道,它在 $|q|<1$ 时收敛,在 $|q|\geqslant 1$ 时发散.现在来研究 p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

例 10.2.4 设 $p>0$ 为常数,则 p-级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \tag{10.2.1}$$

当 $p>1$ 时收敛,$p\leqslant 1$ 时发散.

证 当 $p\leqslant 1$ 时,有 $$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}\quad(\forall n\geqslant 1),$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,据比较判别法可知,级数(10.2.1)发散.

设 $p>1$,因为当 $n-1\leqslant x\leqslant n$ 时,有 $\frac{1}{n^p}\leqslant\frac{1}{x^p}$,所以

$$\frac{1}{n^p}=\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^p}\mathrm{d}x\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]\quad(n=2,3,\cdots).$$

考虑级数 $$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right], \tag{10.2.2}$$

级数(10.2.2)的部分和

$$S_n=\left[1-\frac{1}{2^{p-1}}\right]+\left[\frac{1}{2^{p-1}}-\frac{1}{3^{p-1}}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{n^{p-1}}-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right]=1-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}.$$

由于 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right]=1,$$

故级数(10.2.2)收敛.于是由比较判别法知,级数(10.2.1)在 $p>1$ 时收敛. □

为了应用上的方便,下面给出比较判别法的极限形式.

定理 10.2.3(**比较判别法的极限形式**) 设有正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{10.2.3}$$

与 $$\sum_{n=1}^{\infty}b_n, \tag{10.2.4}$$

它们满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l,\quad b_n>0, \tag{10.2.5}$$

则

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时,级数(10.2.3)与(10.2.4)同时收敛或同时发散;

(2) 当 $l = 0$ 时,由级数(10.2.4)收敛可以推出级数(10.2.3)收敛;

(3) 当 $l = +\infty$ 时,由级数(10.2.4)发散可以推出级数(10.2.3)发散.

证 (1) 设 $0 < l < +\infty$,对于 $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$,由条件(10.2.5)知,$\exists N$,使当 $n > N$ 时,有不等式

$$l - \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < l + \frac{l}{2},$$

或

$$\frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2} l,$$

即

$$\frac{1}{2} l b_n < a_n < \frac{3}{2} l b_n.$$

由此,根据比较判别法知,级数(10.2.3)与(10.2.4)同时收敛或同时发散.

(2) 设 $l = 0$. 则 $\exists N$,当 $n > N$ 时,有

$$\frac{a_n}{b_n} < 1, \quad 即 \quad a_n < b_n.$$

由此,根据比较判别法,由级数(10.2.4)收敛可以推出级数(10.2.3)收敛.

(3) 设 $l = +\infty$. 则 $\exists N$,当 $n > N$ 时,有

$$\frac{a_n}{b_n} > 1, \quad 即 \quad a_n > b_n.$$

再次利用比较判别法知,由级数(10.2.4)发散可以推出级数(10.2.3)也发散. □

在具体应用中,我们往往将定理10.2.3 中的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 取为几何级数或 p-级数,研究其一般项之比的极限即可. 有时也可直接研究 a_n 趋于零的阶.

例 10.2.5 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{\sqrt{n^3 + 1}} = 1,$$

这里 $p = \frac{3}{2} > 1$,$l = 1$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛,根据定理 10.2.3 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}$ 收敛. □

例 10.2.6 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性.

解 利用函数 $\ln(1 + x)$ 在 $x = 0$ 处的泰勒公式,有

$$a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\ (n\to\infty).$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

据定理10.2.3及p-级数在$p=2$时的收敛性知，所考虑的级数收敛. □

例10.2.7 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$的敛散性.

解 因$0<\frac{1}{n}<\frac{\pi}{2}$，故$\sin\frac{1}{n}>0$，这个级数是正项级数. 又因为
$$\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}\quad(n\to\infty),$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$也发散. □

10.2.3 比值判别法和根值判别法

现在我们选取几何级数$\sum_{n=1}^{\infty}r^n$作为比较的标准，导出两个重要的收敛性判别法.

定理10.2.4(达朗贝尔比值判别法) 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是正项级数，且$\forall n, a_n>0$. 又设
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = r\quad(0\leqslant r\leqslant+\infty). \tag{10.2.6}$$
则当$r<1$时$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；当$r>1$时$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

证 首先设$r<1$. 任意选取一个数q，使得$r<q<1$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r<q$，故由极限的性质知，存在正整数$N$，当$n\geqslant N$时有不等式
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q.$$

因此有 $a_{N+1}<a_Nq,\ a_{N+2}<a_{N+1}q<a_Nq^2,\ a_{N+3}<a_{N+2}q<a_Nq^3,\ \cdots.$

由于等比级数(公比$q<1$) $a_Nq+a_Nq^2+a_Nq^3+\cdots$

是收敛，因而级数 $a_{N+1}+a_{N+2}+a_{N+3}+\cdots$

收敛，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛.

其次设$r>1$. 这时,不论r是大于1的实数,还是$r=+\infty$,只要n足够大,例如说从$n=N$开始,$\frac{a_{n+1}}{a_n}$就大于1,用前面类似的方法可以推出

$$\frac{a_{n+1}}{a_N}>1\quad(n>N).$$

从而有

$$a_n>a_N>0\ (n>N).$$

这里a_N是一个正的定数,故a_n不可能趋于零. 由级数收敛的必要条件(本章10.1.2)知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散. □

注意,当$r=1$时,达朗贝尔比值判别法失效.

例 10.2.8　研究级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$的收敛性.

解　令$a_n=\frac{1}{n!}$,则有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0<1.$$

根据达朗贝尔比值判别法,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$收敛. □

对于给定的正数a,我们可以用类似的方法证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$收敛,并由此推出其一般项趋于零,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

特别,对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na^n$,则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a^{n+1}}{na^n}=\lim_{n\to\infty}a\cdot\frac{n+1}{n}=a,$$

因此,当$0\leqslant a<1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na^n$收敛,从而有

$$\lim_{n\to\infty}na^n=0$$

(这个结果对$-1<a\leqslant 0$也成立). 这是我们利用比值判别法作为媒介,通过级数理论而得到某些数列的极限.

例 10.2.9　考察下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}(x>0)$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}(x>0)$.

解 (1) 由于

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big/\frac{x^n}{n}=x\cdot\frac{n}{n+1},$$

因此,对于任意给定的$x>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=x.$$

由比值判别法知,当$0<x<1$时,级数收敛;当$x>1$时,级数发散. 当$x=1$时,比值判别法失效,但这时级数是调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 它是发散的.

(2)
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\Big/\frac{x^n}{n^2}=x\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\to x\ (n\to\infty),$$

可见当$0<x<1$时级数收敛;当$x>1$时级数发散. 而当$x=1$时,比值判别法失效. 但此时级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, 它是收敛的. □

下面我们介绍柯西根值判别法.

定理 10.2.5(**柯西根值判别法**) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数,且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho\quad(0\leqslant\rho\leqslant+\infty).$$

则当 $\rho<1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;当 $\rho>1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证 首先设$\rho<1$,任意取定一个数q,使$\rho<q<1$. 则由$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$知, $\exists N$, 当$n>N$ 时有

$$\sqrt[n]{a_n}<q,$$

即
$$a_n<q^n\quad(n>N).$$

因为几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}q^n(0<q<1)$ 是收敛的,由比较判别法知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

其次设$1<\rho\leqslant+\infty$. 这时,必$\exists N$, 当$n>N$ 时,有

$$\sqrt[n]{a_n}>1,$$

所以a_n不可能趋于零,这不符合级数收敛的必要条件,因此 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. □

注意,当$\rho=1$时,柯西根值判别法失效.

例 10.2.10 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$ 的敛散性.

解 令 $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^n}$,则有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = 0 < 1,$$

由柯西根值判别法知,原级数收敛. □

例 10.2.11 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^{2n}(x \geqslant 0)$ 的收敛性.

解 容易看出 $\sqrt[n]{2^n x^{2n}} = 2x^2 \to 2x^2(n\to\infty)$.

由柯西根值判别法知,当 $2x^2 < 1$,即 $0 \leqslant x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时,原级数收敛;当 $2x^2 > 1$,即 $x > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时,原级数发散. 当 $2x^2 = 1$,即 $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时,级数的一般项为 $2^n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = 1$,不趋于零,因此原级数发散. □

10.2.4 积分判别法

定理 10.2.6(积分判别法) 设函数 $f(x)$ 在 $[N,+\infty)$ 上非负且单调减少,其中 N 是某个自然数,令 $a_n = f(n)$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与广义积分 $\int_N^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时敛散.

证 因为 $f(x)$ 在 $[N,+\infty)$ 上单调减少,故有

$$\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant a_k \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\mathrm{d}x \quad (k \geqslant N+1)$$

(见图 10.1). 在上式中依次取 $k = N+1, N+2, \cdots, n$ 后相加可得

$$\int_{N+1}^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=N+1}^{n} a_k \leqslant \int_N^n f(x)\mathrm{d}x.$$

因为 $a_k \geqslant 0, f(x) \geqslant 0$,故级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 与积分 $\int_N^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 或者收敛或者取值 $+\infty$. 于是上式当 $n\to\infty$ 时变成

$$\int_{N+1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \leqslant \int_N^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

由此可见,$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛 $\Leftrightarrow \int_N^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. □

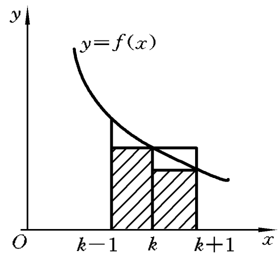


图 10.1

例 10.2.12 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^q n}(q > 0)$ 的敛散性.

解 令 $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^q x}$,则 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上非负且单调减少. 由

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^q x} = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln^q x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^q} \quad (t = \ln x).$$

可见,上述积分当$q>1$时收敛,当$q\leqslant1$时发散.由积分判别法知,级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^q n}$也在$q>1$时收敛,在$q\leqslant1$时发散. □

习 题 10.2

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 什么叫正项级数?它的部分和序列有何特点?

(2) 正项级数收敛的充要条件是什么?

(3) p-级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$在什么条件下收敛?在什么条件下发散?

(4) 设$a_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$,如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛,能否断言$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛?试举例说明.

2. 用比较判别法讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$.

3. 用比较判别法的极限形式讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{(n+2)n^2}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n}{3^n}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^2}$; (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

4. 用比值判别法判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}np^n(0<p<1)$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(x>0)$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

5. 用根值判别法判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)^n}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^{n+1}}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

(B)

1. 用所学过的判别法判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{3}{4}\right)^n$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos n}{n^2}$; (3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^k}$; (4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n^2}$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$; (7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln n}}$; (8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$,$a$为非负常数. (10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$,其中$a_n\to a(n\to\infty)$,$a_n,b,a$均为正数.

2. 利用泰勒公式估计下列级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中无穷小量 a_n 的阶,从而判别级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt[4]{n^2+n+1})$.

3. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛;但反之不然,举例说明.

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 都收敛,证明 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ 也收敛.

5. 设正数序列 $\{x_n\}$ 单调上升且有界,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ 收敛.

6. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,证明正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 也收敛.

答案与提示

(A)

2. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 发散; (4) 收敛.
3. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 收敛; (4) 收敛; (5) $a>1$ 时收敛,$0<a\leqslant 1$ 时发散; (6) 发散.
4. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 收敛; (4) 收敛; (5) 收敛; (6) 发散.
5. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 收敛; (4) 收敛.

(B)

1. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 发散; (4) 收敛; (5) 发散; (6) 发散; (7) 收敛; (8) 收敛; (9) $|a|\neq 1$ 时收敛, $|a|=1$ 时发散; (10) $b<a$ 时收敛,$b>a$ 时发散,$b=a$ 时不能判定.
2. (1) 收敛; (2) 发散.

10.3 任意项级数

本节讨论一般的数项级数,即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中有无穷多项取正值,同时又有无穷多项取负值的情形.

10.3.1 交错级数收敛判别法

设 $a_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$,考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots, \tag{10.3.1}$$

这种级数称为**交错级数**. 对于这类级数,我们给出一个非常简单的判别法,即莱布尼兹判别法.

定理 10.3.1(**莱布尼兹判别法**) 设交错级数(10.3.1)满足条件

(1) $a_n \geqslant a_{n+1}$, $n = 1, 2, \cdots$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

则此级数收敛,且对于余项 $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$,有估计式

$$|r_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k\right| \leqslant a_{n+1}. \tag{10.3.2}$$

证　考虑部分和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$. 则有

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0,$$
$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = a_{2n+1} - a_{2n} < 0,$$
$$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

这表明$\{S_{2n}\}$单调增加,且易证它有上界S';$\{S_{2n-1}\}$单调减少,它有下界S''. 因此存在极限

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S', \quad \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = S''.$$

又　$S' - S'' = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} - \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} - S_{2n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty}(-a_{2n}) = 0.$

即$S' = S''$. 记$S = S' = S''$. 根据第2章习题2.5(B)第3题,有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = S.$$

再由单调数列极限的性质可知

$$S_{2n} < S < S_{2n+1} < S_{2n-1}.$$

于是
$$0 < S - S_{2n} < S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1},$$
$$0 < S_{2n-1} - S < S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n},$$

即得
$$0 < (-1)^n(S - S_n) < a_{n+1},$$

由此得
$$|r_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k\right| < a_{n+1}.$$ □

我们称满足定理10.3.1中条件(1)及(2)的交错级数(10.3.1)为**莱布尼兹型级数**. 从定理的证明可以看出,莱布尼兹型级数的和不超过它的第一项a_1.

例10.3.1　证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots \tag{10.3.3}$$

收敛并估计其余项.

证　级数(10.3.3)是交错级数,且$a_n = \frac{1}{n}(n = 1,2,\cdots)$单调减少趋于零. 根据莱布尼兹判别法,它收敛,且其余项的估计式为

$$|r_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k\right| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$ □

例10.3.2　级数

$$\frac{3}{1!}-\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}-\frac{3^4}{4!}+\frac{3^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{3^n}{n!}+\cdots \tag{10.3.4}$$

收敛还是发散?

解 容易验证,当$n\geqslant 3$时,

$$\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{3}{n+1}\cdot\frac{3^n}{n!}<\frac{3^n}{n!},$$

即$a_n=\dfrac{3^n}{n!}(n=2,3,\cdots)$是单调减少的. 又因为

$$0<\frac{3^n}{n!}=\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdots\frac{3}{n}\leqslant\frac{27}{n}$$

及$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{27}{n}=0$,由极限的夹逼性定理知,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}=0.$$

根据莱布尼兹判别法,级数(10.3.4)收敛,并且它的和不超过

$$\frac{3}{1!}-\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}=3.$$

□

10.3.2 绝对收敛与条件收敛

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$都是莱布尼兹型级数,因此都收敛. 但是,将它们的各项都取绝对值后所得的级数,前者收敛而后者发散:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty.$$

在后面我们将会看到,由于收敛性的这种差别,使这两个级数有许多根本性的差异. 于是,我们引进下列概念.

定义 10.3.1 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛,则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ **绝对收敛**;若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散,但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ **条件收敛**.

由此可知,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$绝对收敛,而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$条件收敛.

定理 10.3.2 绝对收敛级数必收敛.

证 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛. 根据柯西收敛准则(见本章10.1.1定理10.1.1),$\forall\varepsilon>0$,$\exists N$. 当$m>n>N$时. 有

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon.$$

由此可得 $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon.$

因此再由柯西准则知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 本身收敛. □

由这个定理易知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$ 都是收敛的.

但是,应当注意,定理 10.3.2 的逆定理不成立,即从 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,不能断言 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 也收敛. 例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 就是这样的例子.

例 10.3.3 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$ $(p > 0)$ 的绝对收敛性与条件收敛性.

解 我们知道,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

在 $p > 1$ 时收敛,$p \leqslant 1$ 时发散. 因此,原级数在 $p > 1$ 时绝对收敛.

当 $p \leqslant 1$ 时,由于 $\left\{ \frac{1}{n^p} \right\}$ 单调减少趋于零,根据莱布尼兹判别法,交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$ 是收敛的,所以在 $p \leqslant 1$ 时原级数条件收敛. □

10.3.3 绝对收敛级数的性质

下面给出关于绝对收敛级数的两个性质.

定理 10.3.3 绝对收敛级数在任意重排后,仍然绝对收敛且和不变.

证 先考虑正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的情形. 设

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

并设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ 是重排后所构成的级数,其部分和记为 $S_n' = \sum_{k=1}^{n} a_k'$.

任意固定 n,取 m 足够大,使 $a_1', a_2', \cdots, a_n'$ 各项都出现在 $S_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ 中,于是得

$$S_n' \leqslant S_m \leqslant S.$$

这说明部分和序列 $\{S_n'\}$ 有上界. 而因 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数,故 $\{S_n'\}$ 是单调增加的. 根据单调有界收敛定理(第 2 章 2.5 节定理 2.2.1),有

$$\lim_{n \to \infty} S_n' = S' \leqslant S.$$

另一方面,如果把原来的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 看成是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'$ 重排后所构成的级数,就应当有

$$S \leqslant S'.$$

因此必定有

$$S = S'.$$

现在设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一般的绝对收敛级数. 令

$$b_n = \frac{1}{2}(a_n + |a_n|) \quad (n = 1,2,\cdots),$$

显然 $b_n \geqslant 0$ 且 $b_n \leqslant |a_n|$. 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛,故由正项级数的比较判别法知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2b_n$ 也收敛. 于是由 $a_n = 2b_n - |a_n|$ 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (2b_n - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 重排项位置后的级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'$, 则相应地 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 重排变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n'$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 改变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n'|$. 由前面对正项级数证得的结论知

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n', \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n'| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n' = \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n' - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n'| = \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

定理证毕. □

现在我们讨论级数的乘法运算.

设有收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B.$$

先按有限和的乘法规则,作出两级数各项所有可能的乘积 $a_i b_k$,将它们排成无穷矩阵:

$$\begin{array}{|cccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n & \cdots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & a_nb_n & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

这些乘积可按各种顺序求和而得到级数,最常见的是**对角线法**和**正方形法**:

$$\begin{array}{cccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n & \cdots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n & \cdots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n & \cdots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n & \cdots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & a_nb_n & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

将上面排列好的数列用加号连起来,就组成一个无穷级数,称按对角线法排列所组成的级数

$$a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+\cdots+(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)+\cdots$$

为两级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的**柯西乘积**.

定理 10.3.4(**绝对收敛级数的乘法**)　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都绝对收敛,其和分别为 A 和 B,则它们的柯西乘积

$$a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+\cdots+(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)+\cdots \tag{10.3.5}$$

也是绝对收敛的,且其和为 $A\cdot B$.

证　考虑把级数(10.3.5)去掉括号后所成的级数

$$a_1b_1+a_1b_2+\cdots+a_1b_n+\cdots \tag{10.3.6}$$

由级数的性质(本章10.1.2性质4)及比较判别法知,若级数(10.3.6)绝对收敛且其和为 S,则级数(10.3.5)也绝对收敛且其和为 S. 因此只要证明级数(10.3.6)绝对收敛且其和为 $S=A\cdot B$ 即可.

(i) 先证级数(10.3.6)绝对收敛.

令 S_m 表示级数(10.3.6)的前 m 项分别取绝对值后所作成的和,又设

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=A^*,\quad \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|=B^*,$$

则显然有

$$S_m\leqslant(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_m|)\cdot(|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_m|)\leqslant A^*\cdot B^*.$$

因此单调增加的数列 S_m 有上界,从而收敛,所以级数(10.3.6)绝对收敛.

(ii) 再证级数(10.3.6)的和为 $S=A\cdot B$.

将级数(10.3.6)的项重排并加上括号,使它成为按正方形法排列所组成的级数:

$$a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1)+\cdots$$
$$+(a_1b_n+a_2b_n+\cdots+a_nb_n+a_nb_{n-1}+\cdots+a_nb_1)+\cdots \quad (10.3.7)$$

根据定理10.3.3及收敛级数的性质4可知,对于绝对收敛级数(10.3.6)来说,这样做法不会改变其和.而级数(10.3.7)的前n项和恰好为

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\cdot(b_1+b_2+\cdots+b_n)=A_n\cdot B_n,$$

故有
$$S=\lim_{n\to\infty}(A_n\cdot B_n)=A\cdot B.$$

定理证毕.　□

习　题　10.3

(A)

1. 回答下列问题:
   (1) 什么叫交错级数?什么叫莱布尼兹型级数?
   (2) 什么是级数的绝对收敛性和条件收敛性?
   (3) 两级数的乘积是怎样定义的?在什么条件下两级数的乘积级数必定收敛?
2. 对下列是非题,对的给出证明,错的举出反例:
   (1) 若$a_n>0$,则$a_1-a_1+a_2-a_2+a_3-a_3+\cdots$收敛;
   (2) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$也收敛;
   (3) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^3$绝对收敛;
   (4) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛;
   (5) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$不收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$不绝对收敛;
   (6) 绝对收敛级数也是条件收敛的.
   (7) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$不是条件收敛的,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散;
   (8) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=1$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$也收敛;
3. 讨论下列级数的敛散性(包括绝对收敛、条件收敛、发散):
   (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3^n}$;　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n(n+1)}$;
   (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2n-1}$;　(5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{\ln n}$;　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$.
4. 证明:若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$皆收敛,且$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$.则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$也收敛.若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$皆发散,试问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$的收敛性如何?

5. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 皆收敛,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

6. 设常数 $k > 0$,讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$ 的敛散性(包括绝对收敛与条件收敛).

(B)

1. 设 $\lim_{n\to\infty} n^p u_n = A$,证明:

(1) 当 $p > 1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛;

(2) 当 $p = 1$,且 $A \neq 0$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(3) 问当 $p = 1$ 且 $A = 0$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 能否收敛?

2. 试利用比较判别法证明定理10.3.2.

答案与提示

(A)

2. (1) 错; (2) 错; (3) 对; (4) 错; (5) 对; (6) 错; (7) 错; (8) 错.
3. (1) 条件收敛; (2) 绝对收敛; (3) 绝对收敛; (4) 发散; (5) 条件收敛; (6) 条件收敛.
6. 条件收敛.

10.4 函数项级数的基本概念

10.4.1 函数列和函数项级数

设对于任意给定的自然数 n,$f_n(x)$是定义在区间 I 上的一个函数. 对于任意给定的 $x \in I$,当 $n = 1, 2, \cdots$ 时,$\{f_n(x)\}$就是一个数列. 这时我们称$\{f_n(x)\}$是定义在区间 I 上的一个**函数列**.

如果对于每一个 $x \in I$,数列$\{f_n(x)\}$都收敛,则可由

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

确定一个在 I 上的函数. 这时我们说,函数列$\{f_n(x)\}$**在 I 上点态收敛到** $f(x)$,简称**收敛到** $f(x)$,并称 $f(x)$为$\{f_n(x)\}$在 I 上的**极限函数**.

若无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots,$$

其中每一项 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$都是定义在区间 I 上的函数,则称这个级数为**函数项级数**.

如果对每一个 $x \in I$.部分和序列

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\quad(n=1,2,\cdots)$$

都收敛,且
$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x).$$

则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上(点态)收敛,其**和函数**为 $S(x)$,记作

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x).$$

10.4.2 收敛域

凡使级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛的点 x 称为级数的**收敛点**,使 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 发散的点 x 称为级数的**发散点**. 所有收敛点组成的集合称为级数的**收敛域**,所有发散点组成的集合称为级数的**发散域**. 显然,级数的收敛域就是级数的和函数的定义域.

对于给定的 x_0, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 就是一个数项级数,因此函数项级数的敛散性就归结为相应的数项级数的敛散性.

例 10.4.1 设有函数列 $f_n(x)=x^n, x\in[0,1], n=1,2,\cdots$. 则当 $x=1$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(1)=1;$$

当 $0\leqslant x<1$ 时,
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}x^n=0.$$

因此,函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上(点态)收敛,其极限函数为

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$ □

例 10.4.2 几何级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

的收敛域是 $|x|<1$,发散域是 $|x|\geqslant1$. 当 $|x|<1$ 时,其和函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$ □

10.4.3 几个基本问题

下面考虑函数项级数的和函数的分析性质,由于函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛性归结为其部分和序列 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)(n=1,2,\cdots)$ 的收敛性,所以我们现在专门来探讨和函数 $S(x)$ 与部分和序列函数 $S_n(x)$ 在分析性质上是否一致的问题.

让我们先考察几个具体例子.

例 10.4.3 设$f_n(x)=x^n, 0\leqslant x\leqslant 1$,则每个$f_n(x)$都是$[0,1]$上的连续函数. 但是其极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1\end{cases}$$

是不连续的.

这个例子说明:连续函数组成的函数列可能收敛于不连续的函数. □

例 10.4.4 设$f_n(x)=nx(1-x^2)^n, 0\leqslant x\leqslant 1$,则

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$. 但是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx(1-x^2)^n\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\neq\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

这个例子说明,$f_n(x)$是连续的,且收敛于一个连续函数,但是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x\neq\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x,$$

即是说,积分号下不能取极限. □

例 10.4.5 设$f_n(x)=\mathrm{e}^{-n^2x^2}, 0\leqslant x\leqslant 1$,则$f_n(x)$是处处可微的:

$$f_n'(x)=-2n^2x\mathrm{e}^{-n^2x^2},\quad x\in[0,1],$$

且
$$\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=0,\quad x\in[0,1].$$

但是
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-n^2x^2}=f(x)=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant 1,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

因此,极限函数$f(x)$在$x=0$处不可导.

这个例子说明,尽管函数列中的每个函数都可导,且导函数序列收敛,但该函数列的极限函数却不可导. □

以上几个例子表明,即使函数列中的每一项$f_n(x)$都具有良好的分析性质,但其点态收敛的极限函数$f(x)$未必能保持这些性质. 因此,关于函数列及函数项级数就产生了以下几个基本问题:

设
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x), x\in[a,b],$$

(1) 若$f_n(x)\in C[a,b](n=1,2,\cdots)$,则在什么条件下,$f(x)\in C[a,b]$,即$\forall x_0\in[a,b]$,有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

即
$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x).$$

(2) 若$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上可积,则在什么条件下,极限函数$f(x)$也可积,且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x.$$

(3)　若$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上可导,则在什么条件下,极限函数$f(x)$也可导,且

$$\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=f'(x)=(\lim_{n\to\infty}f_n(x))'.$$

对于函数项级数也有类似的问题.

设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x),x\in[a,b]$,

(1) 若$u_n(x)\in C[a,b]$,则在什么条件下$S(x)\in C[a,b]$,即

$$\lim_{x\to x_0}S(x)=S(x_0),$$

也就是在什么条件下可以逐项取极限:

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0).$$

(2) 若$u_n(x)$在$[a,b]$上可积,则在什么条件下,和函数$S(x)$也可积,且可以逐项积分:

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 若$u_n(x)$在$[a,b]$上可导,则在什么条件下,和函数$S(x)$也可导,且可以逐项求导数:

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$$

以上的问题属于两种极限过程是否可以交换的问题.

10.4.4　一致收敛的概念

为了解决上面提出的几个基本问题,我们要引进一个新的概念——一致收敛.为此,我们先叙述级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$上点态收敛的精确定义.

设有函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x),x\in I$. 设$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$,$S(x)$是定义在$I$上的已知函数.

对于每一个$x\in I$,如果$\forall\varepsilon>0,\exists N$,使得当$n>N$时,都有

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon,$$

则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$I$上**点态收敛**到$S(x)$,记作

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x),\quad x\in I.$$

在这里,一般来说N不仅与ε有关,而且也与x有关.我们把这个正整数记为$N(x,\varepsilon)$.

如果对于某个函数项级数能够找到这样一个正整数N,它只依赖于ε而不依赖于x,也就是对区间I上所有的点都适合的共同的$N(\varepsilon)$,那么这个级数的收敛性就不同于一般的点态收敛性.这就是下面给出的一致收敛的定义.

定义 10.4.1 设函数列$\{f_n(x)\}$在区间I上有一极限函数$f(x)$.如果$\forall\varepsilon>0$,$\exists N=N(\varepsilon)$,使当$n>N$时,$\forall x\in I$都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

成立,则称$\{f_n(x)\}$在I上**一致收敛于**$f(x)$,或称$f(x)$为$\{f_n(x)\}$在I上的**一致极限**.记作

$$f_n(x)\overset{I}{\rightrightarrows}f(x).$$

定义 10.4.2 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的部分和序列

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\quad(n=1,2,\cdots)$$

在I上一致收敛到$S(x)$,则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$I$上**一致收敛到**$S(x)$.即:$\forall\varepsilon>0$,$\exists N=N(\varepsilon)$,当$n>N$时,$\forall x\in I$都有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)-S(x)\right|<\varepsilon$$

成立,则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$I$上一致收敛到$S(x)$.

显然,一致收敛性蕴含点态收敛性,但反之不然.

一致收敛的几何解释如下:如图10.2所示,将曲线$y=S(x)$向上和向下移动距离ε,就得到一条宽为2ε的曲边带形区域,上边界为曲线$y=S(x)+\varepsilon$,下边界为曲线$y=S(x)-\varepsilon$.当$n>N$时,曲线$y=S_n(x)$都将落在这个曲边带形区域之内.

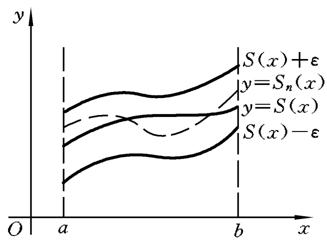


图10.2

下面介绍判别一个级数在某个区间上是否一致收敛的一个方便的判别法.

定理 10.4.1(**维尔斯特拉斯**(Weierstrass)M-**判别法**) 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的一般项$u_n(x)$在某区间$I$上满足

$$|u_n(x)|\leqslant M_n\quad(x\in I,n=1,2,\cdots),\tag{10.4.1}$$

且数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$收敛,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$上一致收敛.

证 由不等式(10.4.1)及比较判别法知,对于每一个 $x\in I$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 收敛,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x)$, $x\in I$. 另外, $\forall x\in I$,我们有

$$\left|S(x)-[u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)]\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}|u_k(x)|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}M_k.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ 收敛,不妨设 $\sum_{n=1}^{\infty}M_n=A$. 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=N(\varepsilon)$,当 $n>N$ 时,有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}M_k-A\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}M_k\right|<\varepsilon.$$

由此推出当 $n>N$ 时, $\forall x\in I$ 都有

$$\left|S(x)-[u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)]\right|=\left|S(x)-\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|<\varepsilon.$$

因为 N 仅与 ε 有关而与 x 无关,所以就证明了级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上是一致收敛的.

□

上述维尔斯特拉斯 M - 判别法又称为**优级数判别法**. 使用这个判别法时,可将给定的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的各项绝对值 $|u_n(x)|$ 在 I 上适当放大,放大到与 x 无关: $|u_n(x)|\leqslant M_n$. 如果得到的数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ 收敛,即可判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

例 10.4.6 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 在区间[-1,1]上一致收敛.

证 对每一个 $x\in[-1,1]$,有

$$\left|\frac{x^n}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots),$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,由定理 10.4.1 知, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 在 $[-1,1]$上一致收敛. □

10.4.5 一致收敛级数的性质

现在我们回过来研究前面所提出的三个基本问题. 我们将看到,只要加上一致收敛的条件,则问题的回答都是肯定的.

定理 10.4.2(和函数的连续性) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$,且每项 $u_n(x)$ 都在 I 上连续,则和函数 $S(x)$ 也在 I 上连续.

证 我们证明 $S(x)$ 在 I 上的任一点 x_0 处连续. 令 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$. 由于级数在 I 上一致收敛,故对 $\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon)$, 使得

$$|S(x)-S_N(x)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad(\forall x\in I).$$

由于 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$在 I 上连续,故 $S_N(x)$也在 I 上连续. 因此对于上述 ε, $\exists\delta>0$,当 $x\in I$, $|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|S_N(x)-S_N(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,就有

$$\begin{aligned}|S(x)-S(x_0)|&\leqslant|S(x)-S_N(x)|+|S_N(x)-S_N(x_0)|+|S_N(x_0)-S(x_0)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了 $S(x)$在 x_0 点连续. □

定理 10.4.3(**积分极限定理**) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间$[a,b]$上一致收敛于 $S(x)$,且每项 $u_n(x)$ 都在$[a,b]$上连续,则

$$\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.\tag{10.4.2}$$

证 由定理 10.4.2 知 $S(x)$ 是$[a,b]$上的连续函数,因而是可积的. 由假设, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 是一致收敛的,故 $\forall\varepsilon>0,\exists N$,当 $n>N$ 时, $\forall x\in[a,b]$有

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

成立. 于是,当 $n>N$ 时,有

$$\left|\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b S(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|S_n(x)-S(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon,$$

所以

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$ □

定理 10.4.4(**逐项求导定理**) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 满足下列三个条件:

(1) 在区间$[a,b]$上收敛于 $S(x)$;

(2) $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上有连续的导函数;

(3) 由导函数构成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛.

则和函数 $S(x)$在$[a,b]$上有连续的导数,且可逐项求导:

$$S'(x)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x),\quad x\in[a,b]$$

证 由条件(2)、(3)知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 满足定理 10.4.2 的条件. 若记 $\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$,则 $\sigma(x)$ 在区间$[a,b]$上连续. 下面证明 $S'(x) = \sigma(x)$ 在$[a,b]$上成立. 由定理 10.4.3 知, $\forall x \in [a,b]$, 有

$$\int_a^x \sigma(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n'(x)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x) - u_n(a)] = S(x) - S(a).$$

由 $\sigma(x)$的连续性,在上式两端求导,即得

$$S'(x) = \sigma(x).$$

证毕. □

习 题 10.4

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上点态收敛于 $S(x)$ 是什么意思?

(2) 什么叫做级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域和发散域?

(3) 函数列$\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$ 的定义是怎样的?

(4) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$ 的定义是怎样的?

(5) 一致收敛性与点态收敛性有什么不同?

2. 试利用维尔斯特拉斯 M-判别法证明下列级数在指定区间上的一致收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}, -\infty < x < +\infty$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, -\infty < x < +\infty$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{3/2}}, x \in [-1,1]$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(1-\mathrm{e}^{-nx})}{n^2+x^2}, 0 \leqslant x < +\infty$.

3. 按定义讨论下列级数在指定区间上的一致收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}, -\infty < x < +\infty$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n, 0 < x < 1$.

(B)

1. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^2\mathrm{e}^{-nx}$ 在$[0,+\infty)$上一致收敛.

2. 证明 $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} (n=1,2,\cdots)$在$[0,+\infty)$上逐点收敛于0,但不一致收敛.

答案与提示

(A)

2. (1) 利用 $\left|\frac{\cos nx}{2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^n}$; (2) 利用 $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$; (3) 利用 $\left|\frac{x^n}{n^{3/2}}\right|<\frac{1}{n^{3/2}}$;
   (4) 利用 $\left|\frac{(-1)^n(1-\mathrm{e}^{-nx})}{n^2+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$.
3. (1) 利用莱布尼兹定理中的余项估计, $|r_n(x)|<\frac{1}{n}$. (2) 该级数不一致收敛.

(B)

1. 和函数 $S(x)=\frac{x^2}{\mathrm{e}^x-1}$, 估计 $|S_n(x)-S(x)|$.
2. 注意到 $\forall n$, $\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{2}$.

10.5 幂级数及其收敛性

本节研究一种特殊的函数项级数——幂级数. 称形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \tag{10.5.1}$$

的级数为**幂级数**, 其中 x_0 是任意给定的实数, $a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 称为幂级数的系数. 幂级数在理论及实际上都有重要的应用.

当我们令 $X=x-x_0$ 时, 则由(10.5.1)式得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nX^n. \tag{10.5.2}$$

显然, 研究级数(10.5.1)的性质可以转化为研究级数(10.5.2)的性质. 下面我们就来研究形如(10.5.2)式的幂级数的收敛性.

10.5.1 幂级数的收敛半径与收敛区间

怎样确定一个幂级数的收敛域? 让我们先看几个例子.

例 10.5.1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 在整个数轴上处处收敛.

证 任意给定 $x\neq0$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\Big/\frac{x^n}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0.$$

故当 $x\neq0$ 时级数绝对收敛, $x=0$ 时显然也绝对收敛. □

例 10.5.2 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}r^nx^n\ (r>0)$ 的收敛域为开区间 $\left(-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right)$.

证 $x=0$ 时级数显然绝对收敛. 当 $x\neq0$ 时, 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{r^{n+1}x^{n+1}}{r^n x^n}\right| = |rx|$$

及比值判别法知,当 $|rx|<1$,即 $|x|<\dfrac{1}{r}$时级数绝对收敛,而当 $|rx|>1$,即 $|x|>\dfrac{1}{r}$时级数发散;当 $|x|=\dfrac{1}{r}$时,级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n\cdot\dfrac{1}{r^n}$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n\cdot\dfrac{(-1)^n}{r^n}$,显然发散. 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n x^n$ 的收敛域为开区间$\left(-\dfrac{1}{r},\dfrac{1}{r}\right)$. □

例10.5.3　幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!x^n$ 只在 $x=0$ 处收敛,而在其他任何点处发散, 因此其收敛域为单点集$\{0\}$. □

上面的例子代表了幂级数收敛范围的三种可能:

(1) 在整个数轴$(-\infty,+\infty)$上收敛;

(2) 收敛范围是某个关于原点对称的有限区间$(-R,R)$(或者再加上端点);

(3) 只在 $x=0$ 点收敛.

下面的定理将证明,幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域就是包含原点 $x=0$ 在内的一个对称区间(开的闭的、或半开半闭的),这个区间可以是$(-\infty,+\infty)$,也可以退缩为 $x=0$ 一个点.

定理 10.5.1(**阿贝尔第一定理**)　如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $\xi\neq 0$ 处收敛,则 $\forall x:|x|<|\xi|$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都绝对收敛. 如果在 $\eta\neq 0$ 处 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散,则 $\forall x:|x|>|\eta|$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都发散.

证　(1) 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=\xi$ 处收敛. 因 $\xi\neq 0$,故可写

$$|a_n x^n| = |a_n\xi^n|\cdot\left|\frac{x}{\xi}\right|^n.$$

由级数收敛的必要条件知,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\xi^n$ 的一般项 $a_n\xi^n\to 0(n\to\infty)$. 又根据收敛数列必有界知,存在正数 c,使得

$$|a_n\xi^n|\leqslant c\quad (n=1,2,\cdots).$$

于是可推得

$$|a_n x^n|\leqslant c\left|\frac{x}{\xi}\right|^n.$$

对于给定的 x,因 $|x|<|\xi|$,故 $\left|\dfrac{x}{\xi}\right|<1$,从而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c\left|\dfrac{x}{\xi}\right|^n$ 收敛. 于是由比较判别法知,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$收敛,即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛.

(2) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = \eta$ 处发散. 我们用反证法证明这部分的结论. 如果存在 x_0: $|x_0| > |\eta|$, 使得级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛. 于是根据第(1) 部分的结论, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 就应当在 η 点绝对收敛, 这与假设矛盾. □

现在我们用直观的语言来叙述定理 10.5.1: 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $\xi \neq 0$ 收敛, 那么它在离原点比 ξ 近的任何点 x 处都绝对收敛(见图 10.3). 另一方面, 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $\eta \neq 0$ 处发散, 那么它在离原点比 $|\eta|$ 远的任何点 x 也发散(见图 10.3).

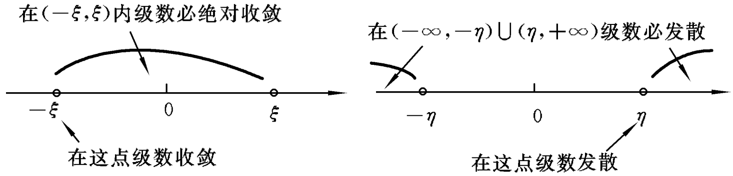


图 10.3

定理 10.5.1 表明, 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛的那些点 x 组成的集合是一段完整的线段, 中间没有空隙, 这线段包含原点 $x = 0$. 如果 c 点在这个收敛点集里面, 那么整个开区间 $(-|c|, |c|)$ 也在其中.

于是, 正如例 10.5.3 后面的说明所指, 幂级数收敛范围只有前面所说的三种可能性. 在第(2) 种可能的情形, 即如果存在一个数 R, 使得当 $|x| < R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 而当 $|x| > R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散, 则称 R 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的**收敛半径**. 在第(1) 种可能的情形, 即当 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 对一切 x 都收敛时, 称收敛半径为无穷大, 即 $R = \infty$. 在第(3) 种可能的情形, 级数仅在 $x = 0$ 点收敛, 则称收敛半径为 0, 即 $R = 0$. 这样我们就可以得到下面的结论.

定理 10.5.2 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在某些点 $x \neq 0$ 收敛, 但不在整个数轴收敛. 则必存在一个正数 R, 使这幂级数在区间 $(-R, R)$ 内部收敛, 而在 $|x| > R$ 处发散.

这时, 我们说幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 具有收敛半径 R. 综上所述(1)、(2)、(3) 三种情形, 可以得出结论: **任何一个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 必有一个收敛半径 R, 这里 $0 \leqslant R \leqslant +\infty$.**

若幂级数的收敛半径为R,则称$(-R,R)$为幂级数的**收敛区间**. 至于在区间的端点,情况可以是各种各样的:有的收敛,有的发散. 因此,幂级数的**收敛域**为

$$\text{收敛域}=(-R,R)\cup\{\text{收敛的端点}\}.$$

10.5.2 收敛半径的求法

利用数项级数的达朗贝尔比值判别法和柯西根值判别法,可以得到求幂级数收敛半径的两种方法.

定理 10.5.3 设给定幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,$a_n\neq 0$. 又设

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho.$$

则该幂级数的收敛半径

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}, & \text{若 } \rho\neq 0,\\ +\infty, & \text{若 } \rho=0,\\ 0, & \text{若 } \rho=+\infty.\end{cases}$$

证 当$x=0$时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0$,故只考虑$x\neq 0$的情形.

(i) 若$\rho\neq 0$,则对任何$x\neq 0$,有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x}{a_n}\right|=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x|\cdot\rho.$$

根据比值判别法,当$|x|\rho<1$时,即

$$|x|<\frac{1}{\rho}\text{ 时},\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|\text{ 收敛,从而}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\text{ 绝对收敛;}$$

当$|x|\rho>1$时,即

$$|x|>\frac{1}{\rho}\text{ 时},\quad\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\text{ 发散},$$

收敛半径$R=\dfrac{1}{\rho}$.

(ii) 若$\rho=0$,则对任何$x\neq 0$,有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x}{a_n}\right|=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x|\cdot 0=0<1,$$

可见$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$对任何$x$绝对收敛,于是收敛半径$R=+\infty$.

(iii) 若$\rho=+\infty$,则对任何$x\neq 0$,有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x}{a_n}\right|=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=+\infty>1,$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 对任何 $x \neq 0$ 发散，这时收敛半径 $R = 0$. □

定理 10.5.4　设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

则该幂级数的收敛半径

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}, & \rho \neq 0, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

这个定理的证明与定理 10.5.3 的证明相仿，只是要利用根值判别法. 我们留给读者自证.

例 10.5.4　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ 的收敛半径和收敛域.

解
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$
故收敛半径 $R = 1$，收敛区间为 $(-1, 1)$.

再考察端点处的情形. 当 $x = 1$ 时，级数为调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$，故发散. 当 $x = -1$ 时，级数为莱布尼兹型级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$，故收敛. 因此，$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ 的收敛域为左闭右开区间 $[-1, 1)$. □

例 10.5.5　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{(x-1)^n}{n}$ 的收敛域.

解　作坐标平移：$y = x - 1$，则级数变为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{y^n}{n} = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \cdots$$

对于这个幂级数来说，

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$，即对 y 的幂级数的收敛区间为 $-1 < y < 1$. 此外，当 $y = 1$ 时级数收敛，当 $y = -1$ 时级数发散. 因此，y 的幂级数的收敛域为 $-1 < y \leqslant 1$，从而原级数的收敛域为 $0 < x \leqslant 2$. □

例 10.5.6　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n2^n}$ 的收敛域.

解　由于
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2},$$

所以收敛半径 $R=2$. 容易验证,当 $x=2$ 时,级数为调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 故发散;当 $x=-2$ 时,级数为莱布尼兹型级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$,故收敛. 因此级数的收敛域为 $[-2,2)$. □

例 10.5.7 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^2}$ 的收敛域.

解 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^2}=x^2+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{9}+\cdots$,其系数 $a_1=0,a_2=1,a_3=0,a_4=\frac{1}{4}$, $a_5=0,a_6=\frac{1}{9},\cdots$,一般地,$a_{2k-1}=0,a_{2k}\neq 0$. 因此,根本谈不上数列$\left\{\frac{a_{k+1}}{a_k}\right\}$的极限. 但是,我们可以把级数写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^2}=(x^2)+\frac{(x^2)^2}{4}+\frac{(x^2)^3}{9}+\cdots \tag{10.5.3}$$

于是对于这里的 x^2 的幂级数(10.5.3)来说,

$$a_1=1,\quad a_2=\frac{1}{4},\quad a_3=\frac{1}{9},\quad \cdots,\quad a_n=\frac{1}{n^2},\cdots$$

并且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1,$$

因此,幂级数(10.5.3)的收敛半径是 $R=1$, 即当 $|x^2|=|x|^2<1$ 时原级数收敛;当 $|x^2|=|x|^2>1$ 时原级数发散. 由此可得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^2}$ 的收敛半径为 $R=1$.

此外,不难验明原级数在 $x=\pm 1$ 时均收敛,因而其收敛域为闭区间 $[-1,1]$. □

例 10.5.8 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛,试问此级数在 $x_0=2$ 处的敛散性如何?

解 因为 $|x_0-1|=|2-1|=1<|(-1)-1|=2$,又已知幂级数在 $x=-1$ 处收敛,所以由阿贝尔第一定理知,此级数在 $x_0=2$ 处绝对收敛. □

10.5.3 幂级数的性质

本段讨论幂级数的一致收敛性,幂级数在其收敛区间内和函数的连续性、可微性与可积性等.

定理 10.5.5(**阿贝尔第二定理**) 设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{10.5.4}$$

的收敛半径为 $R>0$,则 $\forall r\in(0,R)$,级数(10.5.4)在闭区间 $[-r,r]$ 上一致收敛(称级数(10.5.4)在 $(-R,R)$ 中**内闭一致收敛**).

证　我们知道,级数(10.5.4)在$(-R,R)$内任一点绝对收敛,$r\in(0,R)$,所以数项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$是收敛的. 又因为当$x\in[-r,r]$时,有

$$|a_nx^n|\leqslant|a_n|r^n,$$

据优级数判别法(本章10.4.4定理10.4.1)知,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$[-r,r]$上一致收敛. □

幂级数的这一性质保证了它的和函数不仅在收敛区间内是连续的,而且具有任意阶导数.

定理10.5.6　设幂级数(10.5.4)的收敛半径为R,则其和函数$S(x)$在$(-R,R)$内连续.

证　任取$x_0\in(-R,R)$,即$|x_0|<R$,在数$|x_0|$与R之间任取一数r,则$|x_0|\in[-r,r]\subset(-R,R)$. 据定理10.5.4,级数(10.5.4)在$[-r,r]$上一致收敛,因而和函数$S(x)$在$x_0$处连续(参看本章10.4.5定理10.4.2). 由于x_0是$(-R,R)$中的任意一点,故和函数$S(x)$在$(-R,R)$中连续. □

在这里我们不加证明地给出一个**结论**:若幂级数(10.5.4)在$x=R_0$处收敛,则它的和函数$S(x)$在区间$[0,R_0]$上连续.

定理10.5.7　设幂级数(10.5.4)的收敛半径为R,则其和函数$S(x)$在$(-R,R)$内可导,其导函数可通过逐项求导得到:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\tag{10.5.5}$$

并且逐项求导后的幂级数的收敛半径仍为R.

证　先证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$在$(-R,R)$内收敛. 为此,任取$x_0\in(-R,R)$,再取定$r$,使得$|x_0|<r<R$. 记$q=\dfrac{|x_0|}{r}<1$,则

$$|na_nx^{n-1}|=n\left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1}\cdot\frac{1}{r}\cdot|a_nr^n|=nq^{n-1}\cdot\frac{1}{r}|a_n|r^n,$$

由比值判别法容易验明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nq^{n-1}$是收敛的,故其一般项趋于零,即

$$nq^{n-1}\to0\quad(n\to\infty),$$

从而数列$\{nq^{n-1}\}$有界,即存在常数$M>0$,使得

$$nq^{n-1}\cdot\frac{1}{r}\leqslant M\quad(n=1,2,\cdots).$$

又$0<r<R$,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|r^n$收敛. 于是,由比较判别法即知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$收敛.

根据定理 10.5.5 知,幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ 在 $(-R,R)$ 中内闭一致收敛. 于是,对于幂级数(10.5.4)来说,本章 10.4.5 定理 10.4.4 的三个条件都满足,因而等式(10.5.5)在 $[-r,r]$ 中成立,其中 r 是满足 $0<r<R$ 的任一数. 由于 r 可以接近 R,所以等式(10.5.5)在 $(-R,R)$ 中成立.

反复应用上面所证得的结论,即可推知级数(10.5.4)的和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 中有任意阶导数:

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}\quad (k=1,2,\cdots), \tag{10.5.6}$$

且其收敛半径仍为 R. □

上面证明中最后得出的结论,揭示了幂级数和多项式的相似之处.

定理 10.5.8　设幂级数(10.5.4)的收敛半径为 R,$S(x)$ 是它的和函数. 则 $\forall x\in(-R,R)$,都有

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}, \tag{10.5.7}$$

且上式右端幂级数的收敛半径仍为 R.

证　不妨设 $x>0$,由于级数(10.5.4)在 $[0,x]$ 上一致收敛,故由本章 10.4.5 定理 10.4.3 知,此级数在 $[0,x]$ 上可逐项积分,因此有

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

这正是(10.5.7)式. 上式右端逐项求导后得到的级数是(10.5.4),据定理 10.5.7,它们有相同的收敛半径 R. □

定理 10.5.7 和定理 10.5.8 告诉我们,在任何幂级数收敛区间的内部,对它逐项微分或逐项积分永远是可行的. 下面我们利用这些性质求某些幂级数的和函数.

例 10.5.9　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的和函数.

解　令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$,显然其收敛域为区间 $[-1,1)$,$\forall x\in(-1,1)$,有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

所以　$S(x)=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x)\quad(-1\leqslant x<1).$ □

例 10.5.10　求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 的和函数.

解　令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$,容易证明,这个级数的收敛域为区间 $(-1,1)$,$\forall x\in(-1,1)$. 因为

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (n+1)t^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x},$$

所以
$$S(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\quad -1<x<1.$$
□

从上面两例可见,为了求给定幂级数的和函数,我们通过逐项微分或逐项积分的办法,把问题转化为一个较易求和的级数(如几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$) 的问题. 这是常用的方法,请读者注意掌握它.

例 10.5.11　证明 $\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$.

证　问题是求级数

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

的和,这个和又可看成是幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

的和函数 $S(x)$ 在 $x=1$ 点的值. 首先求出这个幂级数的收敛域为区间 $(-1,1]$. $\forall x\in(-1,1)$,有

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)\mathrm{d}t,$$

而
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(t^2)^n=\frac{1}{1+t^2},\quad |t|<1,$$

故
$$S(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\arctan t\Big|_0^x=\arctan x.$$

最后得
$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=S(1)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$
□

在这一节的末尾,我们简单介绍幂级数的运算性质.

设有幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots$$

它们的收敛区间分别为 $(-R,R)$ 和 $(-R',R')$.

加法
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n,\tag{10.5.8}$$

减法
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)x^n,\tag{10.5.9}$$

根据收敛级数的基本性质 1(本章 10.1 节),(10.5.8)、(10.5.9)两式在 $(-R,R)$ 与

$(-R',R')$两个区间中较小的一个区间内成立.

乘法　两个幂级数的柯西乘积(见本章10.3节)为

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots$$
$$+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n+\cdots$$

可以证明,上式在$(-R,R)$与$(-R',R')$中较小的一个区间内成立.

除法　$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n}=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots$$

这里假设$b_0\neq0$,系数$c_0,c_1,c_2,\cdots,c_n,\cdots$可如下确定:将$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$相乘,并令乘积中各项的系数分别等于级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$中同次幂的系数,即得

$$a_0=b_0c_0,\ a_1=b_1c_0+b_0c_1,\ a_2=b_2c_0+b_1c_1+b_0c_2,\cdots$$

由这些方程可以依次求出$c_0,c_1,c_2,\cdots,c_n,\cdots$

相除后所得的幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$的收敛区间可能比原来的两级数的收敛区间小得多.例如级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1$与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=1-x$在$(-\infty,+\infty)$上收敛,但

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n}=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

仅在区间$(-1,1)$内收敛.

习　题　10.5

(A)

1. 回答下列问题:
   (1) 什么是幂级数的收敛半径和收敛域?
   (2) 幂级数的收敛域有何特点?
   (3) 什么叫做幂级数在其收敛区间中的内闭一致收敛性?
   (4) 幂级数在其收敛区间内,和函数有哪些重要性质?
2. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域:
   (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$;　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n3^n}$; (5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n^2+1}{n^2-5}x^n$; (6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^nx^n}{n!}$;

(7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{2n+1}$; (8) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{5^n}$; (9) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n\ln n}$;

(10) $\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{x-3}{2}\right)^n$; (11) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}x^n$;

(12) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}x^{2n}$.

3. 求下列幂级数的收敛域及和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n2^n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$; (3) $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$; (5) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{2n}$; (6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

4. 求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(n+1)}{2^n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$; (4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-n+1}{2^n}$.

5. 若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为3, $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径为5,试问 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径是多少?

(B)

1. 求下列函数项的收敛域：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!x^n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n$; (3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\ln x)^n}{n}$.

2. (1) 如果幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=3$ 处发散,那么它在哪些 x 处必然发散?

(2) 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+5)^n$ 在 $x=-2$ 处发散,那么它在哪些 x 处必然发散?

3. 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 在 $x=7$ 处收敛,那么它在 x 的什么值处必然收敛?

4. 如果正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛,证明 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-1,1)$ 上连续.

答案与提示

(A)

2. (1) $(-1,1)$; (2) $(-\infty,+\infty)$; (3) $[-1,1)$; (4) $[0,6)$; (5) $(-1,1)$;
(6) $(-\infty,+\infty)$; (7) $[3,5)$; (8) $(-8,2)$; (9) $[4,6)$; (10) $(1,5)$;
(11) $(-e,e)$; (12) $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

3. (1) $S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right), & -2\leqslant x<0,0<x<2,\\ 1/2, & x=0,\end{cases}$ 收敛域为 $[-2,2)$;

(2) $S(x)=\dfrac{2x}{(1-x)^3}$,收敛域为$(-1,1)$； (3) $S(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$,收敛域为$(-1,1)$；

(4) $S(x)=\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{x}\ln(1-x)$, $|x|<1, x\neq 0$;$S(0)=0$ 收敛域为$(-1,1)$；

(5) $S(x)=\dfrac{x^2}{(1-x^2)^2}$,收敛域为$(-1,1)$；

(6) $S(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x$,收敛域$(-1,1)$.

4. (1) $-\dfrac{8}{27}$； (2) 3； (3) $\dfrac{\pi}{8}$； (4) $\dfrac{22}{27}$.

5. $R=3$.

(B)

1. (1) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$； (2) $[\dfrac{1}{2},+\infty)$； (3) 处处发散； (4) $(\dfrac{1}{e},e]$.

2. (1) 当 $|x|>3$ 时级数发散； (2) 当$x<-8$或$x>-2$时级数发散.

3. 当$-1<x\leqslant 7$时级数收敛.

10.6 泰勒级数

幂级数的一个重要应用是用它表示函数. 本节将研究如何将一个给定的函数展开成幂级数.

10.6.1 基本定理

设函数$f(x)$在点x_0的某个邻域内有到$(n+1)$阶的导数,则在该邻域内$f(x)$的n阶泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x) \tag{10.6.1}$$

成立,其中$R_n(x)$为拉格朗日型余项:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

ξ 是介于x 与x_0之间的某个值(参看第3 章3.5 节). 这样,在该邻域内$f(x)$可以用n 阶泰勒多项式

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \tag{10.6.2}$$

来逼近,其误差为余项的绝对值 $|R_n(x)|$. 自然会提出这样一个问题:如果项数越来越大而趋向无穷时,多项式(10.6.2)是不是会变成幂级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots, \tag{10.6.3}$$

称幂级数(10.6.3)为**泰勒级数**. 此外,这个级数是否收敛?如果收敛,那么它是否一定收敛于$f(x)$? 下面的定理将回答这些问题.

定理10.6.1 设函数$f(x)$在区间(x_0-R,x_0+R)上有任意阶导数,则$f(x)$在(x_0-R,x_0+R)上可展开为泰勒级数的充分必要条件是,$\forall x\in(x_0-R,x_0+R)$,有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

证 必要性. 设$f(x)$在(x_0-R,x_0+R)内能展开为泰勒级数,即$\forall x\in(x_0-R,x_0+R)$,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots \tag{10.6.4}$$

令$S_{n+1}(x)$表示$f(x)$在x_0点的n阶泰勒多项式(也是泰勒级数(10.6.3)的前$(n+1)$项之和),则$f(x)$的n阶泰勒公式(10.6.1)可写成

$$f(x)=S_{n+1}(x)+R_n(x).$$

根据(10.6.4)式,有

$$\lim_{n\to\infty}S_{n+1}(x)=f(x).$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}[f(x)-S_{n+1}(x)]=f(x)-f(x)=0.$$

充分性. 假设$\forall x\in(x_0-R,x_0+R)$,有$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. 则由

$$S_{n+1}(x)=f(x)-R_n(x),$$

可得 $$\lim_{n\to\infty}S_{n+1}(x)=\lim_{n\to\infty}[f(x)-R_n(x)]=f(x),$$

这表明$f(x)$的泰勒级数(10.6.3)在(x_0-R,x_0+R)内收敛,且收敛于$f(x)$. 定理证毕. □

根据这个定理,可以得到一个便于应用的充分条件.

定理 10.6.2 若存在常数M,使得$\forall x\in(x_0-R,x_0+R)$及一切自然数$n$,都有

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M,$$

则$f(x)$能在(x_0-R,x_0+R)内展开为泰勒级数.

证 只需证在定理的条件下,有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,\quad x\in(x_0-R,x_0+R).$$

为此,估计余项

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\leqslant\frac{MR^{n+1}}{(n+1)!}$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{R^n}{n!}$ 收敛,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{R^{n+1}}{(n+1)!}=0$,从而

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,\quad x\in(x_0-R,x_0+R).$$ □

10.6.2 几个基本初等函数的泰勒级数

函数展开为泰勒级数的步骤如下:

(1) 求出 $f(x)$ 的各阶导数 $f^{(n)}(x)$, $n=1,2,\cdots$(如果它们都存在);

(2) 求出 $f(x)$ 及其各阶导数在 $x=x_0$ 的值:

$$f(x_0),f'(x_0),f''(x_0),\cdots,f^{(n)}(x_0),\cdots;$$

(3) 写出泰勒级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots,$$

并求出其收敛半径 R;

(4) 考察当 $x\in(x_0-R,x_0+R)$ 时,余项 $R_n(x)$ 的极限

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(\xi\text{ 介于 }x\text{ 与 }x_0\text{ 之间})$$

是否为零. 如果为零,则 $f(x)$ 能在区间 (x_0-R,x_0+R) 内展开为泰勒级数

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

当 $x_0=0$ 时,得到的级数又称为**麦克劳林级数**:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

下面我们将求出函数 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林级数.

(1) 指数函数 e^x

由于 $f^{(n)}(x)=e^x(n=1,2,\cdots)$,故有

$f^{(n)}(0)=1(n=0,1,2,\cdots)$,其中 $f^{(0)}(0)=f(0)$. 于是得到级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

其收敛半径 $R=+\infty$.

任取正数 R,当 $|x|<R$ 时,对一切自然数 n 都有

$$|(e^x)^{(n)}|=e^x<e^R,$$

据定理 10.6.2 知,等式

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\tag{10.6.5}$$

在$(-R,R)$中成立. 由于R是任意的,故(10.6.5)式在整个数轴$(-\infty,+\infty)$上成立.

(2) 正弦函数$\sin x$和余弦函数$\cos x$

因为 $$(\sin x)^{(n)}\big|_{x=0}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\Big|_{x=0}=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k,\\ (-1)^k, & n=2k+1.\end{cases}$$

又因为 $$\left|(\sin x)^{(n)}\right|=\left|\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\leqslant 1$$

对一切x及一切自然数n成立,根据定理10.6.2,有

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$
$$+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty).\tag{10.6.6}$$

用同样的方法可得

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$
$$+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty).\tag{10.6.7}$$

(3) 对数函数$\ln(1+x)$

我们用间接的方法得到$\ln(1+x)$的展开式.

记$f(x)=\ln(1+x)$,则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},$$

而$\dfrac{1}{1+x}$是收敛的几何级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\,(-1<x<1)$的和函数,即

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots\quad(-1<x<1),$$

将上式从0到x逐项积分,得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\cdots\quad(-1<x\leqslant 1).\tag{10.6.8}$$

等式(10.6.8)在$x=1$处也成立,是因为当$x=1$时,(10.6.8)式右端的级数是收敛的,而$\ln(1+x)$在$x=1$处有定义且连续.

(4) 函数$f(x)=(1+x)^{\alpha}$(α为任意常数)

$f(x)$的各阶导数为

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1-x)^{\alpha-n}\quad(n=1,2,\cdots),$$

所以 $$f(0)=1,\ f'(0)=\alpha,\ f''(0)=\alpha(\alpha-1),\cdots$$
$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1),\cdots$$

于是得级数

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

由于这个级数相邻两项系数之比的绝对值

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|\to 1\quad(n\to\infty),$$

因此,对任意的常数α,这个级数在开区间$(-1,1)$内收敛.下面证明在$(-1,1)$内,这个级数收敛到$(1+x)^{\alpha}$.

设这个级数在区间$(-1,1)$内收敛到函数$F(x)$:

$$F(x)=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

要证明$F(x)=(1+x)^{\alpha}(-1<x<1)$.

将级数逐项求导,得

$$F'(x)=\alpha+\alpha(\alpha-1)x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots,$$

两边各乘以$(1+x)$,并把含有x^n的两项合并起来$(n=1,2,\cdots)$.根据恒等式

$$\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}+\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\quad(n=1,2,\cdots)$$

有
$$\begin{aligned}(1+x)F'(x)&=\alpha\left[1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\right]\\&=\alpha F(x)\quad(-1<x<1).\end{aligned}$$

现在令
$$\varphi(x)=\frac{F(x)}{(1+x)^{\alpha}},$$

于是$\varphi(0)=F(0)=1$,且

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\frac{(1+x)^{\alpha}F'(x)-\alpha(1+x)^{\alpha-1}F(x)}{(1+x)^{2\alpha}}\\&=\frac{(1+x)^{\alpha-1}[(1+x)F'(x)-\alpha F(x)]}{(1+x)^{2\alpha}}=0\end{aligned}$$

所以$\varphi(x)=C$(常数).而$\varphi(0)=1$,故$\varphi(x)=1$,即

$$F(x)=(1+x)^{\alpha}\quad(-1<x<1).$$

因此在开区间$(-1,1)$内有展开式

$$\begin{aligned}(1+x)^{\alpha}=&1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots\\&+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\quad(-1<x<1).\end{aligned}\tag{10.6.9}$$

在区间端点处,展开式是否成立要根据α的值而定.

公式(10.6.9)称为**二项展开式**.特别当α为正整数时,级数就是x的α次多项式.

这就是代数学中的二项式定理.

上面关于 $\frac{1}{1-x}$, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ 及 $(1+x)^\alpha$ 的幂级数展开式,今后可以直接引用.

10.6.3 应用基本展开式的例子

例 10.6.1 将 $\arctan x$ 展开成 x 的幂级数.

解 我们使用间接法展开. 在 $\frac{1}{1+x}$ 的展开式

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad (-1<x<1) \tag{10.6.10}$$

中,用 x^2 替代 x,得

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \quad (-1<x<1). \tag{10.6.11}$$

对(10.6.11)式两端从 0 到 x 积分,即得

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots \quad (-1\leqslant x\leqslant 1). \tag{10.6.12}$$

级数(10.6.12)在 $x=\pm 1$ 处的收敛性,可由交错级数的莱布尼兹判别法推出. □

例 10.6.2 求 $\arcsin x$ 的麦克劳林级数展开式.

解 $\arcsin x=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$,而由(10.6.9)式知,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=1+\frac{t^2}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^6+\cdots$$
$$+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}t^{2n}+\cdots \quad (-1<t<1), \tag{10.6.13}$$

对(10.6.13)式两端从 0 到 x 积分,即得

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots$$
$$+\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \quad (-1<x<1). \tag{10.6.14}$$

此外,利用 $\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$, $\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}-\arctan x$,就可以得到 $\arccos x$ 与 $\operatorname{arccot} x$ 的展开式.

下面再给出将函数在 $x=x_0$ 展成幂级数的两个例子.

例 10.6.3 将 $\ln x$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数.

解 将$\ln x$写成
$$\ln x=\ln[2+(x-2)]=\ln[2(1+\frac{x-2}{2})]$$
$$=\ln 2+\ln(1+\frac{x-2}{2}).\tag{10.6.15}$$
令$y=\frac{x-2}{2}$,则由(10.6.8)式可得
$$\ln(1+\frac{x-2}{2})=\ln(1+y)$$
$$=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}y^n+\cdots\quad(-1<y\leqslant 1)$$
$$=\frac{x-2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(x-2)^3}{2^3}-\cdots$$
$$+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{(x-2)^n}{2^n}+\cdots\quad(0<x\leqslant 4).$$
将上式代入(10.6.15)式中,得
$$\ln x=\ln 2+\frac{x-2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(x-2)^3}{2^3}-\cdots$$
$$+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{(x-2)^n}{2^n}+\cdots\quad(0<x\leqslant 4).$$
□

例 10.6.4 将$\sin x$展开成$(x-\frac{\pi}{4})$的幂级数.

解 先将$\sin x$写成
$$\sin x=\sin[\frac{\pi}{4}+(x-\frac{\pi}{4})]=\sin\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4})+\cos\frac{\pi}{4}\sin(x-\frac{\pi}{4})$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[\cos(x-\frac{\pi}{4})+\sin(x-\frac{\pi}{4})],$$
根据基本展开式(10.6.6)和(10.6.7),有
$$\sin(x-\frac{\pi}{4})=(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\frac{1}{5!}(x-\frac{\pi}{4})^5-\cdots$$
$$(-\infty<x<+\infty),$$
$$\cos(x-\frac{\pi}{4})=1-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4-\cdots$$
$$(-\infty<x<+\infty),$$
所以
$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}[1+(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\cdots]$$
$$(-\infty<x<+\infty).$$
□

10.6.4 微分方程的幂级数解法

若一个微分方程的解可以展成幂级数,就可以用幂级数方法求解.

例 10.6.5 求解微分方程

$$(1-x^2)y''=-2y. \tag{10.6.16}$$

解 首先,假定(10.6.16)式的解可以展成幂级数

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \tag{10.6.17}$$

其中系数 $a_0,a_1,a_2,\cdots$待定. 将(10.6.17)式逐项微分两次,得

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}, \tag{10.6.18}$$

将(10.6.18)式和(10.6.17)式代入(10.6.16)式得

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

即
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^n=-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

即
$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)a_{n+2}-n(n-1)a_n]x^n=-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

由幂级数展开的唯一性,得

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}-n(n-1)a_n=-2a_n,$$

$$a_{n+2}=\frac{n^2-n-2}{(n+2)(n+1)}a_n=\frac{n-2}{n+2}a_n.$$

这是一个递推公式,当任意给定 a_0 时,就可以确定 $a_2,a_4,a_6,\cdots$,任意给定 a_1 时,就可以确定 $a_3,a_5,a_7,\cdots$. 这样便可以进一步求得

$$a_2=-a_0,\quad a_4=a_6=a_8=\cdots=0;$$

$$a_3=-\frac{a_1}{3},\quad a_5=\frac{1}{5}\cdot\frac{(-1)}{3}a_1,\ \cdots,$$

$$a_{2n+1}=\frac{2n-3}{2n+1}a_{2n-1}=\frac{2n-3}{2n+1}\cdot\frac{2n-5}{2n-1}\cdot\frac{2n-7}{2n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{(-1)}{3}a_1$$

$$=\frac{(-1)}{(2n+1)(2n-1)}a_1.$$

因此
$$y=a_0(1-x^2)-a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}x^{2n+1}. \tag{10.6.19}$$

上面是在假定(10.6.16)式的解可以展成幂级数的前提下求得(10.6.19)式的,因此它只是微分方程(10.6.16)式的形式解. 只有证明了(10.6.19)式存在收敛区间,上述的计算步骤才是合理的,(10.6.19)式才是(10.6.16)式的幂级数解.

利用达朗贝尔比值判别法可以证明,级数(10.6.19)式在 $|x|<1$ 时是收敛的. 因此,当 $|x|<1$ 时,(10.6.19)式是(10.6.16)式的解,其中 a_0,a_1 可以是任意常数. □

习　题　10.6

(A)

1. 回答下列问题:

(1) 函数 $f(x)$ 能在区间 (x_0-R, x_0+R) 中展开为幂级数的充分必要条件是什么?

(2) 如果函数 $f(x)$ 在区间 (x_0-R, x_0+R) 中有任意阶导数, $f(x)$ 是否能在这区间上展开幂级数?

2. 将下列函数展开成 x 的幂级数,并指出展开式成立的范围:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$;　　(2) $f(x)=\sin^2 x$;

(3) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;　　(4) $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$.

3. 将下列函数在指定点展开成幂级数,并指出展开式成立的范围:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}, x=1$;　　(2) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}, x=2$;

(3) $f(x)=\ln\dfrac{1}{2+2x+x^2}, x=-1$;　　(4) $f(x)=\cos x, x=-\dfrac{\pi}{3}$.

(B)

1. 将函数 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ 展开成 x 的幂级数,并证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}=1$.

2. 利用逐项求导和逐项积分的方法,将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{4+x^2}{4-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

3. 求下列微分方程的幂级数解:

(1) $y''=xy$;　　(2) $xy''+y'+xy=0$.

答案与提示

(A)

2. (1) $\dfrac{1}{1+x+x^2}=1+x^3+x^6+\cdots+x^{3n}+\cdots-(x+x^4+x^7+\cdots+x^{3n+1}+\cdots), |x|<1$;

(2) $\sin^2 x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(2x)^{2n}}{2(2n)!}, -\infty<x<+\infty$;

(3) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2(2n)!}{(n!)^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n+1}, |x|\leqslant 1$;

(4) $\int_0^x e^{-t^2}dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}, -\infty<x<+\infty$.

3. (1) $\dfrac{1}{x^2+4x+3}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{2^{n+2}}-\dfrac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n\quad(-1<x<3)$;

(2) $\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{4^{n-1}}\right)(x-2)^n\quad(1<x<3)$;

(3) $\ln\dfrac{1}{2+2x+x^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x+1)^{2n}}{n}\quad(-2\leqslant x\leqslant 0)$;

(4) $\cos x=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(2n)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}\right]\ (-\infty<x<+\infty)$.

(B)

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}\ (-\infty<x<+\infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1$.

2. $\arctan\frac{4+x^2}{4-x^2}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)4^{2n+1}}\ (|x|<2)$.

3. (1) $y=a_0\left(1+\frac{x^3}{3!}+\frac{4x^6}{6!}+\frac{4\cdot 7x^9}{9!}+\cdots+\frac{4\cdot 7\cdot\cdots\cdot(3k-2)x^{3k}}{(3k)!}\right)$
$+a_1\left(x+\frac{2x^4}{4!}+\frac{2\cdot 5x^7}{7!}+\cdots+\frac{2\cdot 5\cdot\cdots\cdot(3k-1)x^{3k+1}}{(3k+1)!}\right)\quad(-\infty<x<+\infty)$;

(2) $y=a_0\left(1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{(2\cdot 4)^2}-\frac{x^6}{(2\cdot 4\cdot 6)^2}+\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2k))^2}+\cdots\right)$
$(-\infty<x<+\infty)$.

10.7 周期函数的傅立叶级数

前几节论述了用幂级数表示函数的问题.可以看到,幂级数保留了多项式的许多良好的性质.用幂级数表示函数,在微分运算、积分运算及数值计算等方面都有许多方便之处.但是,用幂级数表示函数也有其局限性,那就是对被表示的函数要求比较苛刻,例如要求在某点附近具有任意阶导数.如果某函数在某一区间上有间断点,甚至只是在这区间有某阶导数不存在的点,那么,这个函数就肯定不能在整个区间用一个幂级数表示.

但是,在很多理论或实际问题中所遇到的函数,往往是不可导的,有时甚至还是不连续的,如周期性的方形脉冲函数,锯齿形波函数等.那么,就得设法寻求其他较合适的函数项级数来表示此类函数.从本节开始,将讨论如何用三角函数所构成的级数来表示函数的问题,或说如何将函数展开成傅立叶级数的问题.

三角级数是指形如

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin\omega x)\tag{10.7.1}$$

的级数,这是一种特殊类型的函数项级数,其中a_0,a_n,b_n $(n=1,2,\cdots)$为常数,称为三角级数(10.7.1)的**系数**.ω也是常数,称为**圆频率**,第一项写作$\frac{a_0}{2}$是为了今后应用的方便.若用x代替ωx,则得到

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).\tag{10.7.2}$$

下面将研究用这类级数来表示实轴上的周期为2π的函数的问题.

10.7.1 基本三角函数系

首先引进两个函数$f(x)$和$g(x)$在区间上正交的概念. 仿照第6章6.2节中引进两个n维向量$a=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$和$b=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$的点积的概念

$$a\cdot b=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,$$

对$C[-\pi,\pi]$中的两个函数$f(x)$和$g(x)$,定义它们的**内积**为

$$(f(x),g(x))=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x. \tag{10.7.3}$$

在$\mathbf{R}^n$中,a与b正交是指$a\cdot b=0$. 于是,所谓$f(x)$与$g(x)$在$[-\pi,\pi]$上**正交**即指

$$(f(x),g(x))=0.$$

仍仿照$\mathbf{R}^n$中的作法,将$f(x)$和$g(x)$看作向量,则可定义其长度(又称为范数)为

$$\|f(x)\|=\sqrt{(f(x),f(x))}=\left(\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

现在来考察下面的**基本三角函数系**:

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \cdots \tag{10.7.4}$$

其中每一个函数都以2π为周期. 利用三角函数的积化和差公式,不难验证下列事实:对于任意的非负整数m、n,有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n, m=n=0,\\ \pi, & m=n\neq 0;\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n\neq 0,\\ 2\pi, & m=n=0;\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\mathrm{d}x=0.$$

上述性质表明三角函数系(10.7.4)在$[-\pi,\pi]$上两两正交,因此,称三角函数系(10.7.4)是一**正交系**. 由(10.7.4)式可导出另一正交系:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\cdots \tag{10.7.5}$$

于是此三角函数系中,每个函数的长度都为1,即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2\mathrm{d}x=1,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right)^2\mathrm{d}x=1,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right)^2\mathrm{d}x=1\quad(n=1,2,\cdots).$$

因此称三角函数系(10.7.5)为**标准正交系**.

我们看到,标准正交系(10.7.5)很像欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中单位坐标向量所构成的一组基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$,这组基中的每个向量长度都为1,每两个不同的向量都互相正交.对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任一向量 a,都能用这组基表示为

$$a=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n,$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 就是 a 的坐标.现在要讨论的问题是:函数 $f(x)$ 满足什么条件时可以通过标准正交系(10.7.5)表示?或者说 $f(x)$ 能按函数系(10.7.5)展开成一个三角级数?展开式中的系数怎样计算?

10.7.2　傅立叶系数

假设函数 $f(x)$ 有周期 2π,且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积.又假设 $f(x)$ 可以展开成一个三角级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\tag{10.7.6}$$

且这级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛.则可以利用三角函数系的正交性求出全部系数.

为此,在(10.7.6)式两端逐项积分.利用三角函数系的正交性,得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x\right)=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x=\pi a_0,$$

即
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x.$$

在(10.7.6)式两端同乘 $\cos nx$ 后,逐项积分,得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos nx\mathrm{d}x+a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2nx\mathrm{d}x$$
$$+\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\mathrm{d}x,$$

由三角函数系的正交性,得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\pi a_n,$$

即
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots).$$

$n=0$ 时,它也包含了 a_0 的公式.

类似地,在(10.7.6)式两端同乘 $\sin nx$ 后,逐项积分,得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\pi b_n,$$

即
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots).$$

由上面的讨论可知,给定一个周期为 2π 的函数 $f(x)$,只要它在 $[-\pi,\pi]$ 上可积,就对应着一个三角级数:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi), \qquad (10.7.7)$$

其中
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad (n = 0,1,2,\cdots), \qquad (10.7.8)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots). \qquad (10.7.9)$$

这里级数(10.7.7)式可以收敛也可以不收敛.即使收敛,现在也还不知道是否一定收敛到$f(x)$.因此在(10.7.7)式中用记号“~”,而不是用等号“=”来表示.称(10.7.7)式为$f(x)$的**傅立叶**(Fourier)**级数**,由(10.7.8)式和(10.7.9)式确定的数列a_0, a_n, b_n, $n=1,2,\cdots$,称为$f(x)$的**傅立叶系数**.

10.7.3 收敛定理

下面给出一个收敛定理(不加证明),它能回答在什么条件下级数(10.7.7)式收敛的问题.在叙述这个定理之前,先引进一个概念.

定义 10.7.1 若$f(x)$在区间$[a,b]$上只有有限个单调区间,则称$f(x)$在区间$[a,b]$上**逐段单调**.

定理 10.7.1(**狄利克雷收敛定理**) 设$f(x)$是以2π为周期的函数,若它满足:

(1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

(2) 在一个周期内逐段单调.

则$f(x)$的傅立叶级数收敛,并且当x是$f(x)$的连续点时,级数收敛于$f(x)$;当x是$f(x)$的第一类间断点时,级数收敛于$\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

由上述收敛定理可见,函数展开成傅立叶级数的条件比展开成幂级数的条件低得多.

10.7.4 例子

例 10.7.1 设$f(x)$是以2π为周期的函数,它在$[-\pi,\pi)$上的表达式是$f(x)=x$.将$f(x)$展开成傅立叶级数.

解 所给函数满足收敛定理的条件,它在$x=(2k+1)\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$处不连续,在其他点处连续,故由收敛定理知$f(x)$的傅立叶级数收敛,且当$x\neq(2k+1)\pi$时,级数收敛于$f(x)$,当$x=(2k+1)\pi$时,级数收敛于$\frac{1}{2}[f(-\pi^+)+f(\pi^-)]=\frac{-\pi+\pi}{2}=0$.

傅立叶系数计算如下:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{d}x = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x = 0 \quad (n = 1,2,\cdots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{n\pi}[\pi\cos n\pi - (-\pi\cos(-n\pi))] = -\frac{2}{n}\cos n\pi$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2}{n} \quad (n = 1,2,\cdots).$$

于是得到 $f(x)$ 的傅立叶级数展开式

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

$$(-\infty < x < +\infty, x \neq (2k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

和函数的图像(见图10.4). 在上述等式中令 $x = \frac{\pi}{2}$,得到

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots \tag{10.7.10}$$

这是在本章例10.5.11中曾经得到过的结果. □

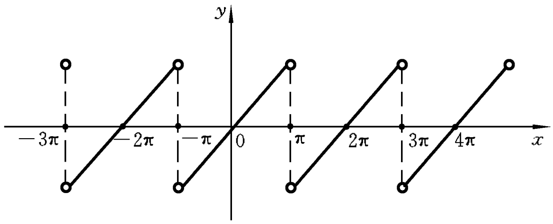


图10.4

例10.7.2 求周期为 2π 的函数 $f(x) = x^2 (0 < x < 2\pi)$ (见图10.5)的傅立叶级数.

解
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\,dx = -\frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(x\cos nx)\Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx$$

$$= \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx\,dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi}(x^2\cos nx)\Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= -\frac{4\pi}{n} - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx = -\frac{4\pi}{n}.$$

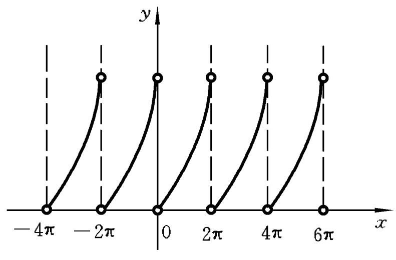


图10.5

所给函数 $f(x)$ 在 $x = 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 处不连续,在其他点处连续,满足收敛定理的条件. 因此 $f(x)$ 的傅立叶级数收敛. 其展开式为

$$f(x)=x^2=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

$$(-\infty<x<+\infty, x\neq 2k\pi, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

在间断点 $x=2k\pi$ 处,级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(0^+)+f(2\pi^-)]=\frac{0+4\pi^2}{2}=2\pi^2. \qquad \square$$

10.7.5 正弦级数和余弦级数

由奇偶函数的性质立即可推知奇偶函数的傅立叶系数有以下特点.

(1) 若周期为 2π 的可积函数是奇函数,则 $f(x)\cos nx$ 也是奇函数,从而

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0 \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

因此 $f(x)$ 的傅立叶级数只含正弦项,即为**正弦级数**

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,$$

其中

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots). \tag{10.7.11}$$

(2) 若周期为 2π 的可积函数是偶函数,则 $f(x)\sin nx$ 是奇函数,从而

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0 \quad (n=1,2,\cdots),$$

因此 $f(x)$ 的傅立叶级数只含余弦项,即为**余弦级数**

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

其中

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots). \tag{10.7.12}$$

例 10.7.3 求图 10.6 所示锯齿波的傅立叶级数.

解 根据图形写出在一个周期内函数的表达式:

$$f(t)=\begin{cases}1+\dfrac{2t}{\pi} & (-\pi\leqslant t<0),\\[2mm] 1-\dfrac{2t}{\pi} & (0\leqslant t<\pi).\end{cases}$$

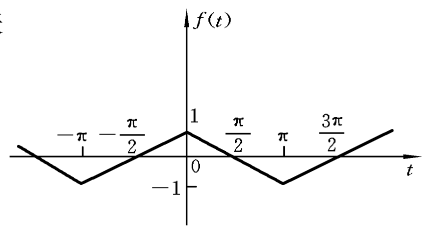


图 10.6

它是偶函数,故

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t=0 \quad (n=1,2,\cdots),$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{2t}{\pi}\right)\cos nt\,\mathrm{d}t=-\frac{4}{n\pi^2}\int_0^{\pi}t\,\mathrm{d}\sin nt=\frac{4}{n\pi^2}\int_0^{\pi}\sin nt\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{4}{n^2\pi^2}\cos nt\Big|_0^\pi = \frac{4}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n] = \begin{cases}\dfrac{8}{n^2\pi^2}\ (n\text{ 为奇数}),\\ 0\ (n\text{ 为偶数}),\end{cases}\quad n=1,2,\cdots$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(1-\frac{2t}{\pi}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left(t-\frac{t^2}{\pi}\right)\Big|_0^\pi = 0.$$

由于$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,根据收敛定理,它有下列的余弦级数展开式:

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)t\quad(-\infty<t<+\infty).$$ □

例 10.7.4　将周期为2π的函数展开成傅立叶级数,其中

$$f(x) = \sin\frac{x}{2}\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

解　因$f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$是奇函数,故$a_n=0,n=0,1,2,\cdots$,而

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sin\frac{x}{2}\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2\sin\dfrac{\pi}{2}}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2-\dfrac{1}{4}}.$$

$f(x)$满足收敛定理的条件,它可展开成下列正弦级数:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2-\dfrac{1}{4}}\sin nx$$

$$(-\infty<x<+\infty,x\neq(2k+1)\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

在间断点$x=(2k+1)\pi$处,级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(-\pi^+)+f(\pi^-)] = \frac{-1+1}{2} = 0.$$ □

习　题　10.7

(A)

1. 回答下列问题:
   (1) 三角函数系的正交性是指什么?
   (2) 收敛定理的条件有哪些?
   (3) 周期为2π的函数$f(x)$的傅立叶级数是否一定收敛?如果收敛,是否一定收敛到自身,即收敛到$f(x)$?
   (4) 奇函数和偶函数的傅立叶系数有什么特点?
2. 试将下列以2π为周期的函数$f(x)$展开成傅立叶级数:

(1) $f(x)=\begin{cases}-\pi, & -\pi\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

(3) $f(x)=|\sin x|,\ -\pi\leqslant x<\pi.$ (4) $f(x)=\begin{cases}e^{ax}, & -\pi\leqslant x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

(5) $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2},\ 0<x<2\pi.$ (6) $f(x)=2\sin\dfrac{x}{3},\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$

3. 设$f(x)$是以2π为周期的函数,它在$[-\pi,\pi]$上的表达式是$f(x)=\begin{cases}x+1, & -\pi\leqslant x<0,\\ x^2, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$若它的傅立叶级数的和函数为$S(x)$,试问$S(-\pi)$、$S(0)$和$S(\pi)$的值各为多少?

(B)

1. 设φ和ψ都是周期为2π的函数.

(1) 若函数$\varphi(-x)=\psi(x)$,$-\pi\leqslant x<\pi$,问$\varphi(x)$和$\psi(x)$的傅立叶系数a_n、b_n与α_n、β_n($n=0,1,2,\cdots$)之间有何关系?

(2) 若函数$\varphi(-x)=-\psi(x)$,$-\pi\leqslant x<\pi$,问$\varphi(x)$和$\psi(x)$的傅立叶系数a_n、b_n与α_n、β_n($n=0,1,2,\cdots$)之间有何关系?

2. 设$f(x)$是以2π为周期的函数. 证明:

(1) 若函数$f(x-\pi)=f(x)$,则$f(x)$的傅立叶系数满足$a_{2k+1}=0$,$b_{2k+1}=0$($k=0,1,2,\cdots$);

(2) 若函数$f(x-\pi)=-f(x)$,则$f(x)$的傅立叶系数满足$a_0=0$,$a_{2k}=0$,$b_{2k}=0$($k=1,2,\cdots$).

答案与提示

(A)

2. (1) $f(x)=-\dfrac{\pi}{4}-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x-\frac{1}{n}[1-2(-1)^n]\sin nx\right\}$($-\infty<x<+\infty$,$x\neq k\pi$,$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$),当$x=2k\pi$($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$)时,级数收敛于$-\dfrac{\pi}{2}$,当$x=(2k+1)\pi$($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$)时,级数收敛于$\pi$;

(2) $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$ ($-\infty<x<+\infty$,$x\neq0,\pm\pi,\pm2\pi,\cdots$). 在$x=k\pi$($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$)处级数收敛于0;

(3) $f(x)=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos2nx$ ($-\infty<x<+\infty$);

(4) $f(x)=\dfrac{1}{2a\pi}(1-e^{a\pi})+\dfrac{a}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{a^2+n^2}\cos nx+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n[(-1)^n-1]}{a^2+n^2}\sin nx$ ($-\infty<x<+\infty$,$x\neq k\pi$,$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$). 当$x=2k\pi$时,级数收敛于$\dfrac{1}{2}$,当$x=(2k+1)\pi$时,级数收敛于$\dfrac{1}{2}e^{-a\pi}$,其中$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$;

(5) $\dfrac{\pi-x}{2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$($0<x<2\pi$);

(6) $2\sin\dfrac{x}{3}=\dfrac{18\sqrt{3}}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{9n^2-1}\sin nx$ ($-\pi<x<\pi$);当$x=\pm\pi$时,级数收敛于0.

3. $S(\pm\pi)=1-\pi+\pi^2, S(0)=\frac{1}{2}$.

(B)

1. (1) $a_n=\alpha_n(n=0,1,2,\cdots), b_n=-\beta_n(n=1,2,\cdots)$;

(2) $a_n=-\alpha_n(n=0,1,2,\cdots), b_n=\beta_n(n=1,2,\cdots)$.

10.8　任意区间上的傅立叶级数

为了使理论应用的范围更广,还需要考虑定义在任意区间上的非周期函数的傅立叶级数.

10.8.1　区间$[-\pi,\pi]$上的傅立叶级数

有时函数$f(x)$只在区间$[-\pi,\pi]$上有定义,并且满足收敛定理的条件,那么我们可以对$f(x)$作**周期延拓**.具体作法是:引进一个辅助函数$F(x)$,它在$(-\pi,\pi)$内与$f(x)$相同,即

$$F(x)=f(x),\quad x\in(-\pi,\pi).$$

然后令

$$F(-\pi)=F(\pi)=f(\pi).$$

并将函数$F(x)$按周期性规律扩展到整个实轴,使之以2π为周期.

对这样作成的周期为2π的函数$F(x)$,可利用收敛定理将其展开成傅立叶级数.最后限制x在$(-\pi,\pi)$内,此时$F(x)=f(x)$,这样便得到$f(x)$的傅立叶级数.根据收敛定理,这级数在区间端点$x=\pm\pi$处收敛于$\frac{1}{2}[f(-\pi^+)+f(\pi^-)]$.

例 10.8.1　证明$f(x)=x^2$在闭区间$[-\pi,\pi]$上有傅立叶级数展开式

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi. \tag{10.8.1}$$

证　由于$f(x)=x^2$是$[-\pi,\pi]$上的偶函数,故

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,\mathrm{d}x=0,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}(\sin nx)=-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}(\cos nx)=\frac{4\pi}{n^2\pi}\cos n\pi=(-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

由收敛定理知,(10.8.1)式在$(-\pi,\pi)$内成立.

将$f(x)=x^2, x\in[-\pi,\pi]$以2π为周期延拓到整个数轴上时,函数在$x=\pm\pi$处仍保持连续性(见图10.7).因此在$x=\pm\pi$处,(10.8.1)式也成立.　□

特别地,在公式(10.8.1)中,令 $x=\pi$,就得到

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots; \tag{10.8.2}$$

令 $x=0$,就得到

$$\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n^2}+\cdots; \tag{10.8.3}$$

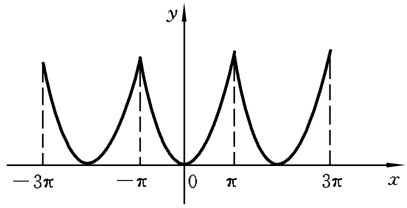


图 10.7

将(10.8.2)式与(10.8.3)式相加后除以2,即得

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots; \tag{10.8.4}$$

将(10.8.2)式与(10.8.3)式相减后除以2,即得

$$\frac{\pi^2}{24}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots. \tag{10.8.5}$$

在有些问题中,往往只在区间 $[0,\pi]$ 上给出函数 $f(x)$. 要想考虑 $[-\pi,\pi]$ 上 $f(x)$ 的傅立叶级数,就必须扩充 $f(x)$ 在 $(-\pi,0)$ 上的定义. 当然,如果没有特殊要求,只要保证函数的可积性,这种延拓完全是任意的. 不过,为了方便,常常将 $f(x)$ 延拓成 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数或偶函数,从而得到 $f(x)$ 的正弦级数或余弦级数. 这类问题在实际应用中是常见的,如在研究某些波动问题、热传导问题、扩散问题时,就往往要求将定义在 $[0,\pi]$ 上的函数 $f(x)$ 展开成正弦级数或余弦级数. 下面给出具体的作法.

设 $f(x)$ 定义在区间 $[0,\pi]$ 上,且满足收敛定理的条件. 首先在开区间 $(-\pi,0)$ 内补充 $f(x)$ 的定义,得到定义在 $(-\pi,0]$ 上的函数 $F(x)$,使它在 $(-\pi,\pi)$ 上成为奇函数或偶函数. 在奇函数的情形,若 $f(0)\neq 0$,则规定 $F(0)=0$. 按这种办法扩充函数定义域的过程称为**奇延拓**或**偶延拓**. 然后再将奇延拓(或偶延拓)后的函数展开成傅立叶级数,则这个级数必定是正弦级数(或余弦级数). 最后再限制 $x\in(0,\pi]$,这时 $F(x)=f(x)$,于是便得到了 $f(x)$ 的正弦级数(或余弦级数)展开式.

例 10.8.2 将函数 $f(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}$ 在 $[0,\pi]$ 上分别展开成余弦级数和正弦级数.

解 (1) 对 $f(x)$ 作偶延拓,由公式(10.7.12),得

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\cos nx}{n^2}\bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{n^2}.$$

因此,由收敛定理,有

$$\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}=-\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},\quad 0\leqslant x\leqslant\pi.$$

(2) 对$f(x)$作奇延拓,由公式(10.7.11),得

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)\sin nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)\frac{(-\cos nx)}{n}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}(x-\pi)\cos nx\,dx \\
&= \frac{(-1)^n\pi}{2n}+\frac{1}{n^2\pi}(x-\pi)\sin nx\Bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx \\
&= \frac{(-1)^n\pi}{2n}+\frac{\cos nx}{n^3\pi}\Bigg|_0^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^n\pi}{2n}+\frac{1}{n^3\pi}[(-1)^n-1],\quad n=1,2,\cdots.
\end{aligned}$$

因此得
$$\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n\pi}{2n}+\frac{1}{n^3\pi}((-1)^n-1)\right]\sin nx,$$
$$0\leqslant x<\pi.$$
□

10.8.2 区间$[-l,l]$上的傅立叶级数

设在区间$[-l,l]$上给定可积函数$f(x)$,其中l是任何正数.作变量代换

$$y=\frac{\pi x}{l}\quad 或\quad x=\frac{ly}{\pi},$$

则作为y的函数

$$F(y)=f\left(\frac{ly}{\pi}\right)$$

就是区间$[-\pi,\pi]$上的可积函数.于是前面的全部理论都可用到函数$F(y)$上.我们将其归纳如下.

(1) 设$f(x)$是周期为$2l$的周期函数,满足收敛定理的条件,则$f(x)$的傅立叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\tag{10.8.6}$$

(在$f(x)$的间断点x_0处,(10.8.6)式中的级数收敛于$\frac{1}{2}[f(x_0^-)+f(x_0^+)]$),其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=0,1,2,\cdots),\tag{10.8.7}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=1,2,\cdots).\tag{10.8.8}$$

(证明留给读者).

(2) 若$f(x)$是$[-l,l]$上的偶函数,则

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots), \tag{10.8.9}$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1,2,\cdots).$$

若 $f(x)$ 是 $[-l,l]$ 上的奇函数,则

$$a_n = 0 \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots). \tag{10.8.10}$$

(3) 如果 $f(x)$ 只在 $[0,l]$ 上给出,则可以进行奇延拓或偶延拓,使 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上的傅立叶级数只含正弦项或余弦项.

例 10.8.3　将函数 $f(x) = 2 + |x|(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ 展开成以 2 为周期的傅立叶级数.

解　因 $f(x)$ 是偶函数,故 $b_n = 0(n = 1,2\cdots)$.

$$a_0 = 2\int_0^1 (2 + x)\mathrm{d}x = 5,$$

$$a_n = 2\int_0^1 (2 + x)\cos n\pi x\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\cos n\pi x\mathrm{d}x = \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2} \quad (n = 1,2,\cdots).$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件,故

$$\begin{aligned} 2 + |x| &= \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x \\ &= \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1). \end{aligned}$$
□

例 10.8.4　将函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & (0 < x \leqslant 2), \\ 2 - \dfrac{x}{2} & (2 < x < 4) \end{cases}$$

在 $(0,4)$ 上展开成余弦级数.

解　先将 $f(x)$ 作偶延拓,使它成为 $(-4,4)$ 上的偶函数,再以 $2l = 4$ 为周期作周期延拓,得到定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数,延拓后的函数(仍记为 $f(x)$)的最小正周期为 4. 显然 $f(x)$ 满足收敛定理的条件. 按公式(10.8.9)得

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x = 1,$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (n = 2k), \\ \dfrac{-4}{(2k-1)^2\pi^2} & (n = 2k-1). \end{cases}$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,4)$ 上的余弦级数展开式为

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2} \quad (0 < x < 4).$$
□

例10.8.5 将函数 $f(x)=x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 按 π 为周期进行延拓后,写出其傅立叶级数展开式.

解 要将函数 $f(x)=x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 以 π 为周期进行延拓,可以看成延拓后函数 $F(x)$ 确定在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上,再以 π 为周期延拓而得到. 于是它的傅立叶系数为

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi,$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F(x)\cos\frac{2n\pi x}{\pi}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos 2nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n\pi}\left[x\sin 2nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin 2nx\mathrm{d}x\right]=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 2nx\mathrm{d}x\\&=\frac{-1}{n\pi}\left[x\cos 2nx\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos 2nx\mathrm{d}x\right]=-\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

根据收敛定理,有

$$x=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}\quad(0<x<\pi).$$

在区间端点 $x=0$ 和 $x=\pi$ 处,级数收敛到(见图10.8)

$$\frac{1}{2}\left[f(0^+)+f(\pi^-)\right]=\frac{\pi}{2}.\qquad\square$$

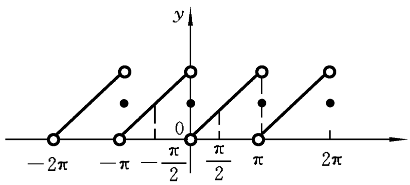


图10.8

习 题 10.8

(A)

1. 试将下列周期函数展开成傅立叶级数,函数在一个周期内的表达式为

(1) $f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<2.\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -3\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<3.\end{cases}$

(3) $f(x)=x\cos x,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$; (4) $f(x)=\begin{cases}2-x, & 0\leqslant x\leqslant 4,\\ x-6, & 4<x\leqslant 8.\end{cases}$

2. 将 $f(x)=\frac{x^2}{2}(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成正弦级数.

3. 证明:当 $0<x<\pi$ 时,有 $\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots=\frac{\pi}{4}$.

4. 将 $f(x)=x-1(0\leqslant x\leqslant 2)$ 展开成周期为4的余弦级数.

5. 试将 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成正弦级数.

6. 将 $f(x)=x$ 在 $[0,\pi]$ 上分别展开成余弦级数和正弦级数.

7. 将函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\end{cases}$ 展开成余弦级数.

8. 将 $f(x)=x(1<x<3)$ 展开成傅立叶级数,并用它证明等式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\dfrac{\pi}{4}$.

(B)

1. 证明在 $[0,\pi]$ 上下式成立:

(1) $x(\pi-x)=\dfrac{\pi^2}{6}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{n^2}$;　　(2) $x(\pi-x)=\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$.

并利用以上结果证明

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\dfrac{\pi^3}{32}$.

答案与提示

(A)

1. (1) $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi x\right)(-2\leqslant x\leqslant 2,x\neq 0)$;当 $x=0$ 时,级数收敛于 $\dfrac{1}{2}$;

(2) $f(x)=-\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{6}{\pi^2n^2}[1-(-1)^n]\cos\dfrac{n\pi x}{3}+(-1)^{n+1}\dfrac{6}{\pi n}\sin\dfrac{n\pi x}{3}\right]$　$(x\neq 3(2k+1),k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$;

(3) $f(x)=\dfrac{16}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$　$\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$;

(4) $f(x)=\dfrac{16}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{4}$　$(0\leqslant x\leqslant 8)$.

2. $f(x)=\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}(0\leqslant x<\pi)$,当 $x=\pi$ 时,级数收敛于0.

3. 将 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}$ 在 $(0,\pi)$ 内展开成正弦级数.

4. $f(x)=1-\dfrac{2}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi x\right)$　$(0<x<2)$.

5. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}(0<x\leqslant\pi)$,$x=0$ 时级数收敛于0.

6. $x=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}(0\leqslant x\leqslant\pi)$;　$x=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

7. $f(x)=\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{\pi}\cos x-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$　$\left(0\leqslant x<\pi,x\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$;

当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时,级数收敛于 $\dfrac{1}{2}$.

8. $x=2+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x$　$(1<x<3)$.

10.9　傅立叶级数的复数形式

在电工学中,通常把形如

$$x = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{10.9.1}$$

的量叫做**复谐振动**. 这里的复数

$$c = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

称为**复振幅**,而实数 ω 称为**圆频率**. 根据欧拉公式

$$\cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}, \qquad \sin t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}$$

复谐振动(10.9.1)可以写成

$$x = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = r[\cos(\omega t + \theta) + \mathrm{i}\sin(\omega t + \theta)].$$

由此可见,(10.9.1)式的实部或虚部就是通常的谐振动,而复振幅的模 $|c| = r$ 就是通常的振幅,复振幅的幅角就是通常的初相. 在交流电路和频谱分析中,常常需要计算频率相同但振幅与初相不同的若干量的叠加. 这时采用复数形式的傅立叶级数就比采用三角级数方便.

周期函数的傅立叶级数展开,意味着把复杂的振动分解为谐振动分量之和. 下面设法把各谐振动分量写成复谐振动的形式.

设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 的傅立叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{10.9.2}$$

其中

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n = 0,1,2,\cdots), \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots), \end{cases} \tag{10.9.3}$$

利用欧拉公式,(10.9.2)式可化为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}}\right) - \frac{\mathrm{i}b_n}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}}\right)\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}} + \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}}\right]. \tag{10.9.4}$$

记

$$\frac{a_0}{2} = c_0, \quad \frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2} = c_n, \quad \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2} = c_{-n} \quad (n = 1,2,\cdots), \tag{10.9.5}$$

则(10.9.4)式就写成

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}} + c_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}},$$

因此 $f(x)$ 的傅立叶级数的复数形式就是

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}. \tag{10.9.6}$$

其中系数 c_0, c_n, c_{-n} 可由(10.9.3)、(10.9.5)两式推得:

$$\begin{cases} c_0 = \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x, \\ c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2} = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots), \\ c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2} = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)e^{i\frac{n\pi x}{l}}\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots), \end{cases} \tag{10.9.7}$$

通常称(10.9.7)式为**傅立叶系数的复数形式**.

由上可知,傅立叶级数的复数形式的形状比较简单,运算也较为方便,并且傅立叶系数 c_n 及 c_{-n} 直接地反映了第 n 次谐波

$$a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

的振幅的大小. 事实上,其振幅为 $\qquad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$,

在复数形式中 $\qquad |c_n| = |c_{-n}| = \dfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \dfrac{1}{2}A_n$,

这正好是 n 次谐波振幅的一半.

例 10.9.1 把宽度为 2τ,周期为 $2l(l > \tau)$,高度为 E 的矩形波展开为复数形式的傅立叶级数(见图 10.9).

解 首先写出矩形波函数在一个周期内的表达式:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-l \leqslant x \leqslant -\tau), \\ E & (-\tau < x < \tau), \\ 0 & (\tau \leqslant x < l). \end{cases}$$

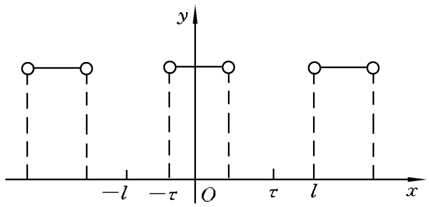


图 10.9

其次,计算其傅立叶系数

$$c_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2l}\int_{-\tau}^{\tau} E\,\mathrm{d}x = \frac{E\tau}{l},$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2l}\int_{-\tau}^{\tau} E\,e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{E}{n\pi}\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{n\pi\tau}{l}} - e^{-i\frac{n\pi\tau}{l}}\right) = \frac{E}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{l} \quad (n = 1,2,\cdots). \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 是逐段连续和逐段单调的函数,满足收敛定理的条件,因此有

$$f(x) = \frac{E\tau}{l} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{E}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi\tau}{l}\right)e^{i\frac{n\pi x}{l}} \quad (-l \leqslant x \leqslant l, x \neq -\tau, \tau). \tag{10.9.8}$$

当 $x = -\tau$ 及 $x = \tau$ 时,上述级数收敛于 $\dfrac{E}{2}$. □

习　题　10.9

1. 在例10.9.1所得到的(10.9.8)式中,取$\tau=\dfrac{l}{3}$,试将复数形式的傅立叶级数(10.9.8)的实数形式写出来.
2. 设$f(x)$是周期为2的周期函数,它在$[-1,1]$上的表达式为$f(x)=x$.试将$f(x)$展开为复数形式的傅立叶级数.

答案与提示

1. $f(x)=\dfrac{E}{3}+\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\dfrac{2E}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi}{3}\cos\dfrac{n\pi x}{l}\quad\left(-l\leqslant x\leqslant l, x\neq -\dfrac{l}{3},\dfrac{l}{3}\right).$
2. $f(x)=\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\mathrm{i}}{n\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x}\quad(x\neq 2k+1, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$

总 习 题 (10)

1. 填空题:

(1) 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\ln 3)^n}{2^n}$的和为________.

(2) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于$A$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$收敛于________.

(3) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和序列为$S_n=\dfrac{2n}{n+1}$,则$a_n=$ ______, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=$ ______.

(4) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+a}{n}$收敛,则$a$的取值范围为______.

(5) 级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{n^p}$在$p$ ______时收敛.

2. 选择题(只有一个答案是正确的):

(1) 已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$等于(　　).

(A) 3;　　(B) 7;　　(C) 8;　　(D) 9.

(2) 设α为常数,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\sin(n\alpha)}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$(　　).

(A)绝对收敛;　　(B)发散;

(C)条件收敛;　　(D)收敛性与α的取值有关.

(3) 设$0\leqslant a_n<\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,则下列级数中肯定收敛的是(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$;　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$;　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$;　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$.

(4) 下列各选项中正确的是(　　).

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 都收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ 收敛;

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 都收敛;

(C) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则 $a_n > \frac{1}{n}$;

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,且 $a_n \geqslant b_n (n = 1,2,\cdots)$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛.

3. 判定下列级数的敛散性、绝对收敛性与条件收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\alpha}{n}\right)$(常数 $\alpha > 0$);　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n - 1}$;

(3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n} (a > 0)$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right) (a > 0)$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n - \ln n}$;　　(8) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_n^{n+1} \frac{e^{-x}}{x} dx$;

(9) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$;　　(10) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$.

4. 设 $a_n \neq 0 (n = 1,2,\cdots)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l (\neq 0)$. 求证:级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right|$ 同敛散.

5. 利用泰勒公式估计无穷小量 a_n 的阶,从而判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} \sin \frac{1}{n}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n + a} - \sqrt[4]{n^2 + n + b})$.

6. 设偶函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在 $x = 0$ 的一个邻域内连续,且 $f(0) = 1, f''(0) = 2$. 试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right]$ 绝对收敛.

7. 设 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的某邻域内有二阶连续导数,且 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

8. 设 $a_n > 0$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,$b_n = 1 - \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n}$,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

9. 设数列 $\{n a_n\}$ 收敛,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

10. 填空题:

(1) 设有级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x+1}{2}\right)^n$,若 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{3}$,则该级数的收敛半径等于________;

(2) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 3,则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为____;

(3) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数,它在区间 $(-1,1]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\leqslant 0,\\ x^3, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

则$f(x)$的傅立叶级数在$x=1$处收敛于________;

(4) 设函数$f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$的傅立叶级数展开式为$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$,则其中系数$b_3$的值为________;

(5) 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n4^n}$的收敛域为________.

11. 选择题(只有一个答案是正确的):

(1) 设$f(x)=x^2(0\leqslant x<1)$,而$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x\ (-\infty<x<+\infty)$,其中$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x$,$n=1,2,\cdots$.则$S\left(-\dfrac{1}{2}\right)$等于( ).

(A) $-\dfrac{1}{2}$; (B) $-\dfrac{1}{4}$; (C) $\dfrac{1}{4}$; (D) $\dfrac{1}{2}$.

(2) 设常数$p>0$,则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n^p}$在其收敛区间的右端点处是( ).

(A) 条件收敛的;

(B) 绝对收敛的;

(C) 当$0<p\leqslant 1$时为条件收敛,$p>1$时为绝对收敛;

(D) 当$0<p\leqslant 1$时为绝对收敛,$p>1$时为条件收敛.

(3) 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{n}x^n$的收敛域为( ).

(A) $(-1,1)$; (B) $[-1,1]$; (C) $(-1,1]$; (D) $[-1,1)$.

(4) 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3n+1}{n!}x^{3n}$的和函数为( )

(A) $x\mathrm{e}^{x^3}$; (B) $(1+3x^3)\mathrm{e}^{x^3}$; (C) $3x^3\mathrm{e}^{x^3}$; (D) $(2+3x^3)\mathrm{e}^{x^3}$.

12. 求下列幂级数的收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)^p}(p>0)$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n-1)2n}$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{a^n+b^n}(a>0,b>0)$.

13. 求下列函数项级数的收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$.

14. 求下列幂级数的和函数,并指出其收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$.

15. 求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

16. 将下列函数展开成 x 的幂级数,并指出其收敛域:

(1) $\ln(a+x)(a>0)$;　(2) $\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$;

(3) $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$;　(4) $\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$.

17. 将下列函数在指定点展开成幂级数:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2x^2+x-3}, x_0=3$;　(2) $f(x)=(x-2)e^{-x}, x_0=1$;

(3) $f(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x-e}{x-1}\right), x_0=1$.

18. 试将函数 $f(x)=10-x(5\leqslant x\leqslant 15)$ 展开成以 10 为周期的傅立叶级数.

19. 试利用$\dfrac{\pi-x}{2}$在$[0,\pi]$上的正弦级数,对于$-\pi\leqslant\alpha<0<\beta\leqslant\pi$,求极限:

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\cos kx\right]dx.$$

20. 在区间$(0,2)$上将函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<1, \\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$ 展开成余弦级数.

21. 设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^\infty b_n\sin nx\ (-\pi<x<\pi)$,且$\dfrac{\pi-x}{2}=\sum\limits_{n=1}^\infty b_n\sin nx(0<x<\pi)$. 试求 b_n 及 $S(x)$.

22. 证明:在区间$[-\pi,\pi]$上等式$\sum\limits_{n=1}^\infty\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx=\dfrac{\pi^2}{12}-\dfrac{x^2}{4}$成立,并求级数$\sum\limits_{n=1}^\infty\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$的和.

23. 证明:当$0\leqslant x\leqslant\pi$时,有 $e^{2x}=\dfrac{e^{2\pi}-1}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^\infty\dfrac{(-1)^n e^{2\pi}-1}{4+n^2}\cos nx$.

答案与提示

1. (1) $\dfrac{2}{2-\ln 3}$;　(2) $2A-u_1$;　(3) $a_n=\dfrac{2}{n(n+1)}$, $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n=2$;　(4) $a=0$;　(5) $p>0$.

2. (1) (C);　(2) (B);　(3) (D);　(4) (A).

3. (1) 绝对收敛;　(2) 收敛;　(3) 发散;　(4) $a\geqslant\dfrac{1}{e}$时发散,$a<\dfrac{1}{e}$时收敛;

(5) $a\neq\sqrt{e}$ 时发散,$a=\sqrt{e}$ 时收敛;　(6) 收敛;　(7) 条件收敛;　(8) 绝对收敛;

(9) 发散;　(10) 发散.

5. (1) 发散;　(2) $a=\dfrac{1}{2}$时收敛,$a\neq\dfrac{1}{2}$时发散.

6. 利用$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=1+\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

7. 注意$f(0)=f'(0)=0, f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}f''(0)\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

8. 注意$b_n>0, b_n=\dfrac{1}{2}a_n+o(a_n)$.

9. 寻找两个级数的部分和之间的关系.

10. (1) $\dfrac{2}{3}$;　(2) $(-2,4)$;　(3) $\dfrac{3}{2}$;　(4) $\dfrac{2\pi}{3}$;　(5) $(-2,6)$.

11. (1) (B);　(2) (C);　(3) (D);　(4) (B).

12. (1) $p>1$ 时为 $[-1,1]$，$0<p\leqslant 1$ 时为 $[-1,1)$； (2) $[-1,1]$；
(3) $[-1,1)$； (4) $a\geqslant b$ 时为 $(-a,a)$，$a<b$ 时为 $(-b,b)$.

13. (1) $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$； (2) $(1,+\infty)$.

14. (1) $S(x)=(1-x)\ln(1-x)+x,x\in[-1,1)$；
(2) $S(x)=e^{x^2}(2x^2+1)-1,x\in(-\infty,+\infty)$.

15. (1) $\dfrac{\pi}{2}-\ln 2$； (2) $\dfrac{1}{2}(\cos 1-\sin 1)$.

16. (1) $\ln(a+x)=\ln a+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{na^n},-a<x\leqslant a$；

(2) $\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n-2},x\in(-1,1)$；

(3) $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1},x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$；

(4) $\arctan\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in[-1,1)$.

17. (1) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\dfrac{1}{5\cdot 2^{n+1}}-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{2}{9}\right)^{n+1}\right](x-3)^n,1<x<5$；

(2) $f(x)=-\dfrac{1}{e}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+2)}{e(n+1)!}(x-1)^{n+1},x\in(-\infty,+\infty)$；

(3) $f(x)=e\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n-1}{n!}(x-1)^{n-2},x\neq 1$.

18. $f(x)=10\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{5}(5<x<15)$；在 $x=5,15$ 处级数收敛于0.

19. 1.

20. $f(x)=\dfrac{2\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{8}{n^2}\cos nx(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$.

21. $b_n=\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，$S(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi+x}{2}, & -\pi\leqslant x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{\pi-x}{2}, & 0<x<\pi.\end{cases}$

第 11 章　含参变量的积分

在第10章中我们看到,无穷级数可以表示一个函数,因而它是构造新函数的一种重要工具.本章介绍构造新函数的另一种工具——含参变量的积分.

其实,含参变量的积分在前面的章节中已经出现过,例如 Γ 函数 $\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{p-1}\mathrm{d}x\,(p>0)$ 及Beta函数 $\mathrm{B}(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x\,(m>0,n>0)$ 等,分别为含参变量 p 及 m、n 的广义积分.

本章将考察两种含参变量的积分.一种是形如

$$I(x)=\int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}y \quad 或 \quad J(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$$

的含参变量的常义积分;另一种是形如

$$K(x)=\int_\alpha^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

的含参变量的广义积分.主要问题是讨论它们对参变量的连续性、可微性和可积性.

此外,本章还将介绍广义积分的收敛性判别法.

11.1　含参变量的常义积分

本节讨论含参变量的常义积分的性质.

定理 11.1.1　设 $f(x,y)\in C(D)$,其中 $D=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 是一个闭区域,则

$$I(x)=\int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}y$$

是 $[a,b]$ 上的连续函数.

证　在 $[a,b]$ 上任取一点 x_0,我们证明 $I(x)$ 在 x_0 点连续.注意

$$I(x)-I(x_0)=\int_\alpha^\beta[f(x,y)-f(x_0,y)]\mathrm{d}y,$$

或

$$|I(x)-I(x_0)|\leqslant\int_\alpha^\beta|f(x,y)-f(x_0,y)|\mathrm{d}y. \tag{11.1.1}$$

由于 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,故必一致连续,从而对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,对于 D 中的任意两点 (x_1,y_1),(x_2,y_2),只要

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta,$$

就有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon.$$

由于点 (x,y) 与点 (x_0,y) 的距离等于 $|x-x_0|$,所以当 $|x-x_0|<\delta$ 时,便有

$$|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon.$$

于是由(11.1.1)式可得

$$|I(x)-I(x_0)|<\varepsilon(\beta-\alpha).$$

这就证明了$I(x)$在x_0处是连续的.由于x_0是在$[a,b]$中任取的点,故$I(x)$在$[a,b]$上连续. □

注　$I(x)$在x_0处连续意味着

$$\lim_{x\to x_0} I(x)=I(x_0), \tag{11.1.2}$$

而

$$I(x_0)=\int_\alpha^\beta f(x_0,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta \lim_{x\to x_0} f(x,y)\mathrm{d}y,$$

因此(11.1.2)式可以写成

$$\lim_{x\to x_0}\int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta \lim_{x\to x_0} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

这就是说,在$f(x,y)$连续的前提下,积分运算与极限运算可以交换顺序.

定理 11.1.2　设$f(x,y)\in C(D)$,$\varphi(x)$,$\psi(x)\in C[a,b]$,并有$\alpha\leqslant\varphi(x)\leqslant\beta$,$\alpha\leqslant\psi(x)\leqslant\beta(x\in[a,b])$,则

$$J(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

是$[a,b]$上的连续函数.

证　首先将$J(x)$分解为如下形式:

$$J(x)=\int_\alpha^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y-\int_\alpha^{\varphi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y=J_1(x)-J_2(x),$$

$J_1(x)$和$J_2(x)$分别是$\int_\alpha^u f(x,y)\mathrm{d}y$与$u=\psi(x)$或$u=\varphi(x)$的复合函数.由定理11.1.1及复合函数的连续性可知,$J_1(x)$,$J_2(x)\in C[a,b]$,因此$J(x)\in C[a,b]$. □

定理 11.1.3(积分顺序的可交换性)　设$f(x,y)\in C(D)$,则

$$\int_a^b I(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \tag{11.1.3}$$

证　由定理11.1.1可知,$I(x)$在$[a,b]$上连续,因此积分

$$\int_a^b I(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

是存在的.我们知道,当$f(x,y)$在闭区域$D=[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续时,两个二次积分$\int_a^b\left[\int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$与$\int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$都等于二重积分$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,因而等式(11.1.3)成立. □

定理 11.1.4(求导与积分的顺序可交换性)　设$f(x,y)$及$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\in C(D)$,则$I(x)$在$[a,b]$上可微,且

$$I'(x)=\int_\alpha^\beta \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y. \tag{11.1.4}$$

证　令
$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y = g(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b),$$
在$[a,b]$中任取一点z,则由定理11.1.3知,

$$\int_a^z g(x)\mathrm{d}x=\int_a^z\left[\int_\alpha^\beta \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta\left[\int_a^z \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$
$$=\int_\alpha^\beta[f(z,y)-f(a,y)]\mathrm{d}y=I(z)-I(a).$$

由定理11.1.1知,$g(x)$是$[a,b]$上的连续函数,上式对z求导即得
$$g(z)=I'(z),$$
此即所要证.　□

定理11.1.5　设$f(x,y)$及$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\in C(D)$,$\varphi(x)$与$\psi(x)$在$[a,b]$上可微,且有$\alpha\leqslant\varphi(x)\leqslant\beta$,$\alpha\leqslant\psi(x)\leqslant\beta(x\in[a,b])$,则
$$J(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$$
在$[a,b]$上可微,且有
$$J'(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y+f(x,\psi(x))\psi'(x)-f(x,\varphi(x))\varphi'(x). \tag{11.1.5}$$

证　$J(x)$可视为由三元函数$F(x,u,v)=\int_v^u f(x,y)\mathrm{d}y$与$u=\psi(x)$,$v=\varphi(x)$复合而成的函数.由于$f(x,y)$及$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$在$D$上连续,故由定理11.1.1知,$F(x,u,v)$的偏导数
$$\frac{\partial F(x,u,v)}{\partial x}=\int_v^u\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y,\quad \frac{\partial F(x,u,v)}{\partial u}=f(x,\psi(x)),$$
$$\frac{\partial F(x,u,v)}{\partial v}=-f(x,\varphi(x))$$
是连续的.于是由链式法则知,$J(x)$在$[a,b]$上可微,且有
$$J'(x)=\left[\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right]_{u=\psi(x),v=\varphi(x)}$$
$$=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y+f(x,\psi(x))\psi'(x)-f(x,\varphi(x))\varphi'(x).$$
□

例11.1.1　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y$.

解　因$\sqrt{x^2+y^2}$是连续函数,故由定理11.1.1知,
$$I(x)=\int_{-1}^1\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，从而有

$$\lim_{x\to 0} I(x) = I(0) = \int_{-1}^{1} \sqrt{y^2}\,\mathrm{d}y = 2\int_0^1 y\,\mathrm{d}y = 1. \qquad \square$$

例 11.1.2　设 $F(x)=\int_x^{x^2} \mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}y$，求 $F'(x)$.

解　不难验证，定理 11.1.5 在这里可以使用，因此

$$F'(x)=\int_x^{x^2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{-xy^2}\right)\mathrm{d}y + \mathrm{e}^{-x(x^2)^2}\cdot 2x - \mathrm{e}^{-x\cdot x^2}$$

$$= 2x\mathrm{e}^{-x^5} - \mathrm{e}^{-x^3} - \int_x^{x^2} y^2\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}y. \qquad \square$$

例 11.1.3　设 $0<a<b$，求 $I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$.

解　因 $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y\mathrm{d}y$，故有 $I=\int_0^1\left[\int_a^b x^y\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$. 由于 x^y 在 $0\leqslant x\leqslant 1, 0<a\leqslant y\leqslant b$ 上连续，根据定理 11.1.3，交换积分次序得

$$I=\int_a^b \mathrm{d}y\int_0^1 x^y\mathrm{d}x = \int_a^b \left.\frac{x^{y+1}}{y+1}\right|_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y = \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \ln\frac{b+1}{a+1}. \qquad \square$$

习　题　11.1

(A)

1. 求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^2 y^2\cos(xy)\mathrm{d}y$；　　(2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$.

2. 求 $F'(x)$：

(1) $\int_{a+x}^{b+x}\frac{\sin(xy)}{y}\mathrm{d}y$；　　(2) $\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{x\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$.

3. 设 $F(x)=\int_0^x (x+y)f(y)\mathrm{d}y$，其中 $f(x)$ 为可微函数. 求 $F''(x)$.

4. 设 $F(x)=\int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}\mathrm{d}t$，求 $F^{(n)}(x)$.

5. 积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y$ 能否交换次序？为什么？

(B)

1. 设 $F(x)=\int_0^x\left[\int_{t^2}^{x^2} f(t,s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$.

2. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h\left[\int_0^h f(x+\xi+\eta)\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}\xi$，求 $F''(x)$.

3. 设 $f(x)\in C^{(2)}(-\infty,+\infty)$，$F(x)\in C^{(1)}(-\infty,+\infty)$，

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+at)+f(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(y)\mathrm{d}y.$$

求证:当$-\infty<x<+\infty$,$t\geqslant 0$时,$u(x,t)$,$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$,$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$连续且满足弦振动方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$以及初始条件$u(x,0)=f(x)$,$\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=F(x)$.

答案与提示

(A)

1. (1) $\dfrac{8}{3}$; (2) $\dfrac{\pi}{4}$.

2. (1) $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{b+x}\right)\sin x(b+x)-\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a+x}\right)\sin x(a+x)$;

(2)$\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-y^2}\mathrm{e}^{x\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y-\sin x\cdot\mathrm{e}^{x|\sin x|}-\cos x\cdot\mathrm{e}^{x|\cos x|}$.

3. $3f(x)+2xf'(x)$.

4. $(n-1)!\ f(x)$.

5. 不能.

(B)

1. $2\int_0^x xf(t,x^2)\mathrm{d}t$.

2. $\dfrac{1}{h^2}[f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)]$.

11.2 广义积分收敛性判别法

在第10章10.2.4中,利用广义积分给出了关于正项级数敛散性的积分判别法.本节将给出一些判定广义积分收敛及发散的较简单的判别法,这无论是对级数的研究还是对广义积分的研究,都是十分有用的.

11.2.1 无穷积分收敛性判别法

考虑无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$,其中$f(x)$是$[a,+\infty)$上的非负函数.下面给出判别上述积分的收敛性的比较判别法,读者可注意它与正项级数收敛性的比较判别法的相似之处.

定理11.2.1(比较判别法) 设函数$f(x)$和$g(x)$在任何有限区间$[a,A]$上都可积,且

$$0\leqslant f(x)\leqslant g(x),\quad \forall x\geqslant a,\tag{11.2.1}$$

则(1) 当$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$收敛时,$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$也收敛;

(2) 当$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散时,$\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$也发散.

证　(1) 对于任意的实数 $A>a$,由条件(11.2.1)可得

$$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^A g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x. \tag{11.2.2}$$

因广义积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,故(11.2.2)式表明函数 $F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 有上界.又因 $f(x)$ 非负,故 $F(A)$ 是 A 的单调增加函数.利用第 2 章习题 2.5(B)第 4 题的结论知,

$$\lim_{A\to+\infty} F(A) = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$$

存在,即广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 显然是(1)的推论. □

上述比较判别法的极限形式如下.

定理 11.2.2(**比较判别法的极限形式**)　设 $f(x)\geqslant 0, g(x)>0$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$. 则

(1) 当 $0<c<+\infty$ 时,$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散;

(2) 当 $c=0$ 且 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时,$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛;

(3) 当 $c=+\infty$,且 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散时,$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

证明留给读者.

如果取 $g(x)=\dfrac{1}{x^p}$,则可利用广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 的敛散性导出下述简便的判别法:

推论 11.2.1　设 $f(x)$ 是任何有限区间 $[a,A]$ 上可积的正值函数,且

$$\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) = \lambda. \tag{11.2.3}$$

(1) 若 $p>1, 0\leqslant\lambda<+\infty$,则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 若 $p\leqslant 1, 0<\lambda\leqslant+\infty$,则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **绝对收敛**是指 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛.可以证明,若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛,则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 必收敛.若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,但 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散,则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **条件收敛**.

例 11.2.1　证明概率积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

证　当 $x>1$ 时,$0<\mathrm{e}^{-x^2}<\mathrm{e}^{-x}$.而积分

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{e}$$

收敛. 根据定理 11. 2. 1 知,积分$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 收敛,从而概率积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

也收敛. □

例 11. 2. 2　讨论无穷积分的敛散性:

(1)$\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx \quad (\alpha > 0)$;　　(2)$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}dx$

解　(1) 由于　$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \cdot x^{\alpha}e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{2+\alpha}}{e^x} = 0$,

根据推论 11. 2. 1,$p = 2$,$\lambda = 0$,积分(1)收敛.

(2) 由于　$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/2} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^{-5}+1}} = 1$,

这里 $p = \frac{1}{2}$,$\lambda = 1$,由推论 11. 2. 1 知,积分(2)发散. □

例 11. 2. 3　证明广义积分$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x\sqrt{1+x^2}}dx$ 绝对收敛.

证　由于 $\left|\frac{\cos x}{x\sqrt{1+x^2}}\right| \leqslant \frac{1}{x^{3/2}} \ (x > 1)$,而积分$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ 收敛,故 $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x\sqrt{1+x^2}}\right| dx$ 收敛,亦即原积分绝对收敛. □

11. 2. 2　无界函数的广义积分收敛性判别法

对于无界函数的广义积分,其收敛性判别法及证明与无穷积分的情形相似. 这里只列举而不作详述.

定理 11. 2. 3(**比较判别法**)　设函数$f(x)$和$g(x)$定义于区间$[a, b]$,a 是它们的奇点,且对任何 $\varepsilon > 0$,它们都在区间$[a+\varepsilon, b]$上可积. 如果在$(a, b]$上恒有$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$,则

(1) 当$\int_a^b g(x)dx$ 收敛时,$\int_a^b f(x)dx$ 也收敛;

(2) 当$\int_a^b f(x)dx$ 发散时,$\int_a^b g(x)dx$ 也发散.

如果取 $g(x) = \frac{1}{(x-a)^p}$,则上述定理的极限形式成为下面的推论.

推论 11. 2. 2　设正值函数$f(x)$在$(a, b]$的任何内闭区间上都是可积的,a 是$f(x)$的奇点,且

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^p f(x)=\lambda.$$

(1) 若$0<p<1,0\leqslant\lambda<+\infty$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛;

(2) 若$p\geqslant1,0<\lambda\leqslant+\infty$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散.

例11.2.4　判别下列广义积分的敛散性:

(1)$\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;　　　　(2)$\int_1^2\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\mathrm{d}x$.

解　(1) 显然,$x=0$是被积函数的奇点,取$p=\frac{3}{4}<1$,则

$$\lambda=\lim_{x\to0^+}x^{3/4}\cdot\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-1/4}}=\lim_{x\to0^+}(-4x^{1/4})=0.$$

由推论11.2.2(1)知,广义积分(1)收敛.

(2) $x=1$是被积函数的奇点,取$p=1$,则

$$\lambda=\lim_{x\to1^+}(x-1)\cdot\frac{\sqrt{x}}{\ln x}=\lim_{x\to1^+}\sqrt{x}\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{\ln x}=1.$$

由推论11.2.2(2)知,广义积分(2)发散. □

例11.2.5　讨论p为何值时,欧拉(Euler)积分

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{p-1}\mathrm{d}x \tag{11.2.4}$$

收敛.

解　注意到积分(11.2.4)式正是我们在第4章4.6节中介绍过的Γ函数,在那里我们曾指出,$p>0$时,积分(11.2.4)是收敛的. 现在就来证明这个结论.

在积分(11.2.4)中,$x=0$可能是奇点,且还有无穷积分需要考虑,故把原积分分解为以下两个积分:

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{p-1}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^{-x}x^{p-1}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{p-1}\mathrm{d}x.$$

由于

$$\lim_{x\to0^+}x^{1-p}\cdot\left(\mathrm{e}^{-x}x^{p-1}\right)=\lim_{x\to0^+}\mathrm{e}^{-x}=1,$$

因此,当$1-p<1$,即$p>0$时,积分$\int_0^1\mathrm{e}^{-x}x^{p-1}\mathrm{d}x$收敛;当$1-p\geqslant1$,即$p\leqslant0$时,积分$\int_0^1\mathrm{e}^{-x}x^{p-1}\mathrm{d}x$发散. 此外,

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\left(\mathrm{e}^{-x}x^{p-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p+1}}{\mathrm{e}^x}=0,$$

由推论11.2.1知,积分$\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{p-1}\mathrm{d}x$收敛.

综上所述,当$p>0$时,$\Gamma(p)$收敛;当$p\leqslant0$时,$\Gamma(p)$发散. □

习　题　11.2

(A)

1. 讨论下列无穷积分的敛散性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4-x^2+1}dx$;　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;　(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x}dx$;

(4) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}dx$;　(5) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$;　(6) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$.

2. 讨论下列无界函数广义积分的敛散性:

(1) $\int_0^1\frac{\ln x}{x^2+1}dx$;　(2) $\int_0^2\frac{dx}{\ln x}$;　(3) $\int_0^1\frac{\sin x}{x^2}dx$;　(4) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x}{\sqrt{x-x^2}}dx$.

3. 讨论下列广义积分的敛散性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx$;　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;　(3) $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx$;

(4) $\int_0^1\frac{\ln x}{(1-x)^2}dx$;　(5) $\int_0^1\frac{|\sin x|}{x^{3/2}}dx$;　(6) $\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

(B)

1. 讨论下列广义积分的敛散性:

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx$;　(2) $\int_0^1\frac{1-\cos x}{x^m}dx$;　(3) $\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$,　$(n\geqslant 0)$;

(4) $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$;　(5) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2\sin^2 x}$;　(6) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$.

2. 证明:当$m>0,n>0$时,广义积分$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$　(Beta 函数)收敛.

答案与提示

(A)

1. (1) 收敛;　(2) 收敛;　(3) 发散;　(4) $\alpha>1$时收敛,$\alpha\leqslant 1$时发散;　(5) 收敛;　(6) 发散.

2. (1) 发散;　(2) 发散;　(3) 发散;　(4) 收敛.

3. (1) $\alpha\geqslant 1$及$\alpha\leqslant 0$时发散,$0<\alpha<1$时收敛;　(2) 收敛;　(3) 收敛;　(4) 发散;　(5) 收敛;　(6) 发散.

(B)

1. (1) 发散;　(2) $m<3$时收敛,$m\geqslant 3$时发散;　(3) $m>-1$且$n-m>1$时收敛;　(4) $p<1$且$q<1$时收敛;　(5) 发散;　(6) $1<n<2$时收敛.

11.3　含参变量的广义积分

现在来考察含参变量的广义积分

$$K(x)=\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y,\quad x\in X,$$

其中X是有限区间或无穷区间.如果对每一个$x\in X$,上述积分都收敛,则称这个含参变量的广义积分在X上收敛,它确定了一个x的函数.本节将给出有关这个函数的连续性、可微性与可积性的结论(不予证明).

11.3.1　一致收敛性

与函数列、函数项级数的情形类似,为了讨论极限过程的交换问题,需要引进一致收敛的概念.

定义11.3.1　设含参变量的广义积分$K(x)=\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$在$X$上收敛.如果$\forall\varepsilon>0$,存在$A_0=A_0(\varepsilon)$,使当$A>A_0$时,对一切$x\in X$,成立

$$\left|\int_{A}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon,$$

则称$\int_{A}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$关于$x\in X$**一致收敛**.

下面给出含参变量广义积分的一致收敛判别法.

定理11.3.1(维斯特拉斯(Weierstrass) M-判别法)　设积分$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$满足

(1) $|f(x,y)|\leqslant F(y)$, $\alpha\leqslant y<+\infty$, $x\in X$;

(2) $\int_{\alpha}^{+\infty} F(y)\mathrm{d}y$收敛.

则$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$关于$x\in X$一致收敛.

证　由于积分　$\int_{\alpha}^{+\infty} F(y)\mathrm{d}y=\int_{\alpha}^{A} F(y)\mathrm{d}y+\int_{A}^{+\infty} F(y)\mathrm{d}y$

收敛,所以$\forall\varepsilon>0$,存在$A_0=A_0(\varepsilon)$,使当$A>A_0$时,有

$$\int_{A}^{+\infty} F(y)\mathrm{d}y<\varepsilon.$$

于是$\forall x\in X$,有

$$\left|\int_{A}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right|\leqslant\int_{A}^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y\leqslant\int_{A}^{+\infty} F(y)\mathrm{d}y<\varepsilon.$$

因此$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$在$X$上关于$x$一致收敛.　□

例11.3.1　积分$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{1+y^2}\mathrm{d}y$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛,这可由不等式

$$\left|\frac{\cos(xy)}{1+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+y^2}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

和积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y$ 的收敛性推得. □

11.3.2 含参变量广义积分的性质

在一致收敛的条件下,含参变量的无穷积分同样具有连续性、积分顺序可交换性以及求导与求积分顺序可交换性等性质.下面仅介绍结果而不予证明.

定理 11.3.2(**连续性定理**)　设$f(x,y)$在$x\in[a,b]$,$y\geqslant\alpha$上连续,积分

$$K(x)=\int_\alpha^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

关于$x\in[a,b]$一致收敛,则$K(x)\in C[a,b]$.

定理 11.3.3(**积分顺序交换定理**)　设$f(x,y)$在$x\in[a,b]$,$y\geqslant\alpha$上连续,积分

$$K(x)=\int_\alpha^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

关于$x\in[a,b]$一致收敛,则

$$\int_a^b\left[\int_\alpha^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_\alpha^{+\infty}\left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

定理 11.3.4(**积分号下求导数定理**)　设$f(x,y)$,$f_x(x,y)$在$x\in[a,b]$,$y\geqslant\alpha$上连续,积分$\int_\alpha^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$,$\int_\alpha^{+\infty}f_x(x,y)\mathrm{d}y$ 关于$x\in[a,b]$一致收敛,则

$$K(x)=\int_\alpha^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

在$[a,b]$上有连续的导数,且

$$K'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_\alpha^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^{+\infty}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y.$$

例11.3.2　利用$\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}=\int_a^b\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y$ 计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x\ (a>0,b>0)$.

解　不妨设$a<b$.由所给等式可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left[\int_a^b\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_a^b\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\ln\frac{b}{a},$$

在这里,交换积分次序是合理的:

1° 函数e^{-xy}在区域$x\geqslant0$,$a\leqslant y\leqslant b$上连续;

2° 积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x$ 关于$y\in[a,b]$是一致收敛的.

事实上,当$x\geqslant0$,$a\leqslant y\leqslant b$时,有$0<\mathrm{e}^{-xy}\leqslant\mathrm{e}^{-ax}$,而积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$ 收敛,故积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x$ 对$y\in[a,b]$是一致收敛的. □

习　题　11.3

(A)

1. 讨论下列积分在所给区间上的一致收敛性：

(1)$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\quad(y\geqslant a>0)$；　　(2)$\int_1^{+\infty}x^y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\quad(a\leqslant y\leqslant b)$.

2. 证明函数$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$在不含$x=0$的任何区间上是连续的.

(B)

1. 求函数$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+y^2}\mathrm{d}y$的定义域.

2. 证明公式$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}\quad(a>0,b>0)$，式中$f(x)$为连续函数，且积分$\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$对任何$A>0$均收敛.

答案与提示

(A)

1. (1) 一致收敛；(2) 一致收敛.

(B)

1. $F(x)$的定义域为$x\geqslant 0$.
2. 利用积分中值定理.

总习题(11)

1. 求极限：

(1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1\sqrt{1+\alpha^2-x^2}\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{-1}^1\sqrt{\alpha^2+x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. 设$F(y)=\int_0^y f(x+y,x-y)\mathrm{d}x$，其中$f$有一阶连续偏导数，求$F'(y)$.

3. 设$f(x),g(x)$在任何有限区间$[a,A]$上可积，又$f^2(x),g^2(x)$在$[a,+\infty)$上的积分收敛. 证明$[f(x)+g(x)]^2$及$|f(x)g(x)|$在$[a,+\infty)$上的积分收敛.

4. 讨论下列广义积分的敛散性：

(1)$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$；　　(2)$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^n}\mathrm{d}x\quad(\alpha>0)$.

5. 讨论下列含参变量的广义积分在所给区间上的一致收敛性：

(1)$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin y\,\mathrm{d}y\quad(0<a\leqslant x<+\infty)$；　　(2)$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-\alpha)^2}\mathrm{d}x\quad(a<\alpha<b)$.

6. (1)试从$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$推出$I(c)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2-c^2/y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2c}\quad(设c>0)$.

(2)利用积分号下求导数的定理,先导出$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}c}=-2c$,然后求得同一结果.

答案与提示

1. (1) $\frac{\pi}{4}$; (2) 1.
2. $f(y,-y)+2\int_0^y f_u(u,v)\mathrm{d}x$,$u=x+y$,$v=x-y$.
3. 利用比较判别法.
4. (1) $p>1$且$q<1$时收敛; (2) $1<n<2$时收敛.
5. (1) 一致收敛; (2) 一致收敛.
6. 利用换元法积分.

参 考 文 献

1　方企勤.数学分析(第一册).北京:高等教育出版社,1986

2　沈燮昌.数学分析(第二册).北京:高等教育出版社,1986

3　廖可人,李正元.数学分析(第三册).北京:高等教育出版社,1986

4　林源渠等.数学分析习题集.北京:高等教育出版社,1986

5　同济大学应用数学系.微积分(上册).北京:高等教育出版社,1999

6　同济大学应用数学系.微积分(下册).北京:高等教育出版社,2000

7　同济大学应用数学系.高等数学(上、下册).第五版.北京:高等教育出版社,2002

8　欧阳光中,姚允龙.数学分析(上、下册).上海:复旦大学出版社,1993

9　Hallett D H,Gleason A M ,et al. Calculus. John Wiley & Sons,Inc. ,1994

10　McCallum W G ,Hallett D H Gleason A M ,et al. Multivariable Calculus. John Wiley & Sons,Inc. ,1996

11　Stein S K. Calculus and Analytic Geometry. 4th ed. McGraw-Hill Book Company,1987

12　Braun M. Differential Equations and Their Applications. 3rd ed. Springer-Verlag New York, Inc. , 1983

13　李心灿主编.高等数学应用205例.北京:高等教育出版社,1997